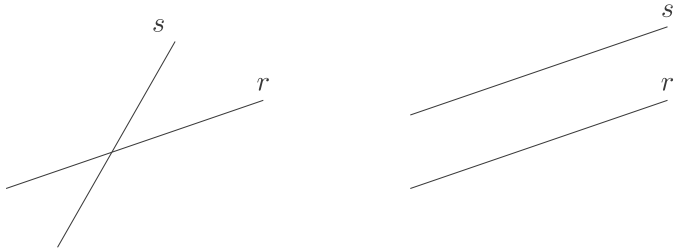
ENCONTRO 6

Os principais assuntos e os vídeos relacionados da parte de Geometria do canal PICOBMEP no YouTube que serão estudados neste encontro são:

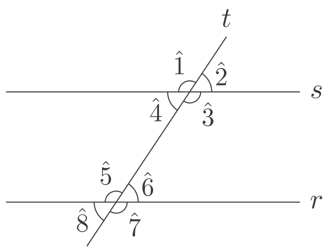
Assuntos	**Vídeos de Geometria: PICOBMEP no YouTube**
Posição relativa de duas retas. Retas paralelas cortadas por uma transversal: ângulos correspondentes, ângulos alternos internos, ângulos alternos externos, etc.	4, 15, 16, 17
Uma demonstração para o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo. Teorema do Ângulo Externo.	18
A circunferência e seus elementos: centro, raio, diâmetro, corda, arco.	43
Construção e caracterização de alguns lugares geométricos básicos com o objetivo de reforçar as definições de círculo, mediatriz, bissetriz, retas paralelas, etc.	28
Apresentação dos pontos notáveis de um triângulo (se possível utilizar um *software* de geometria dinâmica).	30, 31, 32, 38, 39

6.1 Retas paralelas cortadas por uma transversal

Por dois pontos distintos no plano passa uma e somente uma reta. Deste modo, dadas duas retas distintas no plano, ou elas possuem um único ponto em comum, ou elas não possuem ponto em comum. No primeiro caso elas são chamadas de **concorrentes** e no segundo caso elas são **paralelas**. Na figura a seguir vemos, respectivamente duas retas concorrentes e duas retas paralelas r e s. Observamos que as posições relativas entre retas estão discutidas no vídeo 4 da parte de Geometria do canal PICOBMEP no YouTube.



Agora vamos considerar duas retas no plano, como as retas r e s representadas na figura anterior à direita. Analisando uma figura como esta, se nada foi dito previamente sobre as retas r e s, podemos concluir que as retas r e s são paralelas? Pense sobre isso e observe que como as retas são infinitas e vemos apenas uma pequena parte delas, então é impossível concluir se elas são paralelas ou concorrentes através da análise de uma ilustração. Para decidir sobre qual é a posição relativa de r e s é necessário obter alguma informação geométrica mais precisa. Uma maneira de fazer isso é traçar uma reta t transversal às retas r e s. Na figura a seguir vemos exatamente esta situação, onde estão ilustradas duas retas r e s ambas cortadas por uma reta transversal t.

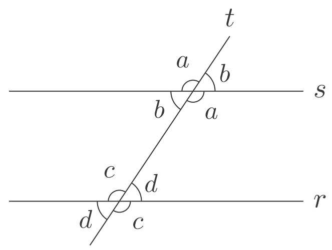


Para caracterizar o paralelismo das retas r e s, vamos comparar os ângulos formados pelas retas r e t com os ângulos formados pelas retas s e t. Para a comparação de dois desses ângulos, dependendo se eles estão de um mesmo lado da transversal t e dependendo se eles estão entre as retas r e s (interior) ou se eles não estão entre as retas r e s (exterior) é utilizada a seguinte nomenclatura (veja o vídeo 15 da parte de Geometria do canal PICOBMEP no YouTube).

- Os ângulos $\hat{2}$ e $\hat{6}$ são correspondentes.
- Os ângulos $\hat{3}$ e $\hat{5}$ são alternos internos.
- Os ângulos $\hat{1}$ e $\hat{7}$ são alternos externos.
- Os ângulos $\hat{3}$ e $\hat{6}$ são colaterais internos.
- Os ângulos $\hat{2}$ e $\hat{7}$ são colaterais externos.

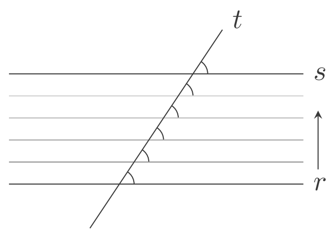
Nesta figura existem outros pares de ângulos correspondentes, alternos internos, alternos externos, etc. O que importa é a posição relativa dos dois ângulos analisados. Por exemplo, os ângulos $\hat{4}$ e $\hat{8}$ são correspondentes, pois ambos estão de um mesmo lado da reta t e ambos estão abaixo das retas r e s. Já os ângulos $\hat{4}$ e $\hat{6}$ são alternos internos, pois cada um deles está de um lado da reta t e ambos estão entre as retas r e s. No Exercício 1 desta seção, procedendo de modo análogo, você será convidado a classificar outros pares de ângulos desta mesma figura.

Como ângulos opostos pelo vértice possuem a mesma medida, de fato, na figura anterior podem aparecer apenas 4 ângulos diferentes, indicados com as letras a, b, c e d na figura a seguir.



Vamos analisar agora o paralelismo das retas r e s em termos destes ângulos a, b, c e d.

Movendo paralelamente uma reta r ao longo de uma reta transversal t, vemos que os ângulos que r formam com t não se modificam ao longo deste movimento (veja figura a seguir). Assim se r e s são retas paralelas cortadas por uma reta transversal t, então os ângulos entre r e t são iguais aos respectivos ângulos entre s e t. Logo, ângulos correspondentes são iguais, ângulos alternos internos são iguais e assim por diante. Além disso, por outro lado, podemos mostrar que, quando os ângulos entre r e t possuem as mesmas medidas dos respectivos ângulos entre as retas s e t, então as retas r e s são paralelas. Deste modo, em relação a figura anterior, dizer que as retas r e s são paralelas é o mesmo que dizer que $a = c$ e $b = d$.

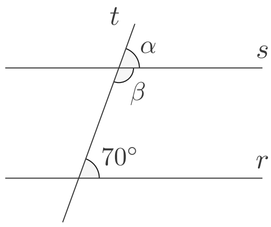


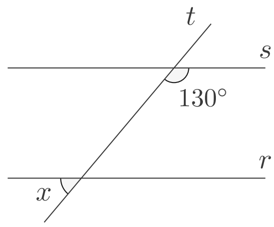
Resumindo, podemos enunciar o seguinte resultado que caracteriza quando duas retas são paralelas através da comparação dos ângulos formados por estas retas e uma terceira reta transversal.

Teorema: *No plano sejam r e s duas retas cortadas por uma transversal t. As retas r e s são paralelas quando elas determinam com a reta t ângulos correspondentes (ou ângulos alternos internos) de mesma medida.*

Vamos utilizar este teorema na solução de alguns exemplos.

Exemplo 1: Em cada uma das figuras a seguir, observando os ângulos entre as retas paralelas r e s com a transversal t, calcule as medidas dos ângulos indicados por letras.



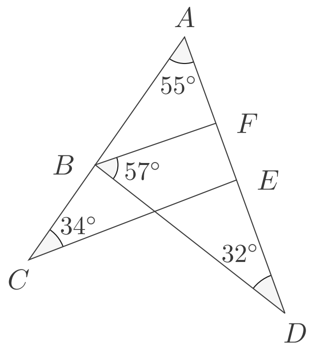


Solução. Na figura da esquerda os ângulos $70°$ e α são ângulos correspondentes. Como as retas r e s são paralelas, estes ângulos possuem a mesma medida e assim $\alpha = 70°$. Agora observe que os ângulos α e β são ângulos suplementares. Daí $\beta = 180° - \alpha = 180° - 70° = 110°$. Nesta figura os ângulos $70°$ e β são ângulos colaterais internos. Observe que na solução deste exercício mostramos que ângulos colaterais internos de retas paralelas cortadas por uma transversal são ângulos suplementares.

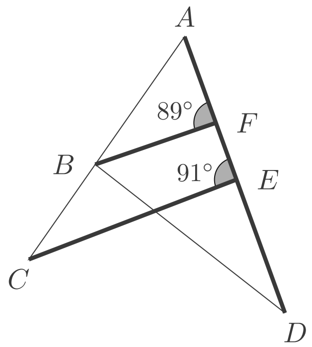
Para a outra figura observe, à esquerda do ângulo de $130°$, o seu ângulo suplementar $50° = 180° - 130°$. Os ângulos $50°$ e x são ângulos correspondentes. Daí, como as retas r e s são paralelas e neste caso ângulos correspondentes possuem a mesma medida, podemos concluir que $x = 50°$.

"geometria˙diagra
2015/7/22
page 55
Estilo OBMEP

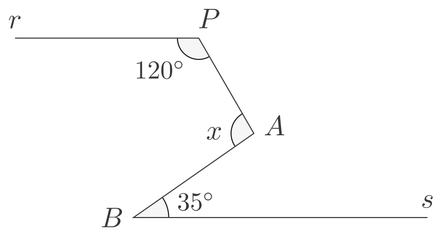
Exemplo 2: Na figura a seguir, os pontos A, F, E e D estão alinhados assim como os pontos A, B e C também estão alinhados. As retas CE e BF são paralelas?



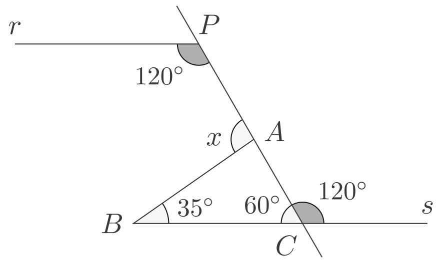
Solução. No triângulo BFD vemos que $B\hat{F}D = 180° - (57° - 32°) = 91°$. Daí segue que $B\hat{F}A = 180° - 91° = 89°$. E no triângulo CEA vemos que $C\hat{E}A = 180° - (34° + 55°) = 91°$. Como as retas CE e BF possuem ângulos correspondentes $B\hat{F}A = 89°$ e $C\hat{E}A = 91°$ diferentes quando cortadas pela transversal AD, segue que elas não são retas paralelas.



Exemplo 3: Na figura a seguir, as retas r e s são paralelas. Qual é a medida do ângulo x?

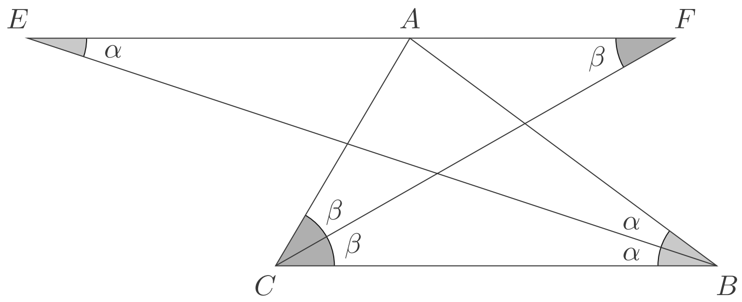


Solução. Prolongue o segmento PA até ele encontrar a reta s em um ponto C. Como as retas r e s são paralelas, podemos identificar os dois ângulos alternos internos de 120° indicados na figura a seguir.



Olhando o ângulo raso no vértice C, concluímos que $A\hat{C}B = 60°$, pois este é o suplementar do ângulo adjacente de 120°. No triângulo ABC, x é ângulo externo não adjacente aos ângulos internos de 35° e de 60°. Daí $x = 35° + 60° = 95°$.

Exemplo 4: (Banco de Questões 2011 – Nível 2 – questão 55) Seja ABC um triângulo com $AB = 13$, $BC = 15$ e $AC = 9$. Seja r a reta paralela a BC traçada por A. A bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$ corta a reta r em E e a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ corta r em F. Calcular a medida do segmento EF.



Solução. Como a reta EF é paralela ao lado BC, os ângulos alternos internos gerados pela transversal CF são iguais, isto é, $F\hat{C}B = C\hat{F}A$. Por outro lado, como CF é bissetriz, temos que $F\hat{C}B = F\hat{C}A$ e assim, $F\hat{C}A = C\hat{F}A$, donde o triângulo CAF é isósceles de base CF. Portanto, $AF = AC = 9$.

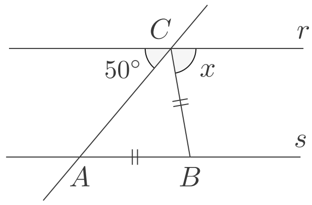
Analogamente, concluímos que o triângulo BAE é isósceles de base BE e $AE = AB = 13$. Assim, $EF = EA + AF = 13 + 9 = 22$.

Exercícios:

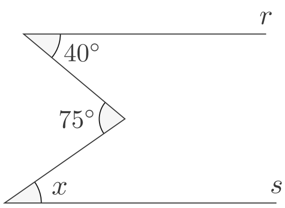
1. Observando a figura da página 51, em cada item classifique os pares de ângulos como: ângulos correspondentes, ângulos alternos internos, ângulos alternos externos, ângulos colaterais internos ou colaterais externos.

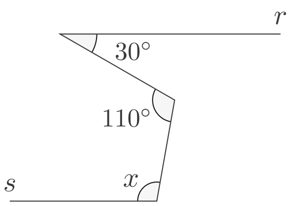
   (a) ângulos $\hat{4}$ e $\hat{5}$.
   (b) ângulos $\hat{3}$ e $\hat{7}$.
   (c) ângulos $\hat{2}$ e $\hat{8}$.
   (d) ângulos $\hat{4}$ e $\hat{6}$.
   (e) ângulos $\hat{1}$ e $\hat{8}$.

2. Na figura a seguir, as retas r e s são paralelas. Se $\overline{AB} = \overline{CB}$, determine a medida do ângulo x.

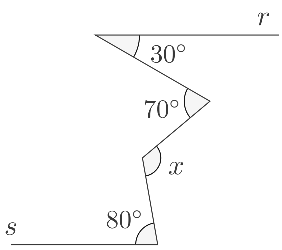


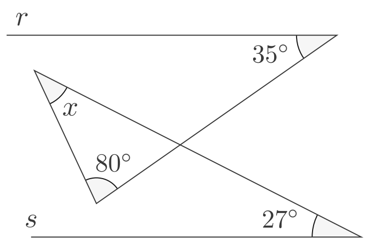
3. Em cada figura, determine a medida do ângulo x sabendo que as retas r e s são paralelas.



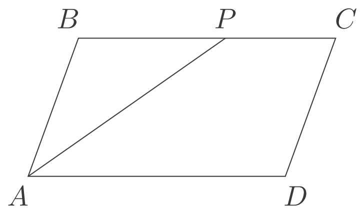


4. Determine a medida do ângulo x sabendo que as retas r e s são paralelas.

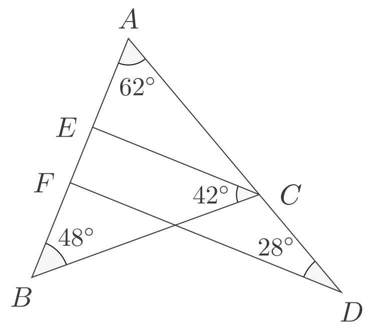




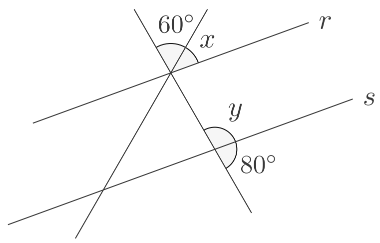
5. Sendo $ABCD$ um paralelogramo, AP bissetriz do ângulo $\hat{A}$, $\overline{AB} = 7$ cm e $\overline{PC} = 3$ cm, determine o perímetro do paralelogramo.



6. (Banco de Questões 2010, Nível 2, problema 61, página 46) Na figura dada, as retas EC e FD serão paralelas?



7. (Banco de Questões 2010, Nível 2, problema 74, página 48) Sabe-se que as retas r e s são paralelas. Determine as medidas dos ângulos x e y.



8. (Banco de Questões 2010, Nível 2, problema 89, página 50) O quadrilátero $ABCD$ da figura é um paralelogramo?