**Atividades**

**1.** Determine a paridade de $(123275 + 346231)^{234} + (3451 + 4532)^{542}$.

**Solução:** Como 123275, 346231 e 3451 são números ímpares podemos substítuílos por $\overline{1}$ e 542 é par substituímos por $\overline{0}$, temos então:

$$(\overline{1} + \overline{1})^{234} + (\overline{1} + \overline{0})^{542}$$

Sabemos que a soma de dois números ímpares é par e ainda, que a soma de um número par com um número ímpar é ímpar, então:

$$\overline{0}^{234} + \overline{1}^{542} = \overline{0} + \overline{1} = \overline{1}$$

Logo a soma destes números é ímpar.

**2.** Mostre que para todos $a$ inteiro e $n$ natural não nulos, os números $a$ e $a^n$ têm mesma paridade.

**Solução:** Temos aqui que $a$ é um número inteiro, então $a$ é par ou $a$ é ímpar, vamos mostrar os dois casos. Sabemos que se $a$ é um número par ele é representado por $\overline{0}$, então $a = \overline{0}$ isso implica que:

$$a^n = \overline{0}^n = \overline{0}$$

Pois um número par multiplicado por um número par $n$ vezes é par.
Caso em que $a$ é ímpar, teremos $a = \overline{1}$, então:

$$a^n = \overline{1}^n = \overline{1}$$

Pois como visto nas observações em aula, o produto entre números ímpares é ímpar.

**3.** Dado um número inteiro $a$ e dados dois números naturais $n$ e $m$, não nulos, mostre que são sempre pares os números $a^n + a^m$ e $a^n - a^m$.

**Solução:** Como na questão acima, $a$ é um número inteiro, então temos duas possibilidades, $a$ é par ou $a$ é ímpar.
Se $a$ é par, então $a^n = \overline{0}^n$ e $a^m = \overline{0}^m$, isso implica que

$$a^n + a^m = \overline{0}^n + \overline{0}^m = \overline{0} + \overline{0} = \overline{0}$$

e

$$a^n - a^m = \overline{0}^n - \overline{0}^m = \overline{0} - \overline{0} = \overline{0}$$

Logo a adição e a subtração de números pares, elevados em uma potência qualquer pertencente aos naturais será par.
Agora, se $a$ é ímpar, então $a^n = \overline{1}^n$ e $a^m = \overline{1}^m$, isso implica que

$$a^n + a^m = \overline{1}^n + \overline{1}^m = \overline{1} + \overline{1} = \overline{0}$$

e

$$a^n - a^m = \overline{1}^n - \overline{1}^m = \overline{1} - \overline{1} = \overline{0}$$

Logo a adição e a subtração de números ímpares, elevados em uma potência qualquer, pertencente aos naturais, será par.

**4.** Qual é a paridade da soma dos números naturais de 1 a 10? E de seu produto?

**Solução:**A soma dos números de um 1 a 10 é igual a $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$, vamos substituir os números pares por $\overline{0}$ e os números ímpares por $\overline{1}$, temos então:

$$\overline{1}+\overline{0}+\overline{1}+\overline{0}+\overline{1}+\overline{0}+\overline{1}+\overline{0}+\overline{1}+\overline{0}=\overline{1}$$

Logo a soma dos números de 1 a 10 é ímpar.
O produto dos números de um 1 a 10 é igual a $1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10$, vamos substituir os números pares por $\overline{0}$ e os números ímpares por $\overline{1}$, temos então:

$$\overline{1}\times\overline{0}\times\overline{1}\times\overline{0}\times\overline{1}\times\overline{0}\times\overline{1}\times\overline{0}\times\overline{1}\times\overline{0}=\overline{0}$$

Logo o produto dos números de 1 a 10 é par.

**5.** Você pode encontrar cinco números ímpares cuja soma seja 100?

**Solução:** Como os numeros ímpares são representados por $\overline{1}$, temos:

$$\overline{1}+\overline{1}+\overline{1}+\overline{1}+\overline{1}=100$$

Somando dois a dois, obtemos:

$$\overline{0}+\overline{0}+\overline{1}=100$$

Disso temos que:

$$\overline{1}=100$$

Mas isso é uma contradição, pois 100 é um número par. Logo não é possível encontrar 5 números ímpares cuja soma seja igual a 100.

**6a.** Os números de 1 a 10 estão escritos em uma linha. Pode-se colocar os sinais de "$+$" e de "$-$" entre eles de modo que o valor da expressão resultante seja igual a zero?

**Solução:** Não é possível. Imaginando que fosse possível, poderíamos separar os números dados em dois grupos com a mesma soma (basta passar todos os números com sinal negativo para o outro lado da expressão que é igual a zero). Entretanto a soma dos números naturais de 1 a 10 é igual a 55. Como este número é ímpar, não podemos separar os números dados em dois grupos que tenham a mesma soma.

**6b.** Continuando o exercício anterior, vamos imaginar que os números de 1 a 11 estão escritos em uma linha. Pode-se colocar os sinais de "$+$" e de "$-$" entre eles de modo que o valor da expressão resultante seja igual a zero?

**Solucão:** Como no caso anterior, para isto ser possível, devemos dividir os números dados em dois grupos com mesma soma. Como a soma dos números naturais de 1 a 11 é igual a 66 precisamos de dois grupos cuja soma seja igual a 33. Começando pelos maiores, observe que $11+10+9 = 30$. Daí, $11+10+9+3 = 33$. Assim, $1+2+4+5+6+7+8 = 33$ e, portanto, $1+2+4+5+6+7+8 = 11+10+9+3$. Daí obtemos $1+2-3+4+5+6+7+8-9-10-11 = 0$.

**7.** Qual é o valor da soma $1+2+3+...+2014$? Esta soma é par ou é ímpar?

**Solução:**Aqui iremos utilizar a fórmula da soma dos números naturais que é $S = \dfrac{n \times (n+1)}{2}$ para descobrirmos qual é o valor da soma $1+2+3+...+2014$, teremos então:

$$S = \frac{n \times (n+1)}{2} = \frac{2014 \times (2014+1}{2} = 1007 \times 2015 = 2029105$$

Como vimos no resultado acima esta soma é ímpar, pois o produto entre dois números ímpares, 1007 e 2015, é ímpar.

**8.** Qual é a soma dos múltiplos de 3 entre 1 e 301.

**Solução:** Primeiramente vamos identificar alguns múltiplos de 3, entre esses números, os quais são $\{3, 6, 9, 12, 15, ..., 300\}$. Pode-se observar que os múltiplos seguem um padrão, então a soma desses números é dada por:

$$3 \times (1+2+3+4+...+100)$$

Utilizando a fórmula da soma que vimos acima temos:

$$3 \times \frac{100 \times (100+1)}{2} = 3 \times \frac{100 \times 101}{2} = 3 \times 50 \times 101 = 15150$$

**9.** Um gafanhoto pula ao longo de uma linha. No seu primeiro pulo, ele anda 1 cm, no segundo 2 cm, no terceiro 3 cm, e assim sucessivamente. Cada pulo o leva para a direita ou para a esquerda. Mostre que após 1985 pulos, o gafanhoto não pode retornar a sua posicão inicial.

**Solução:** Este exercício pode ser considerado como uma aplicação dos problemas anteriores. Em cada pulo, quando o gafanhoto andar para a direita, vamos colocar um sinal“ $+$ ” na distância que ele percorreu, e quando ele andar para a esquerda vamos colocar um sinal “ $-$ ” na distância que ele percorreu no pulo. Assim, para ele retornar para a posição inicial deve ser possível colocar sinais de “ $+$ ” e de “ $-$ ” na frente e entre os números naturais de 1 até 1985 de modo que a expressão resultante seja igual a zero. Entretanto, como a soma dos números de 1 até 1985 é ímpar, concluímos que isto é impossível.