Aula 2 – 2º Encontro

Princípio Multiplicativo – parte 2

06/08/2016

1)

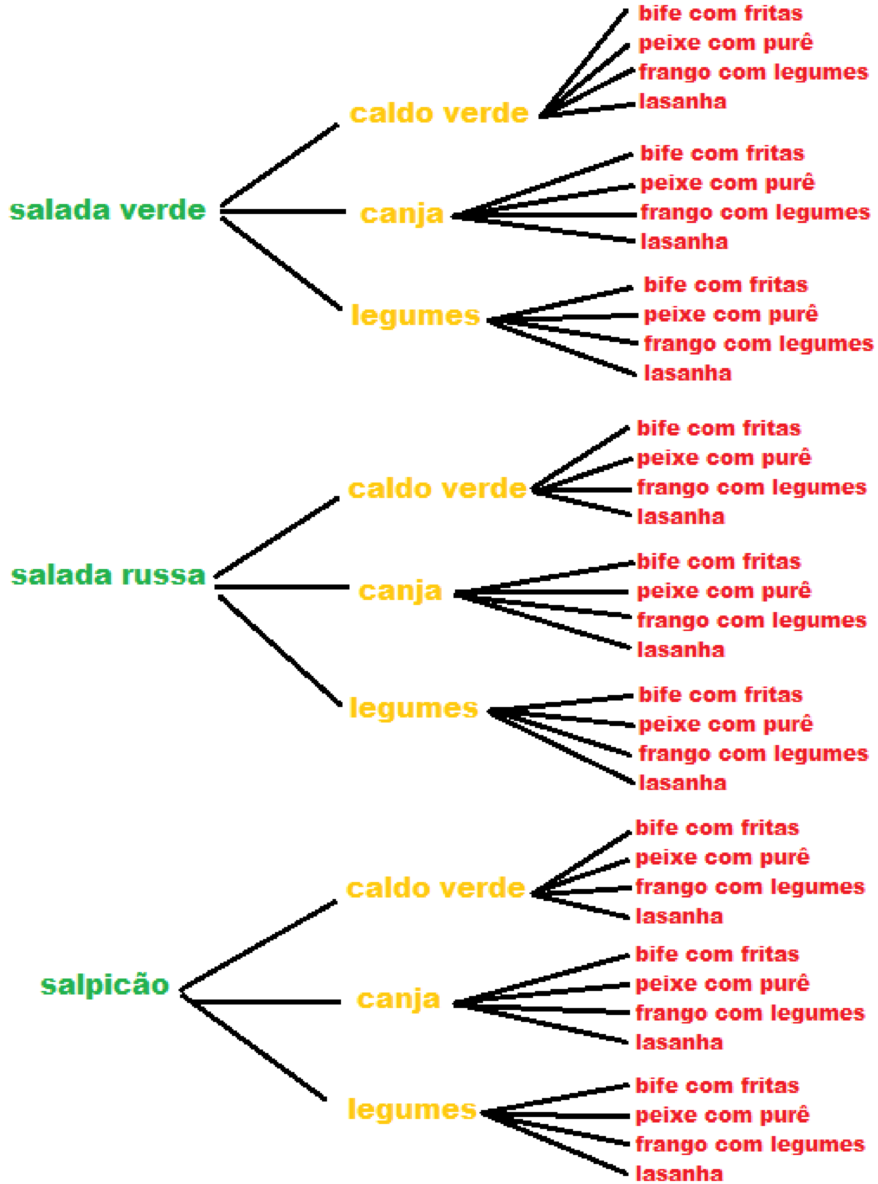
a) Como há 3 opções de salada, 3 de sopas e 4 de pratos principais, temos:

Salada verde	**caldo verde**	**bife com fritas**
Salada russa	**canja**	**peixe com purê**
Salpicão	**legumes**	**frango com legumes**
		lasanha

$$\mathbf{3+3+4=10}$$

modos de escolher um prato do cardápio

b)


salada verde
caldo verde
bife com fritas
peixe com purê
frango com legumes
lasanha
canja
bife com fritas
peixe com purê
frango com legumes
lasanha
legumes
bife com fritas
peixe com purê
frango com legumes
lasanha
salada russa
caldo verde
bife com fritas
peixe com purê
frango com legumes
lasanha
canja
bife com fritas
peixe com purê
frango com legumes
lasanha
legumes
bife com fritas
peixe com purê
frango com legumes
lasanha
salpicão
caldo verde
bife com fritas
peixe com purê
frango com legumes
lasanha
canja
bife com fritas
peixe com purê
frango com legumes
lasanha
legumes
bife com fritas
peixe com purê
frango com legumes
lasanha

Observe que no diagrama de flechas são todas iguais as sequencias das flechas, logo devemos usar o principio multiplicativo, isto é,

O número possíveis de refeições é:

$$3(saladas) \times 3(sopas) \times 4(pratos\ principais) = 36$$

2)

a) Cada um dos jogadores pode obter qualquer dos números de 1 a 6.

6 resultados x 6 resultados

Logo o número possível de combinações é $6 \times 6 = 36$.

b) As somas possíveis são:

$1+1=2$ $2+2=4$ $3+3=6$ $4+4=8$ $5+5=10$ $6+6=12$

$1+2=3$ $2+3=5$ $3+4=7$ $4+5=9$ $5+6=11$

$1+3=4$ $2+4=6$ $3+5=8$ $4+6=10$

$1+4=5$ $2+5=7$ $3+6=9$

$1+5=6$ $2+6=8$

$1+6=7$

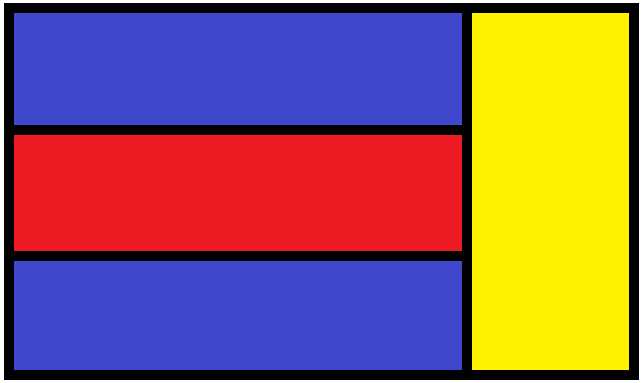
Logo a soma pode ser qualquer um dos inteiros: $\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

Ou seja, há 11 somas possíveis

3)

a) Observe que as cores adjacentes não podem ser pintadas da mesma cor, então somente a primeira e a ultima faixa podem ser pintadas da mesma cor.

Exemplo:



Portanto são necessárias pelo menos 3 cores.

b) A faixa vertical pode ser pintada de 6 modos.

Pintando a faixa vertical de cima para baixo, temos:

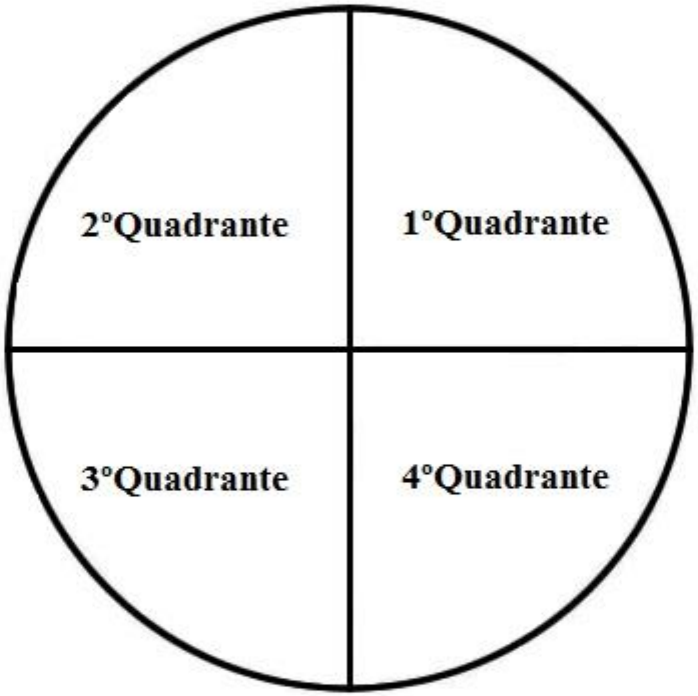
- a primeira pode ser pintada de 5 modos (não pode ser usada a cor que pintou a faixa vertical);
- a segunda de 4 modos (não pode usar a cor da faixa vertical e da primeira faixa);
- a terceira também de 4 modos (não pode ser usada a cor da faixa vertical e nem da segunda faixa horizontal).

Logo, o número total de bandeiras é

$$\mathbf{6 \times 5 \times 4 \times 4 = 480}$$

4) Temos 5 cores distintas.

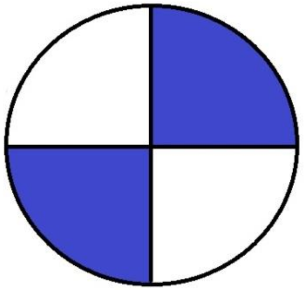
Observe como são dispostos os quadrantes de um círculo:



Observe que:

- O 1º e o 3º quadrante podem ter a mesma cor;
- O 2º e o 4 quadrante podem ter a mesma cor;

Vamos considerar 2 casos: o que os quadrantes 1 e 3 tem a mesma cor e o que os quadrantes 1 e 3 tem cores diferentes:



1º Caso: os quadrantes 1 e 3 tem cores iguais.

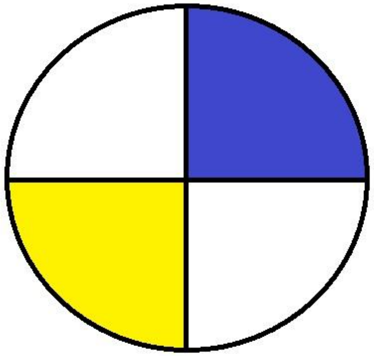
Temos:

- 5 possibilidades para o 1º quadrante;
- 4 possibilidades para o 2º quadrante (não pode ser a mesma cor do 1º);
- 1 possibilidade para o 3º quadrante (mesma cor do 1º);
- 4 possibilidades para o 4º quadrante (não pode ser a mesma cor do 1º).

Logo temos

$$5 \times 4 \times 1 \times 4 = 80 \text{ possibilidades}$$

2º Caso: os quadrantes 1 e 3 tem cores diferentes.



Temos:

- 5 possibilidades para o 1º quadrante;
- 4 possibilidades para o 2º quadrante (não pode ser a mesma cor do 1º);
- 3 possibilidades para o 3º quadrante (não pode ser a mesma cor do 1º, nem do 2º);
- 3 possibilidades para o 4º quadrante (não pode ser a mesma cor do 1º e nem do 3º).

Logo temos

$$\mathbf{5 \times 4 \times 3 \times 3 = 180} \text{ possibilidades}$$

Somando os casos temos $\mathbf{80 + 180 = 260}$ modos de colorir o circulo.

5) Observe que há 5 alternativas em cada uma das 10 questões: $\{A, B, C, D, E\}$

Então há

$$\mathbf{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^{10}}$$

gabaritos possíveis.

Para ter a letra A aparecendo exatamente uma vez, devemos escolher a questão em que ela aparece (note que ela pode aparecer uma vez em cada questão), ou seja, 10 possibilidades.

Tirando a questão q já saiu a letra A, temos 4 alternativas para cada questão, isto é:

$$\boldsymbol{A \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^9}$$

Portanto, o número total de possibilidades de gabaritos para a letra A aparecendo somente uma vez é

$$\mathbf{10 \times 4^9}$$

Se a letra A não aparece, temos somente 4 alternativas para cada questão $\{B, C, D, E\}$

Isto é,

$$\mathbf{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^{10}}$$

6) Os subconjuntos do conjunto $\{1,2,3\}$ são:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}.$$

Os subconjuntos de $\{1,2,3\}$ são 8, isto é

$$\mathbf{2^3 = 8}$$

De um modo geral, um subconjunto de um conjunto de n elementos é formado decidindo se cada elemento entra ou não no subconjunto. Para cada elemento há 2 possibilidades.

Portanto o número total de possibilidades é $\mathbf{2^n}$**.**

7)

- A primeira pessoa pode escolher sua cadeira de 5 modos;
- A segunda pessoa pode escolher sua cadeira de 4 modos;
- E a terceira pessoa pode escolher sua cadeira de 3 modos.

Logo temos

$$\mathbf{5 \times 4 \times 3 = 60}$$

modos para 3 pessoas sentarem em 5 cadeiras.

8) Temos 5 homens e 5 mulheres e 5 bancos de dois lugares cada.

- a primeira mulher pode escolher sua posição de 10 modos;
- a segunda de 8 modos (do lado da primeira deve ter um homem);
- a terceira de 6 modos;
- a quarta de 4 modos;
- E a quinta de 2 modos.

Tendo todas as mulheres sentadas:

- o primeiro homem pode se sentar de 5 modos;
- o segundo de 4 modos;
- o terceiro de 3 modos;
- o quarto de 2 modos;
- E o ultimo de 1 modo.

Assim temos:

$$\mathbf{10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 460\,800}$$

modos para sentar os 5 homens e as 5 mulheres nos 5 bancos de 2 lugares cada.

9) Note que no caso que são permitidas repetições, a condição de a letra A figurar na palavra é extremamente difícil de trabalhar, pois ela pode figurar apenas uma vez, ou duas, ou três etc...

Por isso a melhor forma é contar todas as palavras do alfabeto e subtrair as que não tem a letra A e as que começam pela letra A.

- Todas as palavras possíveis são:

$$\underline{\mathbf{26}} \times \underline{\mathbf{26}} \times \underline{\mathbf{26}} \times \underline{\mathbf{26}} \times \underline{\mathbf{26}} = \mathbf{26^5}$$

- As palavras que se iniciam pela letra A são:

$$\underline{\boldsymbol{A}} \times \underline{\mathbf{26}} \times \underline{\mathbf{26}} \times \underline{\mathbf{26}} \times \underline{\mathbf{26}} = \mathbf{26^4}$$

- As palavras que não tem a letra A são:

$$\underline{\mathbf{25}} \times \underline{\mathbf{25}} \times \underline{\mathbf{25}} \times \underline{\mathbf{25}} \times \underline{\mathbf{25}} = \mathbf{25^5}$$

Portanto, podemos formar

$$\mathbf{26^5 - 26^4 - 25^5 = 1\,658\,775}$$

palavras com 5 letras com a letra A figurada na palavra, não sendo a primeira letra.

No caso das letras serem distintas, não teremos repetição, então podemos contar diretamente:

há 4 modos de escolher a posição da letra A (não pode ser na primeira casa); 25 modos de escolher a letra para a primeira casa; 24 modos para a segunda casa etc...

Logo temos:

$$\mathbf{4 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 1\,214\,400}$$

palavras com 5 letras com a letra A figurada na palavra, mas não na primeira casa com todas as letras distintas.

10) Lembre-se de que nas placas de carro, as letras e números podem se repetir, isto é, temos 26 letras $\{a, b, c, \dots, y, z\}$ e 10 números $\{0,1,2, \dots, 9\}$ a considerar.

Logo,

$$\mathbf{26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 26^3 \times 10^4 = 175\,760\,000}$$

Portanto poderão ser formadas $\mathbf{175\,760\,000}$ placas de carro.

11) Considere os inteiros de 1 até 2222

a)

- de 10 a 100 aparece na casa das unidades 10 vezes

$$\{10,20,30,40,50,60,70,80,90,100\}$$

Logo, o zero aparece nas casas das unidades 222 vezes nos números

$$10,20,30,\ldots,2220$$

- De 100 a 199 aparece na casa das dezenas 10 vezes

$$\{100,101,102,103,104,105,106,107,108,109\}$$

Logo, o zero aparece na casa das dezenas 220 vezes nos números

$$100,101,102,\ldots,2209$$

- De 1000 a 1099 aparece na casa das centenas 100 vezes

$$\{1000,1001,1002,\ldots 1099\}$$

Logo, o zero aparece na casa das centenas 200 vezes nos números

$$1000,1001,1002,\ldots,2099$$

Portanto o zero aparece $\mathbf{222+220+200=642}$ vezes.

b) O zero aparece na casa das unidades 222 vezes nos números $10, 20, 30, \ldots, 2220$. Das 220 vezes que aparece na casa das dezenas, devemos descontar o total dos números do conjunto

$$\{\mathbf{10}\boldsymbol{x}, \mathbf{20}\boldsymbol{x}, \mathbf{30}\boldsymbol{x}, \ldots, \mathbf{220}\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x} = \mathbf{0}\},$$

que é 22.

Das 200 vezes em que aparece na casa das centenas, devemos descontar o total dos números do conjunto

$$\{\mathbf{10}\boldsymbol{xy}, \mathbf{20}\boldsymbol{xy}; \boldsymbol{x} = \mathbf{0}\ \boldsymbol{ou}\ \boldsymbol{y} = \mathbf{0}\},$$

Observe:

- $1000, 1001, \ldots, 1009$ tem 10 números; $x = 0\ e\ y \neq 0$
- $1010, 1020, \ldots, 2000$ tem 10 números; $x \neq 0\ e\ y = 0$
- $2001, 2002, \ldots, 2009$ tem 9 números; $x = 0\ e\ y \neq 0$
- $2010, 2020, \ldots, 2090$ tem 9 números; $x \neq 0\ e\ y = 0$

Sendo assim devemos descontar 38 números deste conjunto

Portanto o número total de algarismos entre 1 e 2222 que possuem zero é

$$\mathbf{222 + (220 - 22) + (200 - 38) =}$$
$$\mathbf{= 222 + 198 + 162 =}$$
$$\mathbf{= 582}$$

12) Os inteiros positivos de 4 algarismos são os números de 1000 até 9999.

Para encontrar aqueles em que o 5 figura é mais conveniente encontrar os que o 5 não figura e subtraí-los, isto é,

O conjunto $\{1000, 1001, \ldots, 9999\}$ possui $9999 - 999 = 9000$ números

Observe:

- O número 5 e o 0 não podem estar na casa do milhar, logo temos 8 possibilidades;
- Nas demais casas podemos colocar qualquer número menos o 5, logo temos 9 possibilidades;

Assim, o número de elementos que o número 5 não figura é:

$$\underline{\mathbf{8}} \times \underline{\mathbf{9}} \times \underline{\mathbf{9}} \times \underline{\mathbf{9}} = \mathbf{5\,832}$$

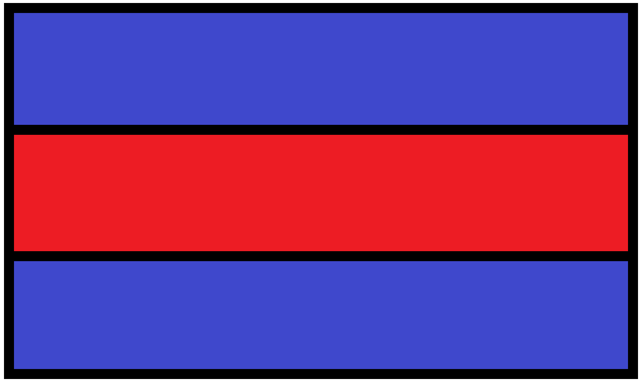
Logo, os inteiros de 4 algarismos em que o 5 figura são:

$$\mathbf{9000 - 5832 = 3\,168}$$

13)

A solução está errada.

É possível que a mesma cor tenha sido escolhida para as faixas extremas.



Neste caso, o número de possibilidades de escolha para a cor da faixa central é 3, e não 2. Logo, para esta ordem de pintura não é possível aplicar diretamente o Princípio Multiplicativo.

A solução correta seria $\mathbf{4 \times 3 \times 4 = 48}$

14)

Nesta solução o casal João e Maria foi considerado diferente do casal Maria e João. Isso é devido ao fato de termos trabalhado com o conceito de primeira pessoal do casal.

Por isso a resposta encontrada é o dobro da resposta do casal.

A resposta correta seria:

Temos 5 mulheres para formar um casal e 5 homens, isto é,

$$\mathbf{5 \times 5 = 25}$$

15) Há dois tipos de peças: as formadas por números iguais e as formadas por um par de números distintos:

- As formadas por números iguais são **7 (0-0,...,6-6)**;
- As formadas por números distintos são $\mathbf{7 \times \frac{6}{2} = 21}$;

Portanto o número total de peças é $\mathbf{7 + 21 = 28}$

Se os números forem até 8, teremos:

$$\mathbf{9 + 9 \times \frac{8}{2} = 45}$$