Roteiro de Estudos – OBMEP NA ESCOLA
Grupo N1 – Ciclo 2

Em 2017 o Planejamento Acadêmico do Programa OBMEP na Escola prevê a realização de 7 ciclos de estudos com duração de quatro semanas cada um. Em cada ciclo serão desenvolvidos estudos sobre conteúdos específicos de acordo com o seguinte esquema:

- **1ª semana**: encontro de formação entre os coordenadores e os professores da Educação Básica que atuam no Programa OBMEP na Escola.
- **2ª semana**: (encontro 1) aula presencial de quatro horas ministrada por cada professor para a sua turma de alunos convidados.
- **3ª semana**: Período destinado para estudo dos alunos e preparação dos professores.
- **4ª semana**: (encontro 2) aula presencial de quatro horas ministrada por cada professor para a sua turma de alunos convidados.

Neste roteiro de estudos vamos apresentar os conteúdos que devem ser estudados neste segundo ciclo do grupo N1 além de sugerir atividades para coordenadores, professores e alunos.

1ª semana: encontro de formação (Professores da Educação Básica e Coordenadores)

No início de todos os ciclos, a primeira atividade que deve ser realizada é o encontro de formação entre professores e coordenadores. Nesse encontro que antecede as aulas que serão ministradas para os alunos, espera-se que sejam discutidos os conteúdos, os exercícios, as estratégias para o desenvolvimento das aulas e os materiais de apoio ao ensino que foram disponibilizados. Então, neste encontro de formação, devem ser discutidos todos os conteúdos dos encontros 1 e 2 descritos logo a seguir. Espera-se que após este encontro de formação cada professor da escola básica se sinta mais seguro e preparado para ministrar as aulas para a sua turma de alunos convidados.

ENCONTRO 1 – OBMEP NA ESCOLA – N1 – ciclo 2

2ª semana: aula para alunos convidados

Assuntos a serem abordados:

- Razões e proporções
- Grandezas diretamente e inversamente proporcionais
- Regra de três simples e composta

Neste encontro recomendamos fortemente que sejam assistidas as videoaulas e sejam baixados todos os materiais teóricos e os cadernos de exercícios do módulo razões e proporções da 7ª série do Portal da Matemática. Logo abaixo existem links rápidos para estes materiais que fazem parte integrante deste roteiro de estudos.

Materiais para download obrigatório:

- Material teórico: a noção de razão e exercícios
- Caderno de exercícios: a noção de razão e exercícios

- Material teórico: proporções e conceitos correlatos
- Caderno de exercícios: proporções e conceitos correlatos

- Caderno de exercícios: números diretamente e inversamente proporcionais

- Caderno de exercícios: regra de 3 simples e composta

- Caderno de exercícios: exercícios de regra de 3

Videoaulas do Módulo razões e proporções da 7ª série do Portal da Matemática.

- A noção de razão e exercícios
  - Razões
  - Exercícios sobre razões 1
  - Exercícios sobre razões 2
  - Exercícios sobre razões 3

- Proporções e conceitos relacionados
  - Proporções
  - Proporções 2

- Números diretamente e inversamente proporcionais
  - Números diretamente proporcionais
  - Números inversamente proporcionais

- Regra de 3 simples e composta
  - Rega de 3 simples
  - Regra de 3 composta

- Exercícios de regra de 3
  - Método de solução de problemas para regra de 3 composta
  - Exercícios de regra de 3 composta

Observação:

Todo o estudo proposto para este Encontro 1 está baseado nas videoaulas, nos materiais teóricos e nos cadernos de exercícios indicados logo acima. Durante a aula de quarto horas com os alunos, é claro que o professor poderá explorar apenas uma pequena parte de todos esses materiais. Entretanto, o professor deve indicar esses materiais para os alunos aprofundarem os seus estudos em casa, principalmente durante a semana de estudos, quando os alunos poderão assistir as videoaulas e poderão tentar resolver exercícios cujas soluções estão disponíveis no Portal da Matemática.

ENUNCIADOS

No que segue, apresentamos uma lista com problemas que devem ser utilizados para direcionar o estudo da aula com os alunos convidados. Esses exercícios devem ser trabalhados segundo a metodologia do ensino da matemática através da resolução de problemas e as discussões desses exercícios devem motivar o estudo dos conteúdos propostos para esta aula.

Exercício 1. Um caminhão pode levar 300 sacos de cimento ou 7290 tijolos. Se o veículo já foi carregado com 100 sacos de cimento, quantos tijolos ainda podem ser colocados no caminhão?

Exercício 2. Um atleta dá 6 volta numa pista em 24 minutos, mantendo velocidade constante. Quantas voltas ele dará em duas horas?

Exercício 3. (XXII OBM – 2000 – 1ª fase – N1Q8) Um litro de álcool custa R$ 0,75. O carro de Henrique percorre 25 km com 3 litros de álcool. Quantos reais serão gastos em álcool para percorrer 600 km?

Exercício 4. (OBMEP 2011 – 1ª fase – N2Q15) Alvino está a meio quilômetro da praia quando começa a entrar água em seu barco, a 40 litros por minuto. O barco pode suportar, no máximo, 150 litros de água sem afundar. A velocidade do barco é 4 quilômetros por hora. Em média, no mínimo, quantos litros de água por minuto Alvino deve tirar do barco para chegar à praia?

Exercício 5. Rodando a 60 km/h, um ônibus faz um percurso em 45 minutos. Em quanto tempo o ônibus faria o mesmo percurso trafegando a 80 km/h? Dê a sua resposta em minutos e segundos.

Exercícios 6. Dois copos de suco, de mesmos volumes, foram feitos a partir de uma mistura de água e polpa de fruta. No primeiro copo, a razão entre a polpa e a água utilizadas foi igual a 1:2, enquanto no segundo copo esta mesma razão foi de 3:4. Ao misturarmos estes dois copos em uma jarra, qual será a razão entre polpa e água?

Exercício 7. Uma torneira enche um tanque em 12 horas. Uma outra torneira enche este mesmo tanque em 15 horas. Estando o tanque vazio e abrindo-se as duas torneiras no mesmo instante, em quanto tempo o reservatório ficará cheio?

Exercício 8. Um reservatório é alimentado por duas torneiras que o enchem em 6 horas. Se a primeira torneira, sozinha, enche o tanque em 10 horas, em quanto tempo a segunda torneira, funcionando sozinha, deixará o reservatório cheio?

Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA – N1 – ciclo 2 – Encontro 1
SOLUÇÕES e COMENTÁRIOS

Solução do exercício 1. Este exercício está no Portal da Matemática – 7ª série – Módulo: razões e proporções – Aula: a noção de razão e exercícios – material teórico – exercício 6.

Observe que 300 sacos de cimento correspondem à capacidade total do caminhão. Assim, quando este é carregado com 100 sacos, $\frac{1}{3}$ de sua capacidade terá sido utilizada, restando ainda $\frac{2}{3}$. Então o caminhão ainda pode carregar $\frac{2}{3}$ da carga máxima de tijolos. Como $\frac{2}{3} \times 7290 = 4860$, concluímos que ainda podem ser colocados 4860 tijolos no caminhão.

Solução do exercício 2. Este exercício está no Portal da Matemática – 7ª série – Módulo: razões e proporções – Aula: exercícios de regra de 3 – caderno de exercícios – exercício 1.

Neste exercício temos duas grandezas diretamente proporcionais, a saber, a velocidade e o número de voltas. Utilizando apenas minutos, vamos dizer que duas horas corresponde a 120 minutos. Daí podemos montar a proporção $\frac{6}{24} = \frac{x}{120}$ e daí podemos concluir que $x = 30$. Portanto em duas horas o atleta dá 30 voltas na pista.

Solução do exercício 3. Se cada litro de álcool custa R$ 0,75 então para percorrer 25 km são gastos $3\times 0{,}75=2{,}25$ reais. Agora como a distância percorrida é diretamente proporcional ao gasto em reais, podemos montar a proporção $\frac{x}{600}=\frac{2{,}25}{25}$. Daí segue que $x=54$. Portanto, para percorrer 600 km serão gastos R$ 54,00 de álcool.

Solução do exercício 4. Alvino está a meio quilômetro da praia a uma velocidade de 4 quilômetros por hora. Sendo assim, ele precisa de 0,5÷4=0,125 horas, ou seja, 0,125×60=7,5 minutos, para alcançar a praia. Como a água entra no barco a 40 litros por minuto, até Alvino chegar à praia 40×7,5=300 litros de água terão entrado no barco. Como o barco suporta 150 litros sem afundar, Alvino terá que tirar 300-150=150 litros de água do barco em 7,5 minutos, ou seja, 150÷7,5=20 litros por minuto.

Solução do exercício 5. Neste exercício temos duas grandezas inversamente proporcionais, a saber, a velocidade média e o tempo do percurso. De fato, como $velocidade=\frac{espaço}{tempo}$ temos que para um mesmo percurso, o produto $velocidade\times tempo$ é uma constante que é igual ao espaço percorrido.

Para resolver o exercício, devemos tomar cuidado pois no enunciado aparecem duas unidades de medida para a grandeza “tempo”: esta grandeza está medida em horas e em minutos. Vamos trabalhar apenas com horas. Para isso, em vez de utilizar 45 minutos vamos usar $\frac{3}{4}$ de hora.

Viajando a 60 km/h, o ônibus gasta $\frac{3}{4}$ de hora para completar o percurso. Logo a distância percorrida é igual a $60\times\frac{3}{4}=45$ km. Agora, se o ônibus se deslocar a 80 km/h, para percorre esta mesma distância, ele gastará um tempo t, em horas, tal que $80\times t=45$. Ou seja, $t=\frac{45}{80}=\frac{9}{16}$ de uma hora.

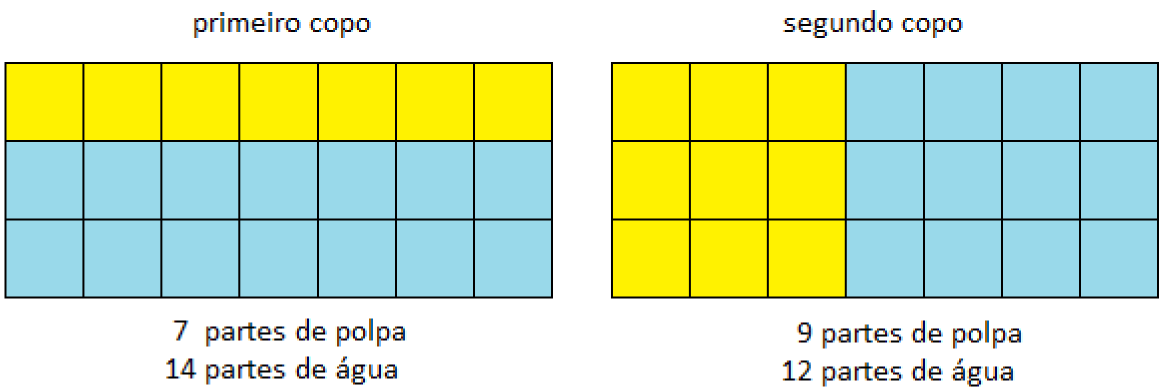
Como uma hora tem 60 minutos, $\frac{9}{16}$ de uma hora corresponde a $\frac{9}{16}\times 60=\frac{135}{4}=33+\frac{3}{4}$ minutos. Como $\frac{3}{4}$ de um minuto corresponde a 45 segundos, concluímos que o ônibus gastará 33 minutos e 45 segundos para fazer o mesmo percurso a 80 km/h.

Solução do exercício 6. Este exercício está no Portal da Matemática – 7ª série – Módulo: razões e proporções – Aula: proporções e conceitos relacionados – material teórico – exemplo 5.

No primeiro copo a razão entre polpa e água é igual a 1:2. Isto significa dizer que se o copo está dividido em 3 partes iguais, então 1 parte é de polpa e 2 partes são de água. Portanto $\frac{1}{3}$ do copo é de polpa e o restante $\frac{2}{3}$ do copo é de água.

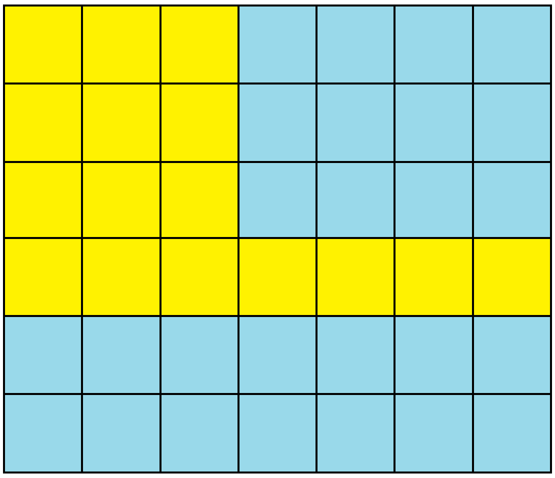
Já no outro copo, como esta razão é igual a 3:4, então se o copo está dividido em 7 partes iguais, então 3 partes são de polpa e 4 partes são de água. Logo $\frac{3}{7}$ do copo é de polpa e o restante $\frac{4}{7}$ do copo é de água.

Para poder trabalhar melhor com essas razões, vamos imaginar que os dois copos estão divididos na mesma quantidade de partes. Como um copo está dividido em 3 partes e o outro está dividido em 7 partes, o melhor número a considerar é o mmc(3,7)=21. Então se pensamos que o primeiro copo está dividido em 21 partes iguais, então $\frac{1}{3}\times 21=7$ partes são de polpa e $\frac{2}{3}\times 21=14$ partes são de água. Para o segundo copo $\frac{3}{7}\times 21=9$ partes são de polpa e $\frac{4}{7}\times 21=12$ partes são de água.



Misturando os dois copos, obtemos um volume que pode ser dividido em 21+21=42 partes iguais, sendo que 7+9=16 partes são de polpa e 14+12=26 partes são de água. Logo $\frac{16}{42}=\frac{8}{21}$ da mistura é de polpa e o restante $\frac{26}{42}=\frac{13}{21}$ da mistura é de água. Nesta mistura a razão entre polpa e água é igual a 16:26 ou, se preferir, 8:13.

mistura



16 partes de polpa
26 partes de água

Solução do exercício 7. Se uma torneira enche o tanque em 12 horas, então ela enche $\frac{1}{12}$ do tanque a cada hora. Do mesmo modo, se a outra torneira enche o tanque em 15 horas, então ela enche $\frac{1}{15}$ do tanque a cada hora. Se elas estão abertas simultaneamente, então a cada hora elas enchem $\frac{1}{12}+\frac{1}{15}=\frac{3}{20}$ do tanque. Portanto para encher o tanque com as duas torneiras abertas são necessárias $\frac{20}{3}$ horas. Como $\frac{20}{3}=6+\frac{2}{3}$ então são necessárias 6 horas e mais $\frac{2}{3}$ de uma hora. Como uma hora possui 60 minutos, $\frac{2}{3}$ de uma hora corresponde a $\frac{2}{3}\times 60=40$ minutos. Portanto, para encher o tanque são necessárias 6 horas e 40 minutos.

Solução do exercício 8. Se a primeira torneira enche o tanque em 10 horas, então ela enche $\frac{1}{10}$ do tanque a cada hora. Ficando aberta por 6 horas, esta torneira terá enchido $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ do tanque. Como o tanque ficou cheio com as duas torneiras abertas por 6 horas, vemos que o restante $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$ do tanque foi completado com as águas da segunda torneira. Logo a segunda torneira preenche $\frac{2}{5}$ do tanque em 6 horas. Isto implica que esta torneira enche $\frac{1}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{15}$ do tanque a cada hora. Então, para a segunda torneira, sozinha, encher o tanque são necessárias 15 horas.

ENCONTRO 2 – OBMEP NA ESCOLA – N1 – ciclo 2

4ª semana: aula para alunos convidados

Assuntos a serem abordados: **Contagem**

- Contagem através de listagens e de árvores de possibilidades.
- Princípios aditivo e multiplicativo.
- Resolução de exercícios.

Videoaulas do Portal da Matemática:

2º ano do ensino médio – princípios básicos de contagem – princípio fundamental da contagem

- Princípio fundamental da contagem
  https://www.youtube.com/watch?v=ReSV1ZHR0iA
- Exercícios sobre o princípio fundamental da contagem – parte 1
  https://www.youtube.com/watch?v=XZM5KGfyAwY
- Exercícios sobre o princípio fundamental da contagem – parte 2
  https://www.youtube.com/watch?v=1L2W0ENxexI

- Videoaulas no canal PICOBMEP no Youtube

Na parte de Contagem do canal picomep no Youtube, vídeo 1 e vídeo 2.

Materiais de apoio a aula disponíveis no Portal da Matemática

- 2º ano do ensino médio – princípios básicos de contagem – princípio fundamental de contagem – material teórico:
  http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/5yr1740zquo8s.pdf
- 2º ano do ensino médio – princípios básicos de contagem – princípio fundamental de contagem – caderno de exercícios:
  http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/cernvmc6v3ks4.pdf

Referência bibliográfica importante

Apostila 2 do PIC – Métodos de contagem e probabilidade – Paulo Cezar Pinto Carvalho.

1. Introdução

A apostila 2 do PIC ``métodos de contagem e probabilidade'' do professor Paulo Cezar Pinto Carvalho é a principal referência bibliográfica para este encontro. No capítulo 1 desta apostila são apresentadas várias sugestões de como raciocinar sobre problemas de contagem. Sugerimos assim, que os Professores e os Coordenadores leiam esta apostila e tentem utilizá-la nas aulas para os alunos.

Diferentemente dos roteiros já disponibilizados, neste, além da lista de exercícios para serem trabalhados em sala de aula, também vamos apresentar alguns exemplos resolvidos para ilustrar a metodologia que está sendo apresentada para a solução de problemas de contagem. Os Professores e os Coordenadores devem pensar na melhor estratégia para utilizar esses exemplos.

2. O Princípio Aditivo

Neste encontro pretendemos ensinar estratégias para a resolução de problemas de contagem através da análise do problema, da organização e do uso de raciocínios simples e, o que mais importante, não vamos deduzir nem utilizar fórmulas prontas que exigem memorização e ainda podem ser utilizadas em situações equivocadas. Os principais resultados que serão utilizados nas soluções dos problemas de contagem apresentados no OBMEP na Escola e no PIC são o princípio aditivo e o princípio multiplicativo.

O princípio aditivo é utilizado cotidianamente quando fazemos uma contagem e a separamos em casos. Por exemplo, para contar quantos são os alunos que estão em uma sala de aula, podemos contar os meninos e podemos contar as meninas. O número de alunos na sala será a soma da quantidade de meninos e de meninas. Do mesmo modo, se temos uma pilha de cartas de baralhos e queremos contar essas cartas, podemos separar por nipe (paus, copas, espadas e ouros) e depois podemos somar as quantidades de cartas de cada nipe.

Para que esta contagem separada em casos esteja correta é necessário que:

- os casos cubram todas as possibilidades, ou seja, não se pode esquecer de contar nada que deveria ser contado.
- os casos devem ser disjuntos, ou seja, nada pode ser contado mais de uma vez.

Traduzindo estas condições para uma linguagem mais formal, o que está sendo dito é o seguinte: se temos um conjunto escrito como uma união de dois subconjuntos disjuntos, então a quantidade de elementos do conjunto dado é a soma das quantidades de elementos desses dois subconjuntos.

> *Princípio Aditivo.* Sejam A e B conjuntos disjuntos, isto é, conjuntos com interseção vazia. Se A possui *m* elementos e se B possui *n* elementos, então a união $A \cup B$ possui *m+n* elementos.

Por exemplo, se desejamos contar quantos são os alunos em uma sala de aula, vamos representar por A o conjunto dos meninos e vamos representar por B o conjunto das meninas desta sala. É evidente que a sala de aula é a união $A \cup B$. Como a interseção $A \cap B$ é vazia, então a quantidade de elementos em $A \cup B$ é igual à soma da quantidade de elementos em A com a quantidade de elementos em B. Ou seja, é a quantidade de meninos mais a quantidade de meninas.

Exemplo 1. Quantos são os números inteiros entre 1 e 20 que são múltiplos de 3 ou múltiplos de 7?

Solução. Existem 6 múltiplos de 3 entre 1 e 20, a saber {3, 6, 9, 12, 15, 18} e existem 2 múltiplos de 7 neste conjunto, a saber {7, 14}. Como esses conjuntos são disjuntos, então existem 6+2=8 múltiplos de 3 ou de 7 entre 1 e 20.

Exemplo 2. Em uma escola, 153 alunos estudam pela manhã, outros 92 estudam a tarde e outros 136 estudam a noite. Quantos alunos desta escola estudam pela manhã ou à noite?

Solução. Pela manhã estudam 153 alunos e a noite estudam 136 alunos. Como são alunos diferentes, o total de alunos que estudam de manhã ou a noite é igual a 153+136=289.

De outro modo o princípio aditivo também pode ser enunciado do seguinte modo.

Princípio Aditivo. Suponha que um evento *X* possa ocorrer de *x* maneiras possíveis e que um evento distinto *Y* possa ocorrer de *y* maneiras possíveis. Então *X* ou *Y* pode ocorrer de *x+y* maneiras diferentes.

O princípio aditivo enunciado logo acima pode ser generalizado para situações em que um conjunto está escrito como a união de mais de dois subconjuntos disjuntos. Por exemplo, esta pode ser a situação de uma pilha de cartas de um baralho. Podemos chamar de A o conjunto das cartas de paus, de B o conjunto das cartas de copas, de C o conjunto das cartas de espadas e de D o conjunto das cartas de ouros. Cada carta da pilha está em um desses conjuntos. Logo se contamos os elementos de A, B, C e D não esquecemos de contar nenhuma carta. Isto significa que a pilha de cartas é a união $A \cup B \cup C \cup D$. E como uma carta possui um único nipe, ou seja, como $A \cap B \cap C \cap D = \varnothing$, se contamos os elementos de A, B, C e D então contamos cada carta uma única vez. Deste modo, a quantidade de cartas na pilha é a soma das quantidades de elementos dos conjuntos A, B, C e D.

Exemplo 3. Maria é muito indecisa. Ela pretende sair com suas amigas e está pensando em qual roupa vestir. Ela pode combinar três blusas diferentes com duas saias diferentes. De quantas maneiras diferentes Maria pode se vestir?

Solução. Sejam B_1, B_2 e B_3 as blusas de Maria. Agora vamos representar por A, B e C os conjuntos das maneiras de Maria se vestir, respectivamente, com as blusas B_1, B_2 e B_3. Cada um desses conjuntos possui dois elementos, pois cada blusa pode ser combinada com as duas saias. A união $A \cup B \cup C$ contém todas as maneiras de Maria combinar uma blusa com uma saia. Como os conjuntos A, B e C não possuem interseção, então o conjunto $A \cup B \cup C$ possui 2+2+2=6 elementos. Veremos na próxima seção que esta solução está muito próxima do princípio multiplicativo.

3. Princípio Multiplicativo

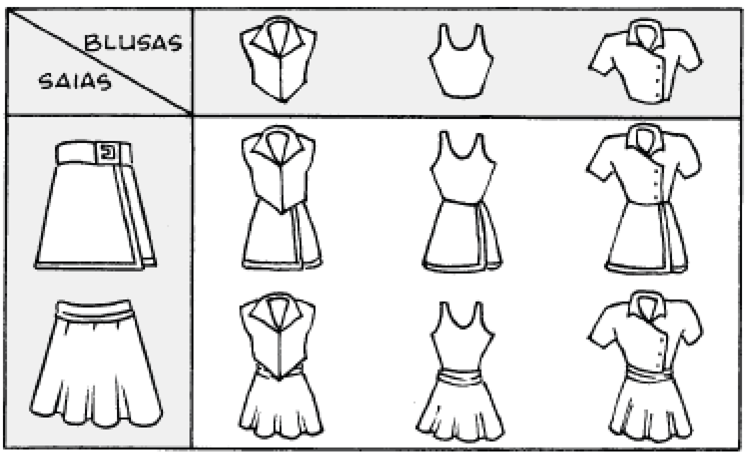
Antes de apresentar formalmente o princípio multiplicativo, vamos explorar alguns exemplos. Nas soluções destes primeiros exemplos sugerimos que sejam listadas todas as possibilidades e que a contagem final seja relacionada com uma multiplicação. Esperamos que esta atitude ajude no entendimento do princípio multiplicativo.

Exemplo 4. Maria é muito indecisa. Ela pretende sair com suas amigas e está pensando em qual roupa vestir. Ela pode combinar três blusas diferentes com duas saias diferentes. De quantas maneiras diferentes Maria pode se vestir?

Solução: Vamos representar por S_1 e S_2 as duas saias de Maria. Podemos listar todas as combinações possíveis.

- Se ela escolheu a saia S_1, então ela pode se vestir de três modos diferentes, vestindo esta saia com cada uma das três blusas.
- De modo análogo, se ela escolheu a saia S_2, ela também pode se vestir de três modos diferentes, vestindo esta saia com cada uma das três blusas.

Então, pelo princípio aditivo, ao todo ela pode se vestir de 3+3=6 modos diferentes. Veja estas possibilidades na figura a seguir.



Comentário: A resposta 3+3=6 também pode ser escrita como $2\times 3=6$. Neste caso podemos raciocinar assim. Para a escolha da saia temos 2 possibilidades. Uma vez escolhida a saia, temos 3 blusas para escolher. Então ao todo temos $2\times 3=6$, pois temos uma soma de duas parcelas iguais a três.

Exemplo 5. Quantos são os números de dois algarismos distintos que podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3 e 4?

Solução: Para resolver este problema podemos listar todas as possibilidades.

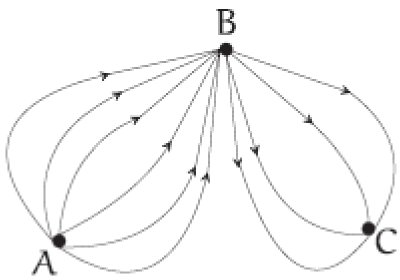
- Se o número começa com o algarismo 1 temos: 12, 13 e 14. São três possibilidades.
- Se o número começa com o algarismo 2 temos: 21, 23 e 24. São três possibilidades.
- Se o número começa com o algarismo 3 temos: 31, 32 e 34. São três possibilidades.
- Se o número começa com o algarismo 4 temos: 41, 42 e 43. São três possibilidades.

Então ao todo temos 3+3+3+3=12 números possíveis.

	1	2	3	4
1		12	13	14
2	21		23	24
3	31	32		34
4	41	42	43	

Comentário: Do jeito como a solução foi organizada, a contagem de todas estas possibilidades também pode ser pensada assim. Para a escolha do primeiro algarismo temos 4 possibilidade (são as quatro linhas da tabela). Uma vez escolhido este primeiro algarismo, sobram 3 possibilidades para a escolha do algarismo seguinte (são os números coloridos das três colunas em cada linha). Daí o total de possibilidades é igual ao produto $4\times 3=12$ pois temos uma soma de quatro parcelas iguais a três.

Exemplo 6. (Fomin, capítulo 2) No País das Maravilhas existem três cidades A, B e C. Existem seis estradas ligando A a B e quatro estradas ligando B a C. De quantas maneiras é possível dirigir de A a C?



Solução. Vamos numerar as cidades de A até B com os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Vamos numerar as cidade de B até C também com números 1, 2, 3 e 4. E vamos representar um caminho de A até C como, por exemplo assim 5-3 em que pegamos a estrada 5 para ir de A até B e pegamos a estrada 3 para ir de B até C.

- Se a primeira estrada é a 1, então podemos fazer quatro percursos diferentes: 1-1, 1-2, 1-3, 1-4.
- Se a primeira estrada é a 2, então também podemos fazer quatro percursos diferentes: 2-1, 2-2, 2-3, 2-4.
- De modo análogo se a primeira estrada é a 3, então também podemos fazer quatro percursos diferentes: 3-1, 3-2, 3-3, 3-4.

Então para cada escolha da estrada de A até B, podemos fazer quatro percursos diferentes para sair de A e chegar até C. Como temos 6 escolhas de estradas de A até B, o número total de percursos de A até C é igual a 4+4+4+4+4+4=6x4=24.

As resoluções destes três primeiros exemplos são aplicações do princípio multiplicativo, que nada mais é do que a interpretação de multiplicação de números inteiros como uma maneira resumida de escrever uma soma de parcelas iguais.

Princípio Multiplicativo: Se uma decisão D_1 pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja esta escolha, a decisão D_2 pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D_1 e D_2 é igual ao produto pq .

Exemplo 7. Em uma sala estão 2 meninos e 3 meninas. De quantos modos diferentes podemos formar um par menino-menina para uma dança?

Solução. O menino pode ser escolhido de 2 modos diferentes e em seguida a menina pode ser escolhida de 3 modos diferentes. Daí o casal pode ser formado de $2 \times 3 = 6$ maneiras diferentes. (solução idêntica a do exemplo 4)

Exemplo 8. Quantos são os números de dois algarismos distintos?

Solução. O algarismo da dezena pode ser escolhido de 9 maneiras diferentes (pois ele não pode ser igual a zero). Depois de escolhido o algarismo da dezena, o algarismo da unidade pode ser escolhido de 9 maneiras diferentes (pois ele não pode ser igual ao algarismo da dezena). Portanto existem, 9x9=81 números de dois algarismos distintos. Observe que esses números podem ser representados em uma tabela com 9 linhas (algarismo da dezena) e com 10 colunas (algarismo da unidade), com uma diagonal apagara, correspondente aos números com dois algarismos iguais. Esta tabela possui 9x10-9=90-9=81 números com dois algarismos distintos.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	10		12	13	14	15	16	17	18	19
2	20	21		23	24	25	26	27	28	29
3	30	31	32		34	35	36	37	38	39
4	40	41	42	43		45	46	47	48	49
5	50	51	52	53	54		56	57	58	59
6	60	61	62	63	64	65		67	68	69
7	70	71	72	73	74	75	76		78	79
8	80	81	82	83	84	85	86	87		89
9	90	91	92	93	94	95	96	97	98	

Exemplo 9. Quantos são os números pares de dois algarismos distintos?

Solução 1. Existem 9 números pares de dois algarismos terminados em zero. Agora se o número não termina em zero, então ele deve terminar com 2, 4, 6, 8. Desse modo existem 4 possibilidades para a escolha do algarismo da unidade. Depois de escolhido o algarismo da unidade, o algarismo da dezena pode ser escolhido de 8 maneiras diferentes (devemos excluir o zero e o algarismo que já foi escolhido na unidade). Então existem 8x4=32 números pares de dois algarismos distintos terminados com 2, 4, 6 ou 8. Somando com os 9 que terminam com zero, obtemos um total de 32+9=41 números.

Solução 2. De outro modo, uma estratégia bastante comum utiliza em problemas de contagem é contar com excesso e depois subtrair desta contagem os casos não desejados. Neste exercício podemos contar quantos são os números pares de dois algarismos e, em seguida, subtrair a quantidade de números pares com dois algarismos iguais. Existem 45=9x5 números pares de dois algarismos (9 dígitos para a casa da dezena e 5 dígitos para a casa da unidade). Desses 45 números devemos desconsiderar os números 22, 44, 66 e 88 que possuem algarismos iguais. Portanto existem 45-4=41 números pares com dois algarismos distintos.

	0	2	4	6	8
1	10	12	14	16	18
2	20		24	26	28
3	30	32	34	36	38
4	40	42		46	48
5	50	52	54	56	58
6	60	62	64		68
7	70	72	74	76	79
8	80	82	84	86	
9	90	92	94	96	98

Nas soluções de muitos problemas de contagem pode ser necessário o uso tanto do princípio multiplicativo quanto do princípio aditivo, como ilustra o próximo exemplo.

Exemplo 10. Suponha que temos uma coleção com 5 livros de álgebra, 7 livros de combinatória e 10 livros de geometria. Se todos os livros são diferentes, de quantas maneiras podemos selecionar dois livros de assuntos diferentes?

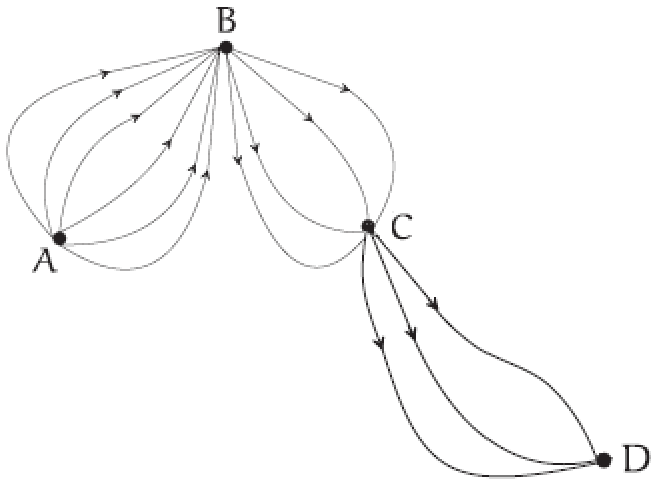
Solução. Primeiramente observe que existem três possibilidades de escolhas de dois dos três assuntos: álgebra-combinatória ou álgebra-geometria ou combinatória-geometria. Então vamos contar quantas são as escolhas em cada um desses casos:

- Álgebra-combinatória: 5x7=35
- Álgebra-geometria: 5x10=50
- Combinatória-geometria: 7x10=70

Ao todo vemos que existem 35+50+70=155 escolhas diferentes.

O princípio multiplicativo pode ser generalizado para uma situação em que mais de duas decisões devem ser tomadas. Se escolhas diferentes de uma decisão não modificar a quantidade de escolhas de uma outra decisão, então para saber o número total de possibilidades basta multiplicar o número de escolhas de cada uma das decisões.

Exemplo 11. Existem 6 estradas ligando as cidades A e B; existem 4 estradas ligando as cidades B e C; existem 3 estradas ligando as cidades C e D. De quantas maneiras é possível dirigir de A até D?

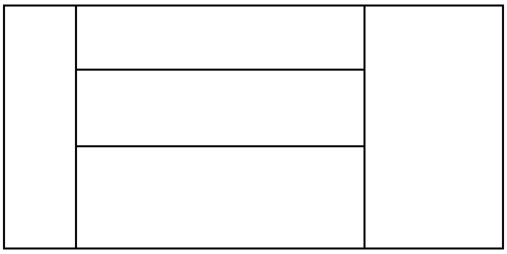


Solução: Para o trecho AB podemos escolher uma entre 6 estradas disponíveis. Uma vez escolhida esta estrada, para o trecho BC, temos 4 escolhas. Depois de escolhida esta estrada, temos 3 possibilidades para o trecho CD. Portanto temos $6\times4\times3=72$ modos diferentes de dirigir de A até D.

Exemplo 12. Quantos são os números naturais de três algarismos distintos?

Solução: Vamos escolher, sucessivamente, os três algarismos, começando com o da esquerda. O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois ele não pode ser igual a zero. O segundo algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual ao primeiro algarismo. O terceiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos, pois ele não pode ser igual nem ao primeiro nem ao segundo algarismo. A resposta é $9 \times 9 \times 8 = 648$.

Exemplo 13. O retângulo a seguir está dividido em 5 regiões. Se temos 5 cores a nossa disposição, de quantas maneiras podemos colorir este retângulo de modo que cada região receba uma cor e regiões adjacentes sejam coloridas com cores diferentes?



Solução: Devemos considerar dois casos, analisando separadamente se as regiões da esquerda e da direita são coloridas da mesma cor ou com cores diferentes. Suponhamos então que as regiões da esquerda e da direta são coloridas com a mesma cor. Neste caso:

- A região da esquerda pode ser colorida com 5 cores.
- A região da direita pode ser colorida de uma única cor: a mesma cor da região da esquerda.
- A faixa horizontal de cima pode ser colorida com 4 cores, pois não podemos repetir a cor das regiões laterais.
- A faixa horizontal do meio pode ser colorida com 3 cores pois devemos evitar a cor das regiões laterais e a cor da faixa horizontal de cima.
- A faixa horizontal de baixo também pode ser colorida com 3 cores pois devemos evitar a cor das regiões laterais e a cor da faixa horizontal do meio.

Neste caso obtemos $5 \times 1 \times 4 \times 3 \times 3 = 180$ possibilidades.

Suponhamos agora que as regiões da esquerda e da direta são coloridas com cores diferentes. Neste caso:

- Existem 5 opções de cores para a região da esquerda.
- Em seguida existem 4 opções de cores para a região da direita, pois ela deve ser colorida com uma cor diferente da região da esquerda.

- Daí podemos colorir a faixa horizontal de cima com 3 cores, pois devemos evitar as duas cores das regiões laterais.
- Em seguida podemos colorir a faixa horizontal do meio com 2 cores, pois devemos evitar as duas cores das regiões laterais e a cor da faixa horizontal de cima.
- Finalmente a faixa horizontal de baixo também pode ser colorida com 2 cores pois devemos evitar as duas cores das regiões laterais e a cor da faixa horizontal do meio.

Neste caso obtemos $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 240$ possibilidades. Somando, concluímos que o retângulo pode ser colorido de $180 + 240 = 420$ maneiras diferentes.

Exercício 1. Um grupo de 4 alunos (Alice, Bernado, Carolina e Daniel) tem que escolher um líder e um vice-líder para um debate.

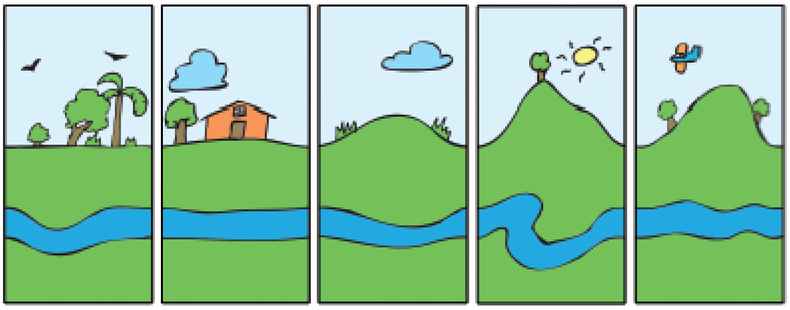
(a) Faça uma lista de todas as possíveis escolhas.
(b) Conte o número de possíveis escolhas e verifique que o Princípio Multiplicativo fornece a resposta correta.

Exercício 2. Um time de futebol de campo com 11 jogadores precisa eleger um capitão e um vice-capitão.

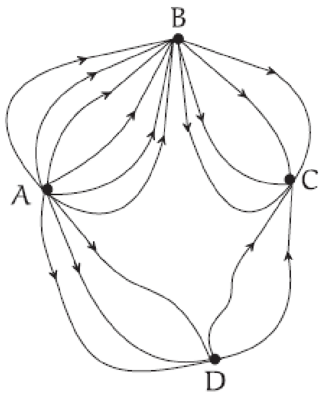
(a) De quantas maneiras esta escolha pode ser feita?
(b) Neste caso é viável listar todas estas possibilidades?

Exercício 3. (OBMEP 2011 - N2Q13 – 1ª fase) Podemos montar paisagens colocando lado a lado, em qualquer ordem, os cinco quadros da figura. Trocando a ordem dos quadros uma vez por dia, por quanto tempo, aproximadamente, é possível evitar que uma mesma paisagem se repita?

(a) uma semana
(b) um mês
(c) dois meses
(d) quatro meses
(e) seis meses



Exercício 4. A figura a seguir ilustra o mapa das estradas ligando 4 cidades. De quantas maneiras é possível dirigir de A a C?



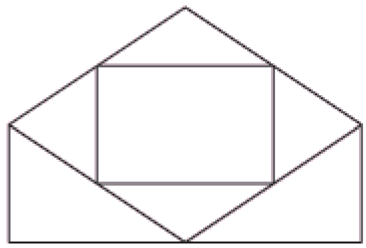
Exercício 5. Quantos são os anagramas da palavra **MALUCO** em que entre duas vogais existe uma consoante e entre duas consoantes existe uma vogal?

Exercício 6. De quantas maneiras podemos colocar dois carros diferentes em duas das seis vagas de um estacionamento?

Exercício 7. (OBMEP 2006 - N1Q7 – 1ª fase) Dois casais estão sentados em um banco de um parque, posando para uma fotografia. De quantas maneiras diferentes essas quatro pessoas podem se sentar de modo que cada marido apareça ao lado de sua esposa na fotografia?

Exercício 8. (OBMEP 2013 - N2Q19 – 1ª fase) De quantas maneiras diferentes é possível pintar a figura, de modo que cada uma das regiões seja pintada com uma das cores azul, verde ou preto e que regiões cujas bordas possuem um segmento em comum não sejam pintadas com a mesma cor?

(a) 68
(b) 96
(c) 108
(d) 120
(e) 150



Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA – N1 – ciclo 2 – Encontro 2
SOLUÇÕES e COMENTÁRIOS

Solução do exercício 1. (apostila 2, exercício 1, página 11)

(a) Os pareces (líder,vice) podem ser listados assim:

(Alice, Bernardo)	(Alice, Carolina)	(Alice, Daniel)
(Bernardo, Alice)	(Bernardo, Carolina)	(Bernardo, Daniel)
(Carolina, Alice)	(Carolina, Bernardo)	(Carolina, Daniel)
(Daniel, Alice)	(Daniel, Bernardo)	(Daniel, Carolina)

(b) Por uma contagem direta verifica-se que são 12 pares (líder, vice). Aplicando o princípio multiplicativo vemos que existe 4 escolhas para o líder. Depois de escolhido o líder, existem 3 escolhas para o vice-líder. Daí a quantidade de pares (líder, vice) é igual ao produto $4\times3=12$.

Solução do exercício 2. O capitão pode ser escolhido de 11 maneiras diferentes. Depois de escolhido o capitão, podemos escolher o vice-capitão de 10 maneiras diferentes. Daí a quantidade possível de escolhas de um par (capitão, vice) é igual a $11\times10=110$. Neste caso, como são 110 casos possíveis, pode ser bastante trabalhoso e não muito eficiente a listagem explicita de todas estas possibilidades. Quando o número total de possibilidades é muito grande, só podemos encontrar a quantidade dessas possibilidades através de algum método de contagem, como o princípio multiplicativo. Se você ainda não está convencido, liste todas as possibilidades de escolhas de 6 números para um sorteio da Mega-Sena.

Solução do exercício 3. Temos cinco posições distintas para colocarmos cinco quadros também distintos. Na primeira posição temos 5 escolhas distintas possíveis. Em seguida, na segunda posição temos 4 escolhas distintas, e assim por diante. Pelo princípio multiplicativo, podemos formar $5\times4\times3\times2\times1=120$ paisagens distintas. Como um mês tem, aproximadamente, 30 dias, podemos mudar a paisagem por aproximadamente $\frac{120}{30}=4$ meses.

Solução do exercício 4. (Fomin, capítulo 2) O percurso A-B-C pode ser percorrido de $6\times4=24$ maneiras distintas. O percurso A-D-C pode ser percorrido de $3\times2=6$ maneiras distintas. Ao todo, existem $24+6=30$ maneiras de sair da cidade A e chegar na cidade C.

Solução do exercício 5. Vamos começar observando que existem 2 possibilidades distintas para esse anagrama: ou ele começa com uma vogal, ou ele começa com uma consoante. Se é escolhida uma destas duas possibilidades, podemos colocar as 3 vogais nas 3 respectivas posições do anagrama de $3\times2\times1=6$ maneiras distintas. E em seguida, podemos colocar as 3 consoantes nas 3 posições restantes também de $3\times2\times1=6$ maneiras distintas. Pelo princípio multiplicativo, o número total de possibilidades é igual a $2\times6\times6=72$.

Solução do exercício 6. O primeiro carro pode ocupar uma das 6 vagas do estacionamento. Em seguida, o segundo carro pode ocupar uma das 5 vagas restantes. Portanto, o número total de possibilidade é igual a $6\times5=30$.

Solução do exercício 7. (OBMEP 2006 - N1Q7 – 1ª fase)

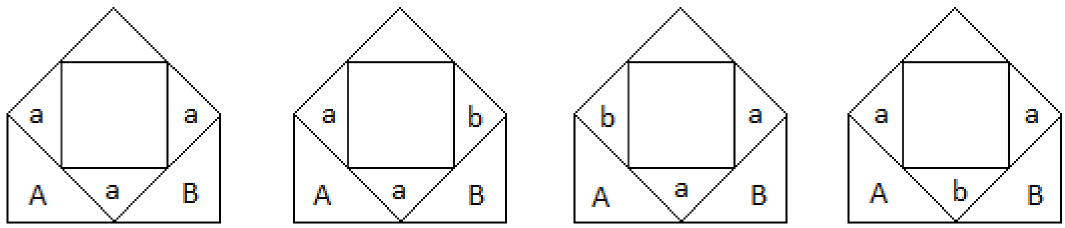
Primeira solução. Suponhamos que as posições no banco são nomeadas ordenadamente como A, B, C, D.

- No banco A pode se sentar qualquer uma das 4 pessoas.
- Depois de escolhida a pessoa que vai ocupar o banco A, no banco B só pode se sentar o cônjuge dessa pessoa. Logo existe uma única possibilidade de escolha para o banco B.
- Depois de escolhidas as pessoas dos bancos A e B, no banco C pode se sentar qualquer um do outro casal. Logo são duas possibilidades para o banco C.
- E depois de se sentarem as pessoas dos bancos A, B e C, existe uma única possibilidade para o banco D, a saber, a pessoa que ainda não se sentou.

Pelo princípio multiplicativo, existem $4\times1\times2\times1=8$ casos possíveis.

Segunda solução. São dois os casais a se sentarem no banco: C1 e C2. Existem duas escolhas para esses casais ocuparem o banco: C1-C2 (C1 a esquerda de C2) ou o contrário C2-C1 (C1 a direita de C2). Uma vez definida esta escolha, existem duas possibilidades (homem-mulher ou mulher-homem) para o casal C1 ocupar os seus dois lugares e, em seguida, também existem duas possibilidades (homem-mulher ou mulher-homem) para o casal C2 ocupar os seus dois lugares. Portanto, existem $2\times2\times2=8$ maneiras dos dois casais se sentarem no banco.

Solução do exercício 8. (OBMEP 2013 - N2Q19 – 1ª fase) Primeiramente pintamos o quadrado e o triângulo superior, o que pode ser feito de $3\times2=6$ maneiras diferentes. Uma vez isso feito, dividimos o problema em quatro casos de acordo com as cores dos triângulos menores da parte de baixo, como na figura a seguir. As letras minúsculas a e b indicam cores diferentes; notamos que como o quadrado já foi pintado, para os três triângulos menores só restam duas cores disponíveis. As letras A e B servirão apenas para denotar os triângulos maiores no que segue.



caso 1 caso 2 caso 3 caso 4

- Caso 1: temos duas escolhas para a; uma vez feita essa escolha, podemos pintar A com duas cores, bem como B. Isto pode ser feito de $2\times 2\times 2=8$ maneiras diferentes.
- Caso 2: temos duas escolhas para a e uma para b; feitas essas escolhas, podemos pintar A com duas cores e B com apenas uma. Isso pode ser feito de $2\times 1\times 2\times 1=4$ maneiras diferentes.
- Caso 3: esse caso é idêntico ao caso 2.
- Caso 4: temos duas escolhas para a e uma para b; feitas essas escolhas, só há uma possibilidade para pintar A e B. Isso pode ser feito de $2\times 1\times 1\times 1=2$ maneiras diferentes.

No total temos $6\times(8+4+4+2)=6\times 18=108$ maneiras diferentes de pintar a figura.

--- FIM ---