Solução. Este problema pode ser resolvido de modo análogo ao problema anterior.

**Exercício 15:** Em um conjunto de 101 moedas, há 50 falsas e as demais são verdadeiras. Uma moeda falsa difere de uma verdadeira em 1 grama. Marcos tem uma balança que mostra a diferença de pesos entre os objetos colocados nos dois pratos. É possível, com uma pesagem, identificar se a moeda escolhida é falsa? (Veja a solução deste problema no vídeo 20.)

## 1.2 Sistema posicional de numeração

Nesta seção são apresentadas atividades que contribuem para um correto entendimento do sistema posicional de numeração. Ao serem realizadas, esperamos que os alunos percebam que na representação decimal de um número, a posição de um algarismo interfere em seu valor relativo. Por exemplo, no número 742, o algarismo 7 significa sete centenas, o número 4 significa quatro dezenas e o 2 significa duas unidades, ou equivalentemente: $742 = 700 + 40 + 2 = 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$.

Observamos que o vídeo 11 do canal picobmep no YouTube apresenta o sistema posicional de numeração. Vale a pena ver as explicações apresentadas neste vídeo. Após estudar o conteúdo, resolva os seguintes problemas.

**Exercício 16:** (Fomin, capitulo 0, problema 8) Retire 10 dígitos do número 1234512345123451234512345 de modo que o número remanescente seja o maior possível. E para formar o menor número, como deveríamos proceder?

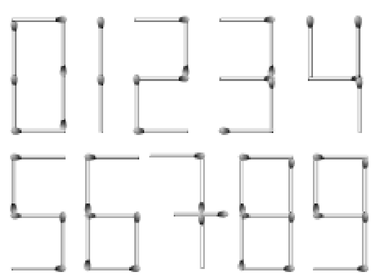
Solução. O maior número é 553451234512345 e o menor número é

111231234512345. Veja a solução deste problema no vídeo 1. Os vídeos de 1 a 5 contêm várias explicações interessantes sobre o sistema decimal de numeração e as quatro operações. Todos os alunos do grupo devem assistir estes vídeos e devem postar suas dúvidas no Fórum Hotel de Hilbert.

**Exercício 17:** Determine o menor número com 10 algarismos tal que a soma dos seus algarismos seja igual a 40.

Solução. Para o número ser o menor possível, devemos colocar o menor algarismo mais a esquerda do número. Assim vamos colocar o algarismo 1 à esquerda do número. Logo à direita desse algarismo 1, vamos colocar a maior quantidade possível de algarismos zero. Mas como a soma dos algarismos deve ser 40, devemos ter algarismos não nulos mais a direita do número que será formado. Quanto mais noves forem colocados à direita do número, mais destes algarismos zero poderão ser utilizados. Dividindo 40 por 9 obtemos $40 = 4 \times 9 + 4$. Portanto podemos colocar 4 algarismos 9 mais a direita do número. Como a soma dos dez algarismos deve ser 40, o número procurado é 1000039999. (Veja a solução de um problema bastante similar a este no vídeo 3.)

**Exercício 18:** (Banco de Questões 2012, nível 1, problema 7) Com palitos de fósforo formamos algarismos, conforme a figura. Deste modo, para escrever o número 188, usamos 16 palitos.



César escreveu o maior número que é possível escrever com exatamente 13 palitos. Qual é a soma dos algarismos do número que César escreveu?

(a) 8 (b) 9 (c) 11 (d) 13 (e) 15

**Exercício 19:** (Banco de Questões 2012, nível 1, problema 2) Joãozinho coleciona números naturais cujo algarismo das unidades é a soma dos outros algarismos. Por exemplo, ele colecionou 10023, pois $1+0+0+2 = 3$.

(a) Na coleção de Joãozinho há um número que tem 4 algarismos e cujo algarismo das unidades é 1. Que número é este?

(b) Qual é o maior número sem o algarismo 0 que pode aparecer na coleção?

(c) Qual é o maior número sem algarismos repetidos que pode aparecer na coleção?

**Exercício 20:** (Banco de Questões 2006, nível 1, lista 1, problema 3) Considere dois números naturais, cada um deles com três algarismos diferentes. O maior deles só tem algarismos pares e o menor só tem algarismos ímpares. Se a diferença entre eles é a maior possível, qual é esta diferença?

Solução. Para que a diferença seja a maior possível devemos escolher o maior número de 3 algarismos pares diferentes e o menor número de 3 algarismos ímpares diferentes. O maior número de 3 algarismos pares diferentes é 864 e o menor número de 3 algarismos ímpares diferentes é 135. A diferença entre eles é $864 - 135 = 729$.

**Exercício 21:** (Banco de Questões 2009, nível 1, lista 4, problema 2) Um número de 6 algarismos começa por 1. Se deslocamos este algarismo

1 da primeira posição para a última à direita, obtemos um novo número de 6 algarismos que é o triplo do número de partida. Qual é este número?

Solução. O problema é determinar os algarismos $a$, $b$, $c$, $d$ e $e$ tais que o número $abcde1$ (de 6 algarismos) seja o triplo do número $1abcde$ de 6 algarismos.

$$\begin{array}{r} 1\,a\,b\,c\,d\,e \\ \times\ 3 \\ \hline a\,b\,c\,d\,e\,1 \end{array}$$

De início vemos que $e = 7$, e a partir daí podemos ir descobrindo cada um dos algarismos, conforme indicado na sequência a seguir:

$$\begin{array}{r} 1\,a\,b\,c\,d\,7 \\ \times\ 3 \\ \hline a\,b\,c\,d\,7\,1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 1\,a\,b\,c\,5\,7 \\ \times\ 3 \\ \hline a\,b\,c\,5\,7\,1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 1\,a\,b\,8\,5\,7 \\ \times\ 3 \\ \hline a\,b\,8\,5\,7\,1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 1\,a\,2\,8\,5\,7 \\ \times\ 3 \\ \hline a\,2\,8\,5\,7\,1 \end{array}$$

Portanto, $a = 4$ e o número de partida é 142857.

Vejamos agora alguns exercícios retirados da Apostila 1.

**Exercício 22:** (Apostila 1, Problema 2.2) Fixe três algarismos distintos e diferentes de zero. Forme os seis números com dois algarismos distintos tomados entre os algarismos fixados. Mostre que a soma destes números é igual a 22 vezes a soma dos três algarismos fixados.

Solução. Como este problema pode ser um pouco mais complicado, sugerimos que você comece com um exemplo numérico. Por exemplo, com os algarismos 1, 2 e 3 podemos formar os números 12, 13, 21, 23, 31 e 32. A soma destes números é igual a 132, e a soma dos algarismos dados é igual a $1 + 2 + 3 = 6$. Observe que o resultado enunciado no exercício é verdadeiro pois $22 \times 6 = 132$.

Agora vamos para o caso geral. Suponhamos que os algarismos escolhidos são $a$, $b$ e $c$. Com estes algarismos formamos os seguintes números de 2 algarismos:

$$ab = 10a + b$$

$$ac = 10a + c$$

$$ba = 10b + a$$

$$bc = 10b + c$$

$$ca = 10c + a$$

$$cb = 10c + b$$

Somando estes números, somando os lados esquerdos e os lados direitos destas igualdades, obtemos

$$ab + ac + ba + bc + ca + cb = 22a + 22b + 22c = 22(a + b + c).$$

**Exercício 23:** (Apostila 1, Problema 2.4) Qual é o menor número de dois algarismos? E qual é o maior? Quantos são os números de dois algarismos? Quantos algarismos precisa-se para escrevê-los?

**Exercício 24:** Qual é a quantidade de elementos do conjunto $\{30,\ 31,\ 32,\ \ldots, 75\}$?

Solução. Existem várias maneiras de contar a quantidade de números no conjunto dado. Em uma delas, o aluno pode observar que existem 75 números no conjunto $\{1,\ 2,\ \ldots,\ 75\}$ e que existem 29 números em $\{1,\ 2,\ \ldots,\ 29\}$. Fazendo a diferença, concluímos que existem $75 - 29 = 46$ números no conjunto $\{30,\ 31,\ \ldots,\ 75\}$. Neste tipo de problema, alunos e professores devem verificar se está sendo bem interpretado os "três pontinhos" que sempre são utilizados nestas situações.

**Exercício 25:** Uma urna contém 145 bolinhas numeradas sequencialmente. Se a primeira bolinha é a de número 347, qual é o número da última bolinha?

Solução. As 145 bolinhas estão númeradas com os números $\{347, 348, 349, \ldots, x\}$, sendo $x$ o número da última bolinha. Observe que as bolinhas também podem ser numeradas do seguinte modo:

- $1^{\underline{a}}$ bolinha: 347.
- $2^{\underline{a}}$ bolinha: $348 = 347 + 1$.
- $3^{\underline{a}}$ bolinha: $349 = 347 + 2$.
- $4^{\underline{a}}$ bolinha: $350 = 347 + 3$.
- E assim por diante até a última bolinha. Como existem 145 bolinhas na urna, por analogia, vemos que o número desta bolinha deve ser igual a $347 + 144 = 491$.

**Exercício 26:** (Apostila 1, Problema 2.5) Quantos algarismos são usados para numerar um livro de 300 páginas?

Solução.

- Das páginas 1 até 9 são utilizados 9 algarismos.
- Das páginas 10 até 99 existem 90 números com dois algarismos, totalizando aqui $2 \times 90 = 180$ algarismos.
- Para numerar as páginas de 100 a 300 são necessários 201 números de três algarismos cada, totalizando $3 \times 201 = 603$ algarismos.

Portanto para numerar as 300 páginas do livro são necessários $9 + 180 + 603 = 792$ algarismos.

**Exercício 27:** Domingos usou 1002 algarismos para numerar as páginas do livro que acabou de escrever. Quantas páginas tem o livro do Domingos?

Solução.

- Das páginas 1 até 9 são utilizados 9 algarismos.
- Das páginas 10 até 99 existem 90 números com dois algarismos, totalizando aqui $2 \times 90 = 180$ algarismos. Assim, nas páginas com 1 ou 2 algarismos são utilizados $9 + 180 = 189$ algarismos.
- Das páginas 100 até 999 existem 900 números com três algarismos, totalizando aqui $3 \times 900 = 2700$ algarismos. Como $189 < 1002 < 2700$ concluímos que a última página do livro de Domingos é um número de três algarismos.
- Efetuando a diferença $1002 - 189 = 813$, vemos que foram gastos 813 algarismos em números de 3 algarismos. Dividindo por três, vemos que o livro de Domingos possui $\frac{813}{3} = 271$ páginas com três algarismos.
- Como a primeira página de três algarismos é o número 100, e como existem 271 páginas com três algarismos, concluímos que a última página do livro de Domingos é a de número $100 + 271 - 1 = 370$.

## 1.3 Base binária: problemas de pesagens com balanças

Comparar o sistema decimal de numeração com outras bases numéricas parece ser uma boa ideia para garantir que os alunos compreendam