Material Teórico - Módulo de Princípios Básicos de Contagem

Arranjos e Combinações Simples

Segundo Ano do Ensino Médio

Prof. Fabrício Siqueira Benevides

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Arranjos e Combinações

O objetivo dessa aula é apresentar os conceitos de *arranjo* e de *combinação*, assim como exibir vários problemas de contagem onde esses conceitos podem ser utilizados. Para isso, utilizaremos todas as ferramentas que aprendemos nas três primeiras aulas desse módulo.

Ao longo dessa seção, n e r representam inteiros não negativos tais que $0 \leq r \leq n$.

Vejamos primeiro a definição de arranjo.

Um *arranjo* (simples) de n elementos (distintos), tomados r a r, é qualquer maneira de listar ordenadamente r elementos, tomados dentre os n elementos dados. Escreveremos $A_{n,r}$ para indicar a quantidade de arranjos simples de n elementos, tomados r a r.

No caso em que $r = 0$, adotaremos a convenção de que $A_{n,0} = 1$, pois isso será coerente com a fórmula geral que iremos encontrar logo mais para $A_{n,r}$, quando $1 \leq r \leq n$. Utilizando o princípio fundamental da contagem (PFC), podemos encontrar o valor $A_{n,r}$. Façamos primeiro um exemplo, o qual é bastante simples quando comparado a problemas resolvidos em aulas anteriores.

Exemplo 1. *Quantos número de 3 dígitos distintos podemos formar nos quais seus dígitos são tomados do conjunto* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Solução. Para montarmos um número de 3 dígitos, basta escolhermos os algarismos das centenas, dezenas e unidades. Assim, observe que temos de escolher 3 elementos distintos dentre os 7 elementos de A e a ordem em que os elementos são escolhidos é relevante. De acordo com a definição de arranjo que vimos acima, temos $A_{7,3}$ maneiras de fazer a escolha dos 3 números. Mas quanto vale $A_{7,3}$? Ora, temos 7 possíveis valores para escolher para o primeiro dígito (centenas) e, após esse ser escolhido, restam 6 possíveis valores para o segundo dígito (dezenas); por fim, descontados os valores escolhidos para os dois primeiros dígitos, teremos 5 possíveis valores para a escolha do terceiro dígito. Logo, pelo PFC, temos que

$$A_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$$

□

Usando o mesmo raciocínio do exemplo anterior para montar um arranjo de n elementos escolhidos r a r, temos: n possíveis escolhas para o 1º elemento, $n-1$ possíveis escolhas para o 2º elemento, e assim por diante, até $(n-(r-1)) = n-r+1$ possíveis escolhas para o r-ésimo elemento, pois, no momento da escolha do r-ésimo elemento, já foram escolhidos outros $r-1$ elementos. Pelo PFC, segue que

$$A_{n,r} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1),$$

ou seja, $A_{n,r}$, é o produto dos r maiores números inteiros que são menores ou iguais a n.

Exemplo 2. *Calcule o valor de* $A_{12,4}$.

Solução. De acordo com a discussão acima, o valor de $A_{12,4}$ é obtido como o produto de 4 números, onde começamos com o número 12 e diminuímos uma unidade a cada fator. Assim

$$A_{12,4} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11.880.$$

□

Usando o que aprendemos sobre o fatorial de inteiros não negativos, podemos expressar $A_{n,r}$ do seguinte modo alternativo:

$$\begin{aligned} A_{n,r} &= n(n-1)\ldots(n-r+1) \\ &= \frac{n(n-1)\ldots\cdot(n-r+1)\cdot(n-r)!}{(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!}. \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever de modo mais compacto:

$$\boxed{A_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}.} \qquad (1)$$

Exemplo 3. *Calcule o valor de* $A_{12,4}$ *usando a equação* (1).

Solução. Temos que

$$A_{12,4} = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 11.880.$$

□

Exemplo 4. *Observando a fórmula (1), obtemos os seguintes casos notáveis:*

$$\begin{aligned} A_{n,1} &= n, \\ A_{n,2} &= n(n-1), \\ A_{n,3} &= n(n-1)(n-2). \end{aligned}$$

Exemplo 5. *Uma pessoa tem uma caixa com 10 livros guardados e possui uma prateleira onde cabem apenas 4 deles. De quantos modos ela pode escolher 4 dos 10 livros e colocá-los em uma pilha sobre a prateleira?*

Solução. O número de maneiras de fazer isso é precisamente $A_{10,4}$, já que devemos escolher 4 elementos dentre 10 e a ordem em que esses elementos forem escolhidos é relevante, uma vez que ela determinará a ordem em que os livros serão empilhados. Assim, a resposta é:

$$A_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

□

Observe que o exemplo anterior poderia ter sido resolvido, tão facilmente quanto, usando diretamente o PFC, sem a necessidade de lembrarmos a fórmula para $A_{n,r}$. Por isso mesmo, o tema "arranjos" acaba não recebendo um enfoque muito grande dentro no estudo de problemas de contagem. Contudo, é importante conhecê-lo, especialmente para entender sua relação com o importante conceito de *combinação*, o qual enunciamos a seguir.

> Uma *combinação (simples)* de n elementos (distintos), tomados r a r, é qualquer escolha de r elementos dentre os n elementos dados. Em uma combinação, apenas o conjunto dos elementos escolhidos é relevante, de modo que a ordem em que eles forem tomados não importa. Escrevemos $C_{n,r}$ para indicar a quantidade de combinações de n elementos, tomados r a r.

No caso em que $r = 0$, definimos $C_{n,0} = 1$, de forma semelhantes ao que havíamos feito com arranjos. Observamos também que, no lugar de escrevemos "combinação de n elementos escolhidos r a r" é comum escrevermos apenas "combinação de n escolhe r" (ainda que o Português de tal frase careça de correção) ou, ainda, falarmos diretamente de uma "escolha de r elementos dentre n".

Agora, vejamos como encontrar uma fórmula para $C_{n,r}$. Assim como fizemos com o $A_{n,r}$, tomaremos por base um exemplo simples, para depois generalizá-lo.

Exemplo 6. *Dentre um grupo de 7 pessoas, de quantas formas podemos montar uma equipe de 3 pessoas para realizar uma tarefa?*

Solução. Assim como no Exemplo 1, temos aqui um conjunto de 7 elementos e gostaríamos de escolher 3 elementos distintos dentre eles. A diferença fundamental é que, agora, a ordem em que os 3 elementos são escolhidos para participar de equipe é irrelevante. De outra forma, estamos interessados apenas em quem serão os membros da equipe, e não em que ordem eles serão escolhidos. Queremos, então, determinar o número de combinações de 7 escolhidos 3 a 3, ou seja, $C_{7,3}$.

Vamos supor, por um momento, que a equipe seja montada através de um sorteio, da seguinte forma: os nomes das pessoas são escritos em papeizinhos e colocados em uma urna; iniciamos sorteando um nome qualquer dessa urna (removendo um papelzinho da mesma); em seguida, sorteiamos um segundo nome dentre os 6 restantes e, por fim, sorteamos um terceiro nome, dentre os 5 restantes. Veja que estamos realizando três escolhas e que, pelo princípio fundamental da contagem, o total de possíveis resultados para essa sequência de três sorteios é igual a $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$. De outra forma, podemos notar também que esse número é igual a $A_{7,3}$, já que estamos montando uma lista ordenada com os 3 nomes.

Porém, isso ainda não resolve a questão. Temos um problema! Os membros de uma mesma equipe podem ser sorteados de várias maneiras diferentes, o que indica que o número de possíveis equipes não é igual ao número de resultados para os sorteios. Por exemplo, a equipe composta pelas pessoas A, B e C, pode ser montada como resultado de um sorteio onde o primeiro nome escolhido foi o de A, seguido pelo de B e depois o de C; mas pode também ter sido montada escolhendo-se essas pessoas na ordem B, A, C, ou seguindo qualquer outra permutação de $\{A, B, C\}$. Na verdade, para qualquer equipe (com 3 pessoas), os nomes de seus membros podem ter sido sorteados de exatamente $3! = 6$ maneiras diferentes, que é o número de maneiras de permutar os 3 nomes. Dessa forma, temos que dividir a quantidade de sorteios por 6 para obter o número de possíveis equipes. Assim, o número de equipes é igual a $210/6 = 35$, de sorte que $C_{7,3} = 35$. □

Para obter uma fórmula geral para $C_{n,r}$, podemos adotar o mesmo procedimento do exemplo acima. Queremos contar quantos são os conjuntos de r elementos, escolhidos dentre n elementos distintos dados. Podemos montar um tal conjunto de r elementos escolhendo (ou, se você preferir, *sorteando*) seus elementos um a um. Assim, primeiro montamos uma lista ordenada com r elementos, o que pode ser feito de $A_{n,r}$ maneiras. Acontece que cada conjunto de r elementos será obtido a partir de exatamente $r!$ dessas listas, uma vez que $r!$ é, como sabemos, o número de maneiras de montar uma lista com os r elementos do conjunto. Dessa forma, a quantidade de conjuntos com r elementos, escolhidos dentre os n elementos dados, é igual a $A_{n,r}/r!$. Concluímos, então, que:

$$\boxed{C_{n,r} = \frac{A_{n,r}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.}$$

Observamos que autores de diferentes livros costumam usar diferentes notações para $A_{n,r}$ e para $C_{n,r}$. Por exemplo, C_n^r, ou ainda ${}_nC_r$, ou até mesmo mesmo C_r^n, entre outras, às vezes são usadas no lugar de $C_{n,r}$. Assim, você deve ficar atento ao contexto, caso leia sobre isso em outros textos. Por outro lado, uma notação extremamente importante e que não possui ambiguidades é a de número binomial.

Dados inteiros não negativos n e r, com $0 \le r \le n$, o número binomial n escolhe r, representado por $\binom{n}{r}$, tem o mesmo valor de $C_{n,r}$, ou seja,

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \tag{2}$$

Exemplo 7. *Destacamos aqui como fica a equação* (2) *nos casos em que* $r = 0, 1, 2, 3$, *já que estes valores aparecem com bastante frequência:*

$$\binom{n}{0} = 1,$$
$$\binom{n}{1} = n,$$
$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$
$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Exemplo 8. *Em um campeonato de futebol com 6 times, cada time jogou exatamente uma vez contra cada um dos outros. Quantos jogos aconteceram?*

Solução. Claramente, a quantidade de jogos que aconteceram é igual ao número de maneiras de escolhermos 2 times dentre os 6. Esse número é igual a

$$C_{6,2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$$

Uma prova direta é a seguinte: o primeiro time de um jogo pode ser escolhido de 6 maneiras, ao passo que o segundo pode ser escolhido de 5 maneiras. Isso nos daria, pelo PFC, $6 \cdot 5$ pares de times. Entretanto, a ordem em que os times que compõem um par forem escolhidos não é relevante, pois, ainda que invertamos essa ordem, teremos a mesma partida. Por isso temos que dividir o resultado por 2, obtendo 15 jogos. □

Vejamos uma propriedade útil dos números binomiais.

Exemplo 9. *Para todos os inteiros não negativos* n *e* r, *com* $0 \le r \le n$, *vale que*

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

Demonstração 1. Igualdades desse tipo normalmente podem ser provadas de duas maneiras. A primeira delas, que veremos agora, é simplesmente manipulando a expressão algebricamente, ou seja, usando a fórmula e "fazendo as contas". Se $s = n - r$, então $r = n - s$ e, assim,

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!s!} = \frac{n!}{(n-s)!s!} = \binom{n}{s} = \binom{n}{n-r}.$$

□

Demonstração 2. A segunda maneira de demonstrar a validade da igualdade original é pensar na interpretação combinatória dos números envolvidos. Para tanto, seja A um conjunto com n elementos, e lembre-se de que $\binom{n}{r}$ representa o número subconjuntos de A que possuem r elementos. Acontece que, ao escolhermos os r elementos para formar nosso subconjunto, digamos X, estamos também, automaticamente, gerando um subconjunto Y de $n-r$ elementos, que é o conjunto dos elementos que não foram escolhidos para X, ou seja, Y é o complementar de X em A. Reciprocamente, todo subconjunto Y de A, com $n-r$ elementos, determina unicamente um subconjunto X de A, este com $n-(n-r) = r$ elementos, o qual também coincide com o complementar de Y em A. Dessa forma, estabelecemos uma correspondência biunívoca entre os subconjuntos X de A, com r elementos cada, e os subconjuntos Y de A, com $n-r$ elementos cada. Portanto, as quantidades de subconjuntos de A com r elementos e com $n-r$ elementos são iguais. Mas isso é o mesmo que $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$. □

Outra forma de enunciar o exemplo anterior é: para r, s inteiros não negativos, vale que:

$$r + s = n \implies \binom{n}{r} = \binom{n}{s}.$$

Exemplo 10. *Um professor elaborou uma lista de exercícios com 10 questões e pediu que um aluno escolhesse 7 delas para resolver. De quantas formas o aluno pode escolher o conjuntos de questões que vai resolver?*

Solução. Pela própria definição, o número de maneiras de escolher 7 questões dentre as 10 dadas é igual a $C_{10,7}$ (veja que a ordem em que as questões forem escolhidas não importa). Dessa forma, a resposta é:

$$C_{10,7} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120.$$

□

Ainda em relação ao exemplo anterior, poderíamos ter usado o Exemplo 9 para obter que $C_{10,7} = C_{10,3}$ e, em seguida, a última igualdade listada no Exemplo 7 para chegar à resposta basicamente "de cabeça".

2 Codificando subconjuntos de um conjunto usando anagramas

Ao longo desta seção, denotamos por I_n o conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Existe uma maneira bastante natural de representar um subconjunto de I_n através uma sequência de n símbolos, onde cada símbolo assume um entre dois valores possíveis, por exemplo, S ou N. Dado um subconjunto B de I_n, para construir a sequência que o codifica, basta percorrer a lista dos elementos de I_n em ordem crescente e, para cada um deles, perguntar se ele pertence ou não pertence ao conjunto B. Caso a resposta seja *sim*, escrevemos o símbolo S na lista e, caso a resposta seja *não*, escrevemos N. (Por exemplo, se B é o subconjunto $\{2, 5, 8\}$ de I_9, então B será codificado pela sequência: NSNNSNNSN (pois 1 não pertence a B, 2 pertence a B, 3 não pertence, 4 não pertence, e assim por diante).) Observe agora que, dada uma sequência desse tipo, também podemos facilmente reconstruir o subconjunto de I_n que a gerou. (No exemplo acima, isso equivaleria a, partindo da sequência NSNNSNNSN, obter o conjunto B, o que é imediato.) Dessa forma, a quantidade de subconjuntos de I_n é igual à quantidade total de sequências com n símbolos, onde cada símbolo pode assumir um entre dois valores. Pelo PFC, segue que o número total de tais sequências é igual a $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ vezes}} = 2^n$. Isso mostra que o total de subconjuntos de I_n é igual a 2^n.

Agora, o que acontece se nos restringirmos apenas a subconjuntos de I_n que possuem r elementos, onde r é um número fixo? A quantidade de tais subconjuntos é, por definição, igual a $\binom{n}{r}$. Mas veja que esses subconjuntos são precisamente aqueles cujo *código* (conforme definido acima) possui exatamente r cópias do símbolo S e $n-r$ cópias do símbolo N. Assim, esses subconjuntos são aqueles cujo código corresponde a um anagrama de

$$\underbrace{\mathsf{SS\ldots S}}_{r \text{ vezes}}\underbrace{\mathsf{NN\ldots N}}_{n-r \text{ vezes}}.$$

Por outro lado, sabemos que o número de tais anagramas é igual a $P^n_{r,n-r}$. Então, como tanto $\binom{n}{r}$ quanto $P^n_{r,n-r}$ representam a quantidade de subconjuntos de I_n com r elementos, concluímos que

$$\binom{n}{r} = P^n_{r,n-r}.$$

Na verdade, isso não é surpresa alguma, pois ambos os lados da igualdade acima correspondem a $\frac{n!}{r!(n-r)!}$. Mas isso nos fornece um prova alternativa para a equação (2).

Veja também que se variarmos o valor de r de zero até n e calcularmos o valor da soma das parcelas do tipo $\binom{n}{r}$, o resultado obtido será:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

De fato, ao fazermos a soma do lado esquerdo, estaremos calculando quantos subconjuntos de I_n possuem 0 elementos, depois quantos possuem 1 elementos, quantos possuem 2 elementos, e assim por diante, e, em seguida, somando esses valores. Como todo subconjunto de I_n possui uma quantidade de elementos de 0 a n elementos, ao fazermos essa soma estamos contando o total de subconjuntos de I_n, que é igual a 2^n.

Exemplo 11. *Temos um grupo de 11 pessoas, a partir do qual será montado time de futebol. Sabendo que o time possuirá 1 goleiro, 4 zagueiros, 3 meio campistas e 3 atacantes, determine de quantas maneiras podemos atribuir essas funções às 11 pessoas do grupo.*

Solução 1. Seja $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_{11}\}$ o conjunto das 11 pessoas. Usaremos a letras G (goleiro), Z (zagueiro), M (meio campista) e A (atacante) para designar as funções das pessoas no time. Podemos montar uma lista com 11 dessas letras, indicando qual função é ocupada por cada pessoa do conjunto, de forma que a primeira letra indica a função de P_1, a segunda indica a função de P_2, e assim por diante. Por exemplo, AGAAMZZZMZM indica que P_1 é atacante, P_2 é goleiro, P_3 é atacante, e assim por diante.

Em nosso problema, temos que respeitar a condição de que, em uma tal sequência, deve haver uma letra G, quatro letras Z, três letras M e três letras A. Assim, para resolver o problema, basta calcular o número de anagramas de GZZZZMMMAAA, o que é igual a:

$$P^{11}_{1,4,4,3} = \frac{11!}{1!4!3!3!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{(3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2)} = 46.200.$$

□

Solução 2. Também podemos resolver esse problema usando combinações. Veja que temos $C_{11,1} = 11$ maneiras de escolher quem será o goleiro. Uma vez feito isso, dentre as 10 pessoas restantes teremos $C_{10,4} = 210$ maneiras de escolher os 4 zagueiros. Depois, teremos $C_{6,3} = 20$ maneiras de escolher os 3 meio campistas dentre os 6 jogadores restantes. Por fim, teremos $C_{3,3} = 1$ maneira de escolher os 3 atacantes dentre os jogadores restantes, uma vez que sobraram apenas 3 jogares. Portanto, pelo PFC, o número de maneiras de montarmos o time é igual a:

$$11 \cdot 210 \cdot 20 \cdot 1 = 46.200$$

□

Observe que o último cálculo da segunda solução do exemplo anterior poderia ter sido executado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\binom{11}{1}\binom{10}{4}\binom{6}{3}\binom{3}{3} &= \frac{11!}{1! \cdot \cancel{10!}} \frac{\cancel{10!}}{4! \cdot \cancel{6!}} \frac{\cancel{6!}}{3! \cdot \cancel{3!}} \frac{\cancel{3!}}{3! \cdot 0!} \\ &= \frac{11!}{1!4!3!3!}.\end{aligned}$$

Daí, concluímos, sem a necessidade de refazer os cálculos, que a resposta obtida utilizando a Solução 2 é igual à resposta obtida utilizando a Solução 1.

Deixamos para o leitor, como exercício, justificar a seguinte generalização (o que pode ser feito de forma algébrica ou combinatória).

Problema 12. *Mostre que se $n, n_1, n_2, \ldots, n_k$ são inteiros não negativos tais que $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ então:*

$$P^n_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n_k}{n_k}.$$

Em vista do resultado acima, podemos introduzir o conceito número multinomial.

> Dados inteiros não negativos n, n_1, n_2, $\ldots$, n_k, tais que $n = n_1+n_2+\ldots+n_k$ definimos o número multinomial n escolhe $n_1, n_2, \ldots, n_k$ como:
>
> $$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!},$$
>
> o qual é igual a $P^n_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$.

3 Aplicações em problemas

Nessa seção, cabe ao leitor tentar antecipar quando devemos usar 'arranjos' e quando usar 'combinações' para resolver um problema.

Exemplo 13. *Considerando um grupo de 20 pessoas que participam de um conselho consultor de uma empresa, calcule:*

(a) O número de maneiras de escolher um presidente, um vice-presidente e um diretor para o conselho.

(b) O número de maneiras de montar uma equipe de 4 pessoas do conselho para realizar uma tarefa.

Solução.

(a) Devemos escolher 3 pessoas dentre as 20, mas veja que o papel dessas 3 pessoas não é simétrico, posto que elas irão desempenhar funções diferentes. Logo, a ordem em que elas serão escolhidas é relevante, de forma que o número de maneiras de realizar as escolhas é igual a:

$$A_{20,3} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6.840.$$

(b) Nessa caso, basta escolhermos 4 dentre as 20 pessoas, pois a ordem das escolhas não é relevante para determinar a equipe escolhida. Assim, o número de maneiras é igual a:

$$C_{20,4} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 4.845.$$

□

Exemplo 14. *Um cartão da Mega-Sena contém um conjunto de 60 números, de 1 até 60. Um jogo consiste em uma escolha de 6 números desse cartão. Contudo, o jogador tem a opção de marcar mais do que 6 números. Ao fazer isso, ele estará apostando em todos os jogos que podem ser formados com 6 números do conjunto dos números marcados. Atualmente, o preço para apostar em um jogo é R\$ 3,50. Assim, ao marcar uma quantidade maior de números em um cartão, o jogador irá pagar por todos os jogos que podem ser formados com os números escolhidos.*

(a) Qual o total de jogos da Mega-Sena?

(b) Caso um apostador marque 9 números do cartão, quanto ele irá pagar e qual será a sua chance de ganhar?

Solução. Para o item (a), de acordo com a definição de 'jogo', a resposta claramente é

$$C_{60,6} = \frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 50.063.860.$$

É interessante observar que o prêmio da mega-sena costuma ser por volta de 2 milhões de reais. Assim, o valor de ganho esperado ao apostar é de 2.000.000/50.063860, que é aproximadamente R\$ 0,04. Ou seja, é bem menor do que o valor da aposta.

Vejamos, agora, o item (b). Ao marcar 9 números da cartela, o jogador estará apostando em todos os jogos de 6 números escolhidos dentre os números que ele marcou. A quantidade de tais jogos é igual a

$$C_{9,6} = C_{9,3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 84.$$

Sendo assim, ele pagará por essa cartela 84 vezes R\$ 3,50, ou seja, R\$ 294,00. Suas chance de ganhar serão de 84 em 50.063.860, ou seja, uma dentre aproximadamente 596 mil possibilidades. Isso é cerca de 0,000168%. □

Exemplo 15. *A partir de primeiro de janeiro de 2016, as placas de identificação de veículos (carros e motos), fornecidas e controladas pelo DENATRAN, irão ter um novo formato. As placas, que atualmente são formadas por 3 letras seguidas de 4 números, passarão a conter 4 (quatro) letras e 3 (três) números, os quais poderão vir em quaisquer posições. A Figura 15 mostra um exemplo de uma placa futura. Cada letra é escolhida de um alfabeto*

Figura 1: Exemplo de novo modelo de placa, que será usado a partir de 2016

que possui 26 letras e cada número é um dígito de 0 a 9. Calcule a quantidade de carros que podem ser identificados usando o modelo de placa atual e quantos poderão ser identificados usando o modelo novo.

Solução. Para o modelo antigo, podemos calcular a quantidade de placas diretamente usando o PFC. Escolhendo cada letra e cada número de forma independente, e sabendo que há 26 possíveis escolhas para cada letra (podendo haver repetições), temos um total de 26^3 maneiras de escolher as 3 letras. Ademais, temos um total de 10^4 maneiras de escolher os números. Logo, o total de placas no modelo atual é igual a $26^3 \cdot 10^4 = 175.760.000$.

Vamos, agora, contar o número de placas possíveis no modelo novo. Veja que temos um total de 7 caracteres, da mesma forma que no modelo atual, mas no novo modelo teremos 4 letras e 3 números. Além disso, no novo modelo as letras não precisam aparecer no início da placa. Assim temos a liberdade adicional de escolher quais posições serão ocupadas pelas letras. O número de maneiras de realizar tal escolha é igual a

$$C_{7,4} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35.$$

Uma vez escolhidas as posições das letras, o número de maneiras de escolher as letras que ocuparão as posições escolhidas e os números que ocuparão as posições restantes é igual a $26^4 \cdot 10^3$. Pelo PFC, o total de placas possíveis é:

$$35 \cdot 26^4 \cdot 10^3 = 15.994.160.000.$$

Veja que o número de placas do modelo novo é $\frac{35 \cdot 26}{10} = 91$ vezes maior do que a quantidade de placas no modelo atual, apesar de que o número total de caracteres continua sendo igual a 7. □

Exemplo 16. *De quantas maneiras podemos escolher três números do conjunto $A = \{1, 2, \ldots, 30\}$, de modo que sua soma seja ímpar?*

Solução. Para que a soma de três números inteiros seja ímpar, é necessário que ou todos os três números sejam ímpares ou que um deles seja ímpar e os outros dois sejam pares. Assim, vamos precisar dividir o problema em dois casos.

Caso 1 No primeiro caso, para que todos os números sejam ímpares, devemos escolher 3 números do total dos 15 números ímpares do conjunto A. A quantidade de maneiras em que podemos fazer isso é

$$\binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2} = 455.$$

Caso 2 No segundo caso, temos 15 possívels escolhas para o número ímpar, e $\binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105$ maneiras de escolher os dois números pares. Sendo assim, pelo PFC, o total de maneiras de escolher os números, nesse caso, é

$$15 \cdot 105 = 1.575.$$

Como exatamente um dos dois casos acima deve ocorrer e eles estão ligados pelo conectivo ‘ou’, temos que o total de maneiras de escolher os três números é

$$455 + 1575 = 2.030.$$

□

Exemplo 17. *Um batalhão possui 50 soldados, incluindo os soldados Ryan e Chuck Norris. Determine de quantas formas podemos montar um time com 4 soldados para uma missão, de modo que:*

(a) o soldado Ryan participe dessa missão.

(b) nem o soldado Ryan nem o soldado Chuck Norris participem da missão.

(c) Ryan e Chuck Norris não sejam escolhidos simultaneamente para a missão.

Solução.

(a) Como Ryan deve ser escolhido, precisamos apenas escolher os demais 3 soldados, dentre os 49 restantes, para a missão. Assim, o número de maneiras de fazer isso é: $\binom{49}{3} = 18.424$.

(b) Nesse caso, ainda precisamos escolher 4 soldados para a missão, mas estes devem ser escolhidos dentre os demais 48 soldados. Assim, o número de maneiras é igual a $\binom{48}{4} = 194.580$.

(c) A maneira mais fácil de fazer a contagem, nesse caso, é usando o método do complementar: vamos contar o total de times de 4 soldados (sem qualquer restrição) e subtrair a quantidade de times que são ruins, ou seja, aqueles em que ambos Ryan e Chuck Norris estão presentes. O resultado dessa conta é igual a:

$$\binom{50}{4} - \binom{48}{2} = 230.300 - 1.128 = 229.172.$$

Para não perdermos o costume, esse é mais um problema que pode ser resolvido de duas formas. A segunda solução cosiste em dividir o problema em três casos, dependo se apenas Ryan é selecionado (e Chuck Norris não é), ou se apenas Chuck Norris é selecionado, ou se nenhum deles é selecionado. Deixamos para o leitor a tarefa de fazer os cálculos dessa solução alternativa, verificando que as respostas obtidas serão as mesmas que aquelas acima.

□

O próximo exemplo vem para chamar a atenção do leitor para o fato de que é possível que o enunciado de um problema traga a palavra 'ordenado' e, mesmo assim, sua solução envolva o uso de combinações, e não de arranjos. A maneira mais segura para tentarmos distinguir um caso do outro é tentando aplicar diretamente o PFC e verificando se estamos contando objetos repetidamente. Vale ressaltar que, quando falamos que combinações se referem a "escolhas não ordenadas" enquanto arranjos se referem a "escolhas ordenadas", estamos falando apenas sobre a ordem em que os r elementos são escolhidos dente os n elementos dados, mas não sobre o objeto final a ser construído após a escolha dos r elementos.

Exemplo 18. *Uma pessoa possui 8 discos com diâmetros distintos e deseja guardá-los em duas caixas, uma verde e a outra azul. Cada caixa comporta uma pilha de quatro discos. Dentro de cada caixa, ela deseja empilhá-los de forma os discos estejas dispostos do maior para o menor, ou seja, um disco só pode ter acima de si mesmo outros discos de diâmetro menor. De quantas formas ela pode fazer essa distribuição?*

Solução. Observe que o fato dos discos precisarem ser guardados de forma ordenada (do maior para o menor), na verdade, nos tira a liberdade de escolher/atribuir uma ordem qualquer para eles. Na verdade, tudo que precisamos fazer para resolver o problema é escolher quais dos 8 discos serão guardados na caixa verde. Uma vez feito isso, os demais discos deverão ser guardados na caixa azul, e a ordem em que os quatro discos de cada caixa serão guardados já está predeterminada. Sendo assim, o número de maneiras de guardar os discos é igual ao número de maneiras de escolher 4 deles, dentre os 8 discos dados, que é igual a:

$$\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 70.$$

□

Vejamos outros casos semelhantes.

Exemplo 19. *Suponha, agora, que temos 9 discos de diâmetros distintos e desejamos distribuí-los em 3 caixas, com 3 discos em cada caixa. De quantas maneiras podemos fazer isso, considerando que:*

(a) as caixas possuem cores diferentes e os discos podem ser colocados em qualquer ordem, dentro de cada uma delas?

(b) as caixas possuem cores diferentes e os discos devem ser guardados ordenados, do menor para o maior, em cada uma das caixas?

(c) as caixas são idênticas e os discos devem ser guardados ordenados, do menor para o maior, em cada uma das caixas?

Solução.

(a) Digamos que temos uma caixa azul, uma verde e uma amarela. Nesse caso, temos a liberdade de escolher tanto a caixa em que cada disco será guardado como a ordem dos discos em cada caixa. Veja que podemos simplesmente considerar qualquer permutação dos 9 discos e colocar os três primeiros, na ordem em que aparecerem na permutação, dentro da caixa azul, os três seguintes na caixa verde e os outros três na caixa amarela (também respeitando a ordem da permutação). Logo o número de maneiras de guardá-los nas caixas é $9! = 362.880$.

Uma maneira alternativa de resolver o problema é escolhe quais discos serão colocados caixa a caixa. Para a primeira caixa, digamos a caixa azul, temos $A_{9,3} = 9 \cdot 8 \cdot 7$ maneiras de escolher 3 dos 9 discos de forma ordenada (usando a ordem da escolha para colocá-los dentro da caixa azul). De forma análoga, temos $A_{6,3}$ maneiras de escolher 3 dos 6 discos restantes e colocá-los dentro da caixa verde. Por fim, temos $A_{3,3} = 3!$ maneiras de atribuir uma ordem para os 3 discos restantes e colocá-los na caixa amarela, respeitando tal ordem. Pelo PFC, o total de maneiras de guardá-los é igual a: $A_{9,3}A_{6,3}A_{3,3} = 9!$.

(b) Digamos que temos uma caixa azul, uma verde e uma amarela. Como a ordem dos discos dentro de cada caixa já está predeterminada, basta escolher quais 3 dos 9 discos guardaremos na caixa azul e, em seguida, escolher três dentre os 6 restantes para guardarmos na caixa verde. Os discos que sobrarem deverão ser guardados na caixa amarela. Sendo assim, o número de maneiras de guardá-los é (apenas)

$$\binom{9}{3}\binom{6}{3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!}\frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{9!}{3! \cdot 3! \cdot 3!} = 1.680.$$

(c) Agora, não temos sequer a liberdade de distinguir uma caixa da outra, já que todas as caixas são idênticas. Observemos primeiro as 1.680 possíveis soluções do item (b); em seguida, para cada uma dessas soluções, ignoremos as cores das caixas, ou seja, pintemos todas as caixas de branco. Como resultado, algumas das soluções, que antes eram distintas, passarão a ser indistinguíveis. Mais precisamente, para partir de soluções de (b) que eram diferentes e obter uma mesma solução de (c), precisaremos permutar as três cores das caixas (mantendo inalteradas as ordens dos discos dentro de cada uma delas). Como isso pode ser feito de $3! = 6$ maneiras, cada 6 soluções de (b) correspondem a uma solução de (c). Portanto, o número de maneiras de guardar os discos é igual a (apenas) $\frac{1680}{6} = 280$.

□

Dicas para o Professor

Antes de introduzir arranjos, o professor pode fazer alguns exemplos simples. Por exemplo, fixando $n = 5$ e $r = 2$, pode-se listar todos os $A_{5,2}$ arranjos e, em seguida, agrupar os arranjos que correspondem a uma mesma combinação, mostrando, assim, todas as combinações de 5 objetos, escolhidos 2 a 2. Veja que $C_{5,2} = A_{5,2}/2$. Porém, é importante ressaltar que, no caso geral, temos $C_{n,r} = A_{n,r}/r!$, ou seja, $A_{n,r}$ será dividido por $r!$ e não dividido por r, como pode-se imaginar após a análise do exemplo sugerido acima. (No caso particular ao qual aludimos, isto se deve à infeliz coincidência $2! = 2$.) É importante, também, sempre justificar porque você precisa dividir o resultado por $r!$, nos casos em que isso for realmente necessário. Aconselhamos, ainda, a resolução de muitos exercícios. Além daqueles que estão contidos aqui, deve-se usar as listas de exercícios do próprio portal.

Sugestões de Leitura Complementar

1. P. C. P. Carvalho, A. C. de O. Morgado, P. Fernandez e J. B. Pitombeira. *Análise Combinatória e Probabilidade*. SBM, Rio de Janeiro, 2000.