Gabarito do 1º Simulado – Ciclo 1 – Nível 3

**CPMG Nader Alves dos Santos**

**Obmep na Escola**

**Prof. Me. José Roberto Penachia Parreira**

Questão 01

1. A solução é feita em seis passos, assinalado cada um deles em vermelho.



1. Não. No quadradinho assinalado com X não podemos colocar nem o 3 nem o 4 porque a 2ª linha já contém esses números. Por outro lado também não podemos colocar nem 1 nem 2 porque a última coluna já contém esses números.



1. De acordo com o item (b), temos quatro opções para preencher o quadrado D, que são



Como no item (b), vemos que a opção sombreada não é possível, uma vez que não teremos como preencher o quadradinho assinalado com X.



Logo, para preencher o quadrado D só restam as 3 opções:



Uma vez preenchido o quadrado D, os quadrados B e C podem ser preenchidos de modo único. Logo, temos 3 maneiras para completar o quadrado original, que são



d) Para preencher o quadrado A, na ordem crescente 1, 2, 3 e 4 temos a seguinte situação:

\* podemos colocar o 1 em qualquer das 4 posições;

\* colocado o 1, temos 3 posições para o 2;

\* colocados o 1 e o 2, temos 2 posições para o 3;

\* colocados o 1, o 2 e o 3 temos apenas uma posição para o 4.

Logo, o quadrado A pode ser preenchido de 4 x 3 x 2 x 1 = 24 maneiras.

Preenchido o quadrado A, vamos agora preencher o quadrado D:

\* podemos colocar o 1 em qualquer das 4 casas;

\* uma vez colocado o 1, usando o mesmo argumento que no item (c), vemos que existem 3 maneiras de completar o quadrado D.

Logo, temos 24 x 4 x 3 = 288 modos de preencher os quadrados A e D. Sabemos que, estando esses dois quadrados preenchidos, só temos uma maneira de preencher os quadrados B e C. Logo, o número total de quadrados especiais é 288.

Questão 02

Para simplificar a exposição, vamos indicar a área de uma figura colocando seu nome entre parêntesis; por exemplo, (ABC) denota a área do triângulo ABC (em cm²).

a) A figura abaixo ilustra as situações x = 2 , x = 5 e x = 7; nelas *F* representa a posição de *C* após a dobra.



Como o triângulo *ABC* é retângulo em *C* e a dobra é paralela ao lado *AB*, segue que *CDFE* é um quadrado de lado *CD* = *x* cm; a área do triângulo *DEF* é metade da área do quadrado *CDFE*. Temos (*CDFE*) = x2 e então (*DEF*) = *x*2/2.

Para *x* = 2 o triângulo *DEF* representa a região de sobreposição, logo, f(2) = 22/2 = 2; analogamente, temos f(5) = 52/2 = 25/2

No caso x = 7, a área de sobreposição, representada pelo trapézio *DEHG*, é igual a (*DEF*) – (*GHF*). O triângulo *ADG* é isósceles com *AD* = *DG* = 3 cm; como *DF* = 7 temos *GF* = 4. Logo (*DEHG*) = (*DEF*) – (*GHF*) = 72/2 – 42/2 = 33/2 cm², ou seja f(7) = 33/2.

b) A figura abaixo, à esquerda, ilustra a região de sobreposição para 0 < x ≤ 5; à direita temos a região de sobreposição para 5 < x <10.



No primeiro caso, *CDFE* é um quadrado de lado *x* e a área de *DEF* é metade da área desse quadrado, ou seja, f(*x*) = *x*2/2. No segundo caso, o triângulo *ADG* é isósceles com *AD* = *DG* = 10 – *x*; logo *GF* = *DF* – *DG* = *x* – (10 – *x*) = 2*x* – 10 e temos f(*x*) = (*DEHG*) = (*DEF*) – (*GHF*) = *x*²/2 – (2*x* – 10)²/2 = ½(–3*x²* + 40*x* – 100).

Pode-se também calcular

(*DEGH*) = (*ABC*) – (*DEC*) – (*ADG*) – (*EBH*) = (*ABC*) – (*DEC*) – 2(*ADG*); deixamos esse cálculo para o(a) leitor(a).

c) O gráfico de *f* aparece abaixo.



d) Observamos primeiro que –½(3*x²* – 40*x* + 100) = –½(3*x* – 10)(*x* – 10); essa fatoração pode ser obtida a partir das raízes de 3x² – 40x + 100, que são 10/3 e 10.

Quando 0 < *x* ≤ 5 o maior valor de f(*x*) = 1/2*x*² é f(5) = 25/2. Por outro lado, quando 5 < x < 10 o maior valor de f(*x*) = –½(3*x* – 10)(*x* – 10) é atingido no vértice da parábola, cuja abscissa é o ponto médio das raízes, ou seja, é ½(10/3 + 10) = 20/3; temos f(20/3) = 50/3. Como f(5) = 25/2 < 50/3 = f(20/3), o maior valor possível da área de sobreposição é 50/3.

Questão 03

1. A figura a baixo mostra duas soluções para o problema.



1. 1ª solução: A figura do enunciado mostra que ao traçar as cinco diagonais do pentágono obtemos 10 triângulos e um novo pentágono central. A repetição desse processo *n* vezes (pensamos na repetição de 0 vezes como não tendo feito nada) tem como resultado 10*n* triângulos e um pentágono central, que podemos dividir em 3, 5, 7, 9, ou 11 triângulos como mostrado no enunciado. Desse modo, podemos triangular legalmente o pentágono em 10*n* + *r* triângulos onde *r* pode ser 1, 3, 5, 7 ou 9; como qualquer número ímpar se escreve dessa forma segue que podemos triangular legalmente o pentágono em qualquer número ímpar de triângulos. Por exemplo, para triangular legalmente o pentágono em 229 triângulos escrevemos 229 = 10x22 + 9 , efetuamos o processo de divisão por diagonais 10 vezes e finalmente dividimos o pentágono central em 9 triângulos.



2ª solução: a figura I acima mostra uma divisão do pentágono em sete triângulos, onde destacamos uma parte em traço mais grosso. Podemos dividir legalmente essa parte de modo a gerar dois triângulos adicionais, como na figura II. Esse processo pode ser repetido na parte análoga destacada nessa última figura, gerando mais dois triângulos e outra figura análoga onde o processo pode ser repetido novamente, e assim por diante gerando dois novos triângulos em cada etapa. Isso mostra que, começando de uma triangulação com 7 triângulos, podemos obter qualquer número ímpar de triângulos.

1. 1ª solução: consideremos um pentágono triangulado legalmente, e sejam *n* o número de triângulos e *m* o número de pontos legais interiores dessa divisão. A soma dos ângulos de todos os triângulos é 180*n* graus. Por outro lado, essa soma é igual à soma dos ângulos em volta dos pontos legais interiores mais a soma dos ângulos internos do pentágono, ou seja, é igual a 360*m* + 540 graus. Logo 180*n* = 360*n* + 540, ou seja, *n* = 2*m* + 3 que é um número ímpar.

Exemplificamos essa demonstração com a figura abaixo, onde *n* = 7 e *m* = 2.



2ª solução: consideremos como acima um pentágono triangulado legalmente em *n* triângulos, e seja *m* o número total de lados desses triângulos. Ao contar os lados desses triângulos um por um, teremos dois casos: (i) contar um lado comum a dois triângulos e (ii) contar um dos lados do pentágono. No primeiro caso, cada lado é contado duas vezes; no segundo caso temos apenas os lados do pentágono. Obtemos então *m* = (3*n* – 5)/2 + 5; como *m* e *n* são números inteiros segue que (3*n* – 5)/2 também é inteiro, ou seja, 3*n* – 5 é par, donde *n* é ímpar. A figura usada na solução anterior exemplifica essa demonstração no caso *n* = 7 e *m* = 13 .

Questão 04

a) Só existe uma maneira de preencher o diagrama, como mostramos a seguir.

• O número 9 não pode ficar abaixo de nenhum número, logo deve ficar no topo.

• Acima do número 7 só podemos colocar o 9 e 8. Como o 9 já está no topo, o 8 ficará acima do 7.

• O número 6 não pode ficar abaixo do 5 nem do 2, logo ficará abaixo do 8 , ao lado do 7.

• O número 1 é o único que pode ficar abaixo do 2.

• Os números 3 e 4 devem ficar abaixo do 5, com o 3 debaixo do 4.

A sequencia de figuras a seguir ilustra as etapas deste raciocínio.



b) 1ª solução: Primeiro vamos examinar o diagrama menor de três bolinhas marcadas pelo triângulo pontilhado, abaixo.



Para que ele fique bem preenchido com quaisquer três números positivos distintos, o maior número deve ficar no topo e os outros dois poderão ser colocados nos dois círculos de baixo de 2 maneiras diferentes. Por

exemplo, se os números forem 3, 6 e 8, podemos dispô-los das 2 maneiras ilustradas a baixo.



Para que o diagrama completo do problema fique bem preenchido com os números de 1 a 5, o 5 deve ficar no topo. A casa sombreada pode ser preenchida com qualquer número de 1 a 4. As três casas restantes, marcadas com o triângulo pontilhado, formam o diagrama analisado acima e poderão então ser preenchidas de 2 maneiras, com os três números restantes. Resumindo, podemos preencher o diagrama do seguinte modo:

• preenchemos o círculo do topo com o 5: 1 possibilidade;

• preenchemos a casa sombreada com 1, 2, 3 ou 4 : 4 possibilidades;

• preenchemos as três casas que faltam com os três algarismos restantes: 2 possibilidades.

Logo o diagrama pode ser preenchido de 1× 4× 2 = 8 maneiras diferentes. Notamos que este raciocínio se aplica para quaisquer cinco números positivos distintos. Isto será importante na resolução do próximo item.

2ª solução: Notamos primeiro que o 5 deve sempre ocupar a bolinha de cima. O 4 deve então ocupar uma das duas bolinhas abaixo do 5, e então:

• se o 4 ocupar a bolinha sombreada, o 3 deve ocupar a outra bolinha abaixo do 5, e o 1 e o 2 podem ser colocados de duas maneiras diferentes nas duas bolinhas que sobram; temos duas possibilidades neste caso;

• se o 4 ocupar a outra bolinha abaixo do 5, a casa sombreada pode ser ocupada por qualquer dos números de 1 a 3, e os outros dois números podem ser colocados nas duas últimas bolinhas vazias; neste caso temos 3 × 2 = 6 possibilidades.

Deste modo, o número de maneiras de preencher o diagrama é 2 + 6 = 8 .

c) 1ª solução: Para que o diagrama fique bem preenchido com os números de 1 a 7, temos que colocar o 7 no topo. A casa sombreada pode ser preenchida com qualquer número de 1 a 6. A parte circundada pela linha pontilhada foi analisada no item (b) e pode ser preenchida com os 5 números restantes de 8 formas diferentes. Ou seja, podemos preencher o diagrama como segue:

• preenchemos o círculo do topo com o 7: 1 possibilidade;

• preenchemos a casa sombreada com 1, 2, 3 , 4, 5 ou 6: 6 possibilidades;

• preenchemos a parte circundada com os algarismos restantes: 8 possibilidades.

Logo o diagrama pode ser preenchido de 1× 6 × 8 = 48 maneiras diferentes.

2ª solução: Notamos primeiro que o 7 deve sempre ocupar a bolinha de cima. O 6 deve então ocupar uma das duas bolinhas abaixo do 7, e então:

• se o 6 ocupar a bolinha sombreada, os números de 1 a 5 devem ocupar as casas circundadas com a linha pontilhada. De acordo com o item (b), isto pode ser feito de 8 maneiras distintas.

• se o 6 deve ocupar a outra bolinha abaixo do 7, podemos colocar qualquer número de 1 a 5 na casa sombreada e distribuir os números restantes pelas quatro bolinhas ainda vazias, o que pode ser feito de 8 maneiras diferentes, de acordo com o item (b). Aqui temos 5× 8 = 40 possibilidades.

Logo o diagrama pode ser preenchido de 8 + 40 = 48 maneiras diferentes.

Questão 05

a) O valor da área de cada painel é igual ao total de lâmpadas vermelhas que o mesmo usa. Logo, em um painel de 5 metros por 8 metros há 5×8 = 40 lâmpadas vermelhas.

b) Um painel de 5 metros por 8 metros contém 6 linhas horizontais e 9 linhas verticais, que formam entre si 6×9 = 54 interseções. De acordo com o enunciado, em cada uma dessas interseções é colocada uma lâmpada azul; logo há 54 lâmpadas azuis.

c) 1ª solução: Em um painel de *m* metros por *n* metros, o número de lâmpadas azuis que há na borda coincide com o valor do seu perímetro, que é igual a 2(*m* + *n*) . Por argumentos análogos aos usados nos itens (a) e (b), vemos que este painel usa *mn* = 72 lâmpadas vermelhas e (*m* + 1)(*n* + 1) = 90 lâmpadas azuis. Da última igualdade segue que *mn* + (*m* + *n*) + 1= 90 e então temos *m* + *n* = 90 − *mn* − 1 = 90 − 72 − 1= 17. Assim, o número de lâmpadas azuis que estão na borda do painel é 2(*m* + *n*) = 2×17 = 34.

2ª solução: A área do painel é 72 (total de lâmpadas vermelhas), assim as possíveis dimensões do painel são as seguintes (em metros): 1×72, 2×36 , 3×24 , 4×18 , 6×12 e 8×9. A mesma argumentação usada no item (b) mostra apenas 8×9 corresponde a um painel que tem um total de 90 lâmpadas azuis, pois 90 = (8 + 1)(9 + 1). Como o número de lâmpadas azuis que há na borda coincide com o valor do perímetro do painel, temos então que há 2(8 + 9) = 34 lâmpadas azuis na borda do painel.

Questão 06

1. Seja *n* a distância a ser percorrida por Adonis e Basílio. O algoritmo da divisão de Euclides nos permite escrever *n* = 8*a* + *r* = 7*b* + *s* onde 0 ≤ *r* ≤ 7 e 0 ≤ *s* ≤ 6; segue que A(*n*) = *a* + *r* e B(*n*) = *b* + *s*. Por exemplo, 14 = 8x1 + 6 = 7x2 + 0, donde A(14) = 1 + 6 = 7 e B(14) = 2 + 0 = 2. O restante da tabela pode ser preenchido analogamente.



1. Para achar um desses números, basta fazer uma tabela como a do item anterior para valores de *n* entre 200 e 240.



Essa tabela mostra que 231, 238 e 239 são os valores de *n* entre 200 e 240 tais que A(*n*) > B(*n*). Observamos que a feitura dessa tabela não é tão trabalhosa como parece, pois o padrão dos valores de A(*n*) e B(*n*) é claro; por exemplo, basta calcular A(*n*) para os múltiplos de 8 e a linha correspondente a A(*n*) é preenchida como segue:



Observação análoga vale para a linha correspondente a B(*n*).

1. Das expressões *n* = 8*a* + *r* = 7*b* + *s* temos A(*n*) = *a* + *r* = (*n* – *r*)/8 + *r* = (*n* + 7*r*)/8 e B(*n*) = *b* + *s* = (*n* – *s*)/7 + *s* = (*n* + 6*s*)/7. Desse modo, A(*n*) = B(*n*) se escreve como (*n* + 7*r*)/8 = (*n* + 6*s*)/7; simplificando essa expressão chegamos a *n* = 49*r* – 48*s*. O maior valor possível para 49*r* – 48*s* é obtido colocando *r* = 7 e *s* = 0, ou seja, o número procurado é *d* = 49x7 = 343.

Fica como exercício para o(a) leitor(a) mostrar que A(*n*) < B(*n*) para *n* > 343.