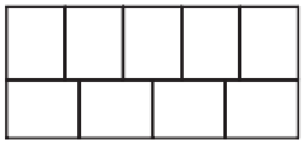
**Atividades OBMEP**

1. A figura mostra um retângulo de área $720cm^2$, formado por nove retângulos menores e iguais. Qual é o perímetro, em centímetros, de um dos retângulos menores?

A) 20
B) 24
C) 30
D) 36
E) 48



*Solução:*Chamaremos de $A$ o retângulo maior e de $B$ os retângulos menores, já que todos são iguais. A figura mostra um retângulo de $720cm^2$ de área, e ele está dividido em nove retângulos menores e iguais. Queremos saber quanto vale o perímetro de um desses retângulos menores . Vamos chamar a medida do lado menor do retângulo$B$ de $x$ e a medida do lado maior de $y$. Observe que na parte superior do retângulo $B$ está dividida em cinco retângulos menores $(B)$. Então como a medida do lado maior de $B$ é $y$ e os triângulos menores são iguais, a medida do lado superior de $A$ é $5x$. Temos ainda que a medida do lado menor de $A$ é igual a $(x + y)$ e a base inferior de $A$ é igual a $4y$. Sabemos que a área total de $A$ é $720cm^2$. Então, temos que:

$$4y(x + y) = 720$$

e

$$4y = 5x$$

temos então um sistema:

$$x = \begin{cases} 4y(x + y) = 720 \\ 4y = 5x \end{cases}$$

Isolando $y$, obtemos:

$$y = \frac{5x}{4}$$

Substituindo a valor encontrado na primeira equação temos:

$$4\left(\frac{5x}{4}\right)\left(x + \frac{5x}{4}\right) = 720$$

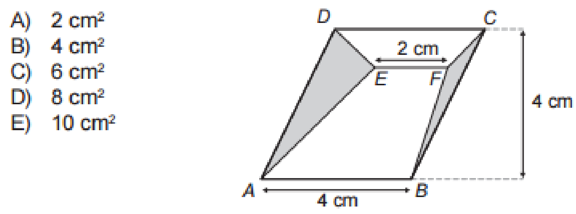
$$5x\left(\frac{9x}{4}\right) = 720$$

$$\frac{45x^2}{4} = 720$$

$$x^2 = \frac{720 \times 4}{45} \Rightarrow x = 8cmey = 10cm$$

Queremos saber qual é o perímetro (a soma dos lados) dos retângulos menores, que é dada por $x + y + x + y$, então:

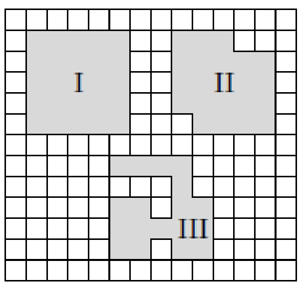
$$8 + 10 + 8 + 10 = 36cm$$

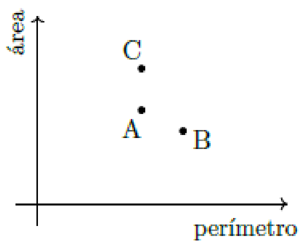



2. Na figura, $ABCD$ é um paralelogramo e o segmento $EF$ é paralelo a $AB$. Qual é a soma das áreas dos triângulos sombreados?

*Solução:* ALTERNATIVA B
Para achar a soma das áreas dos triângulos, basta calcular a área do paralelogramo $ABCD$ e subtrair as áreas dos trapézios $ABFE$ e $CDFE$. Seja $h$ a altura do trapézio $ABFE$; sua área é então $\dfrac{AB + EF}{2}h = 3hcm^2$. Como a altura do paralelogramo $ABCD$ é $4cm$, a altura do trapézio $CDFE$ é $4 - h$ e sua área é $\dfrac{CD + EF}{2}(4 - h) = 12 - 3hcm^2$. A área do paralelogramo $ABCD$ é $16cm^2$; a soma das áreas dos triângulos é então $16 - (3h + 12 - 3h) = 4cm^2$.

3. A figura mostra três polígonos desenhados em uma folha quadriculada. Para cada um destes polígonos foi assinalado, no plano cartesiano à direita, o ponto cujas coordenadas horizontal e vertical são, respectivamente, seu perímetro e sua área.




Qual é a correspondência correta entre os polígonos e os pontos?

(a) I → C, II → B, III → A

(b) I → B, II → A, III → C

(c) I → A, II → C, III → B

(d) I → A, II → B, III → C

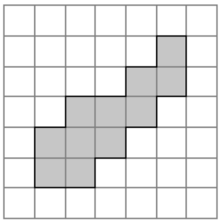
(e) I → C, II → A, III → B

*Solução:* Usando o lado $l$ de um dos quadradinhos do quadriculado como unidade de comprimento, a contagem direta na figura nos ddá as áreas e perímetros dos polígonos, conforme a tabela abaixo.

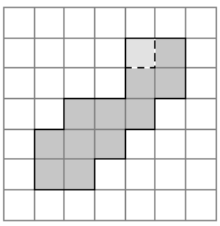
| Polígono | Perímetro (em $\ell$) | Área (em $\ell^2$) |
|---|---|---|
| I | 20 | $5 \times 5 = 25$ |
| II | 20 | $25 - 3 = 22$ |
| III | 30 | $25 - 7 = 18$ |

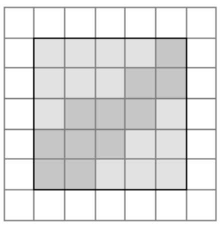
Deste modo, a correspondência que associa a cada polígono um par ordenado no plano cartesiano é $I \to (20, 25), II \to (20, 22), III \to (30, 18)$. Os pontos correspondentes a $I$ e $II$ têm a mesma abscissa (perímetro)logo estão na mesma reta vertical no plano cartesiano; como o pontocorrespondente a I tem ordenada (área) maior, ele é o que está mais acima. Logo $I \to C$ e $II \to A$. Resta $III \to B$.

4.Qual é a área da figura a seguir, usando como unidade a área de um quadrinho? Qual é o perímetro da figura? Quantos quadrinhos podem ser acrescentados à figura de modo a obter o máximo de área sem alterar o perímetro?



*Solução:* Contando diretamente os segmentos que compõem o contorno da figura vemos que ela tem perímetro igual a 20. Analisando, agora, a figura a seguir à esquerda vemos que se acrescentamos um quadradinho colado na figura, aumentamos a sua área em uma unidade, mas não alteramos o seu perímetro, pois só trocamos de lugar dois segmentos (pontilhados) que já faziam parte do contorno da figura. Podemos ir acrescentando estes quadradinhos até formar um quadrado de lado 5.Portanto, podemos acrescentar mais 14 quadradinhos na figura dada sem alterar o seu perímetro, como está indicado na figura a seguir à direita.





5.Miguilim brinca com dois triângulos iguais cujos lados medem $3cm, 4cm$ e $6cm$. Ele forma figuras planas unindo um lado de um triângulo com um lado do outro, sem que um triângulo fique sobre o outro. Abaixo vemos duas das figuras que ele fez.

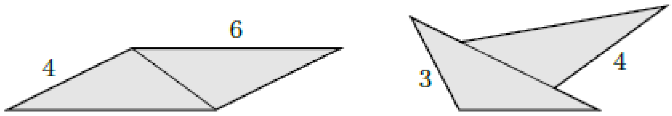
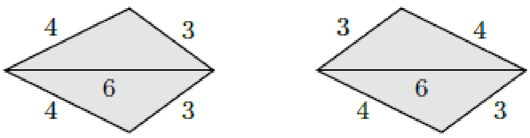



Figura I Figura II

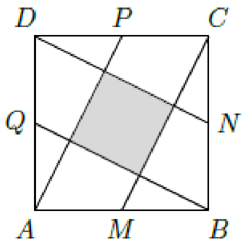
a Quais os comprimentos dos lados que foram unidos nas Figuras I e II?
*Solução:* Na Figura I, verificamos que as medidas de dois lados que não foram unidos são $4cm$ e $6cm$. Como os dois lados unidos são do mesmo tamanho, eles não podem medir nem $4cm$ nem $6cm$, logo medem 3 cm. Na Figura II, o triângulo que está mais acima tem um lado livre de $4cm$ e claramente o lado que foi unido ao triângulo debaixo é menor do que o lado livre não identificado.
Portanto, o lado do triângulo superior que foi unido ao debaixo mede $3cm$. No triângulo debaixo, claramente o maior lado foi unido ao lado do triângulo de cima. Este lado mede $6cm$.

b Calcule os perímetros das Figuras I e II.
*Solução:* Os lados de medida $3cm$ não fazem parte do perímetro da Figura I. Logo o perímetro da Figura I é igual a $2 \times (4 + 6) = 20cm$. O lado de $3cm$ de um triângulo e o pedaço de $3cm$ do lado maior do outro triângulo não fazem parte do perímetro da Figura II. Logo, o perímetro da Figura II é igual a $6 + 4 + 3 + 4 + (6 - 3) = 20cm$.

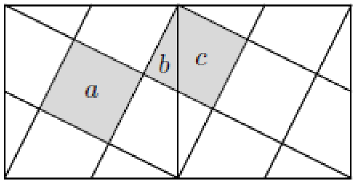
c Qual o menor perímetro de uma figura que Miguilim pode formar? Desenhe duas figuras que ele pode formar com este perímetro.
*Solução:* O perímetro de uma figura obtida quando se unem lados dos dois triângulos é igual à soma dos perímetros dos dois triângulos menos duas vezes o comprimento do menor dos lados que foram unidos. Assim, o perímetro da figura é o menor possível quando unirmos os dois lados de $6cm$; neste caso o perímetro é igual a $2 \times (3 + 4 + 6) - 2 \times 6 = 14cm$. As duas figuras abaixo têm perímetro mínimo.




6.Na figura a seguir, $ABCD$ é um quadrado de lado 10 e M, N, P e Q são pontos médios dos lados deste quadrado. Qual é a área do quadrado sombreado?




*Solução:* O quadrado $ABCD$ está dividido em um quadrado $a$, quatro triâgulos retângulos $b$ e quatro trapézios $c$. Reproduzindo a figura dada ao lado dela mesma, pode-se concluir que um triângulo retângulo $b$ e um trapézio $c$ formam juntos um quadrado $a$. Isto é, $a = b + c$.




Assim vemos que o quadrado $ABCD$ está dividido em regiões que podem ser reorganizadas para formarem 5 quadrados $a$. Portanto, a área do quadrado a é igual a um quinto da área do quadrado $ABCD$ e, portanto,a área do quadrado a é igual a $\dfrac{10 \times 10}{5} = 20$.

7. A Professora Clotilde desenhou três figuras no quadro negro, todas com área igual a $108cm^2$.

a A primeira figura é um retângulo que tem um lado de comprimento igual a $12cm$. Qual é o perímetro deste retângulo?

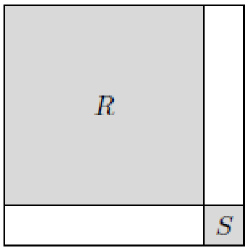
*Solução:* Primeiramente vamos lembrar que a área de um retângulo pode ser calculada como o produto dos comprimentos de dois lados adjacentes. No problema, como a área do retângulo é $108cm^2$ e um lado mede $12cm$, o comprimento do lado adjacente, deve ser um número que multiplicado por 12 tenha como resultado 108, ou seja, é $108 \div 12 = 9$. Assim, o perímetro do retângulo é $12 + 12 + 9 + 9 = 42cm$.

(B) A segunda figura é um retângulo dividido em um retângulo branco e um quadrado cinzento de área igual a $36cm^2$, como na figura. Qual é o perímetro do retângulo branco?

*Solução:*Como o quadrado cinza tem área igual a $36cm^2$, o comprimento de seu lado é um número cujo quadrado é 36, ou seja, é igual $6cm$.Logo o retângulo maior tem um lado de comprimento $6cm$; como sua área é $108cm^2$, segue que seu outro lado mede $108 \div 6 = 18cm$. Logo um lado do

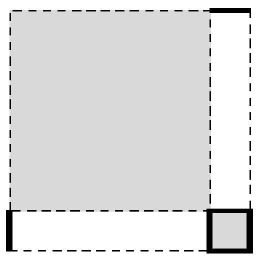
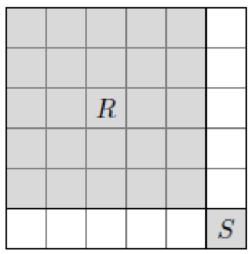

retângulo branco mede $6cm$ e o outro mede $18 - 6 = 12cm$, e assim seu perímetro é $12 + 12 + 6 + 6 = 36cm$.
Pode-se também argumentar que a área do retângulo branco é $108 - 36 = 72cm^2$. Como um de seus lados mede $6cm$, o outro mede então $72 \div 6 = 12cm$; o restante da solução segue como acima.

c A terceira figura é um quadrado, que ela dividiu em dois retângulos brancos e dois quadrados cinzentos R e S, como na figura. O perímetro de um dos retângulos é três vezes o perímetro do quadrado S. Qual é a área do quadrado R?




*Solução:* Na figura a seguir, marcamos os lados do quadrado $R$ em pontilhado e os lados do quadrado $S$ em traço mais grosso. Para simplificar, vamos nos referir ao comprimento de um segmento grosso apenas como *grosso*, e do mesmo modo para *pontilhado*. O perímetro do quadrado $S$ é igual a quatro grossos. Observamos que os retângulos brancos são iguais, pois têm os mesmos lados, e seu perímetro é igual a dois grossos mais dois pontilhados. Por outro lado, o enunciado diz que o perímetro de um destes retângulos é igual a três vezes o perímetro de $S$, isto é, igual a doze grossos. Logo, os dois pontilhados devem ser iguais a dez grossos, ou seja, cada pontilhado é igual a cinco grossos.

Notamos agora que um lado do quadrado grande é igual a um grosso mais um pontilhado, ou seja, é igual a seis grossos. Podemos então decompor o quadrado grande em $6 \times 6 = 36$ quadradinhos iguais ao quadrado $S$, como na figura a seguir. Como a área do quadrado maior é igual a $108cm^2$, a área de um destes quadradinhos é igual a $108 \div 36 = 3cm^2$. Finalmente, o quadrado $R$ consiste de $5 \times 5 = 25$ quadradinhos e então sua área é igual a$25 \times 3 = 75cm^2$.

 
R
S