Programa de Iniciação Científica da OBMEP

Aula 1 – 6º Encontro

Algoritmo de Euclides e Cálculo de MDC

26/11/2016

1. (Iniciação à Aritmética, Lema de Euclides, pág.66)
Dados inteiros a e b, os divisores comuns de a e b são os mesmos que os divisores comuns de a e $b - c \times a$, para todo número inteiro c fixado.

1) Se d é um divisor comum de a e b.

Então $a = md$ e $b = nd$, com m e n inteiros.

Observe que d é também divisor de $b - c \times a$, pois

$$b - c \times a = nd - cmd = d(n - cm)$$

Reciprocamente, suponha que d seja divisor comum de a e de $b - c \times a$.

Logo, d é divisor comum de $b - c \times a$ e de $c \times a$ e, portanto, tem-se que d é divisor de b. Assim, d é divisor comum de a e b.

O Lema de Euclides nos diz que os divisores de comuns de a e b são os mesmos divisores comuns de a e $b - a \times c$ logo tomando o maior divisor comum em ambos os casos, obtemos a fórmula:

$$\boldsymbol{mdc(a, b) = mdc(a, b - a \times c)}$$

Algoritmo de Euclides para o cálculo do mdc:

Vamos calcular $mdc(a, b)$, onde $a = 456$ e $b = 72$.

Pelo Lema de Euclides, sabemos que o mdc de a e b é o mesmo que o de a e de b menos um múltiplo qualquer de a.

$$456 = 72 \times 6 + 24$$

Assim,

$$mdc(456,72) = mdc(72,456 - 72 \times 6) = mdc(72,24)$$

Apliquemos o mesmo argumento para $a_1 = 72$ e $b_1 = 24$:

$$72 = 24 \times 3$$

Assim,

$$mdc(72,24) = mdc(24, 72 - 24 \times 3) = mdc\ (0,24) = 24$$

logo,

$$mdc(456,72) = 24.$$

O Algoritmo de Euclides pode ser sistematizado como segue:

Quociente →		6	3
	456	72	24
Resto →		24	0

2. (Encontros de Aritmética, exercício 4, pág. 94)
Calcule o $mdc(1203,3099)$ usando a fatoração simultânea e depois calcule este mdc usando a propriedade $mdc(a,b) = mdc(a,b-a)$.

2) $mdc(1203{,}3099)$:

Observe que

$$1203 = 3 \cdot 401 \quad \text{e} \quad 3099 = 3 \cdot 1033$$

Os números 401 e 1033 são primos, por isso pode ser difícil obter a fatoração dos números dados.

Utilizando sucessivamente a igualdade $mdc(a, b) = mdc(a, b - a)$, podemos efetuar o cálculo da seguinte forma:

- $mdc(1203{,}3099) = mdc(1203{,}3099 - 1203) = mdc(1203{,}1896) =$
- $mdc(1203{,}1896) = mdc(1203{,}1896 - 1203) = mdc(1203{,}693) =$
- $mdc(1203{,}693) = mdc(693{,}1203 - 693) = mdc(693{,}510) =$
- $mdc(693{,}510) = mdc(510{,}693 - 510) = mdc(510{,}183) =$
- $mdc(510{,}183) = mdc(183{,}510 - 183) = mdc(183{,}327) =$
- $mdc(183{,}327) = mdc(183{,}327 - 183) = mdc(183{,}144) =$
- $mdc(183{,}144) = mdc(144{,}183 - 144) = mdc(144{,}39) = \mathbf{3}$

3. (Encontros de Aritmética, exercício 6, pág. 98)
Calcule $mdc(162{,}372)$.

3)

Pelo Algoritmo do MDC de Euclides temos:

Quociente →		2	3	2	1	2
	372	162	48	18	12	6
Resto →		48	18	12	6	0

Aplicando a propriedade de MDC: $mdc(a,b) = mdc(a, b-a)$, temos:

- $mdc(162{,}372) = mdc(162{,}372 - 162) = mdc(162{,}210) =$
- $mdc(162{,}210) = mdc(162{,}210 - 162) = mdc(162{,}48) =$
- $mdc(162{,}48) = mdc(48{,}162 - 48) = mdc(48{,}114) =$
- $mdc(48{,}114) = mdc(48{,}114 - 48) = mdc(48{,}66) =$
- $mdc(48{,}66) = mdc(48{,}66 - 48) = mdc(48{,}18) =$
- $mdc(48{,}18) = mdc(18{,}48 - 18) = mdc(18{,}30) =$
- $mdc(18{,}30) = mdc(18{,}30 - 18) = mdc(18{,}12) =$
- $mdc(18{,}12) = mdc(12{,}18 - 12) = mdc(12{,}6) =$ **6**

4. (Encontros de Aritmética, exercício 9, pág. 100)
Utilizando o Algoritmo de Euclides calcule:

a) $mdc(1287{,}2782)$.

b) $mdc(2616{,}3240)$.

c) $mdc(1598{,}14909)$.

4)

a) $mdc(1287{,}2782)$.

Quociente		2	6	5	3
	2782	1287	208	39	13
Resto		208	39	13	0

b) $mdc(2616{,}3240)$.

Quociente		1	4	5	5
	3240	2616	624	120	24
Resto		624	120	24	0

c) $mdc(1598,14909)$.

Quociente		9	3	31
	14 909	1598	527	17
Resto		527	17	0

5. (D. Fomin, problema 53, pág. 32) Encontre o MDC dos números $2n+13$ e $n+7$.

5) Pela propriedade de mdc, temos:

$$mdc(a,b) = mdc(b, a-b).$$

Logo,

$$mdc(2n+13, n+7) =$$

$$= mdc(n+7, 2n+13-(n+7)) =$$

$$= mdc(n+7, 2n+13-n-7) =$$

$$= mdc(n+7, n+6) =$$

$$= mdc(n+6, n+7-n-6) =$$

$$= mdc(n+6, 1) = \mathbf{1}$$

6. (D. Fomin, problema 55, pág. 32) Encontre $mdc\left(2^{100}-1, 2^{120}-1\right)$.

6) Observe inicialmente que

$$a^n - 1 = (a-1)\cdot(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + 1)$$

Para o entendimento dessa igualdade basta efetivar as distributivas à direita que teremos a expressão à esquerda.

Por outro lado, observando que

$$2^{120} - 1 = 2^{20}\cdot(2^{100} - 1) + (2^{20} - 1)$$

Então o resto da divisão de $2^{120} - 1$ por $2^{100} - 1$ é igual a $2^{20} - 1$. Assim, fazendo uso da propriedade "$mdc(a,b) = mdc(a,r), com\ a < b\ e\ r\ o\ resto\ da\ divisão\ de\ b\ por\ a$", segue que: $mdc(2^{120} - 1, 2^{100} - 1) = mdc(2^{100} - 1, 2^{20} - 1)$

Observe que, segundo a igualdade inicial, tem-se que

$2^{20} - 1$ divide $2^{100} - 1$, pois

$$2^{100} - 1 = (2^{20})^5 - 1 = (2^{10} - 1)\cdot((2^{20})^4 + (2^{20})^3 + \cdots + 1)$$

$$\text{Portanto, } mdc(2^{120} - 1, 2^{100} - 1) = 2^{20} - 1$$

7. (Encontros de Aritmética, exercício 15, pág. 104)
Quais são os valores possíveis para $mdc(7, b)$? E para os valores de $mcd(31, b)$? Se p é um número primo, quais são os possíveis valores de $mdc(p, b)$?

7) $mdc(7, b)$

Como 7 é primo temos que seus divisores são somente 1 e 7.

Assim, se b for múltiplo de 7 o mdc será 7 e se b não for múltiplo de 7 o mdc será 1.

Portanto os valores possíveis para o mdc de 7 e b são **1** ou **7.**

7) $mdc(31, b)$

Como 31 também é primo temos que seus divisores são somente 1 e 31.

Assim, se b for múltiplo de 31 o mdc será 31 e se b não for múltiplo de 31 o mdc será 1.

Portanto os valores possíveis para o mdc de 31 e b são **1** ou **31.**

7) $mdc(p, b)$

Se p é um número primo, como 7 e 31, então os únicos divisores de p são 1 e p. Como $mdc(p, b)$ é um divisor de p, concluímos que este mdc só pode ser igual a 1 ou p.

Mais ainda, $mdc(p, b) = p$ no caso de p ser um fator primo de b.

8. (Encontros de Aritmética, exercício 18, pág. 106)
Calcule $mdc(15 \cdot 42, 15 \cdot 78)$.

8) Aplicando o processo prático para o cálculo do mdc, temos:

$$\begin{array}{cc|c} 15\cdot 42, & 15\cdot 78 & 15 \\ 42, & 78 & 2 \\ 21, & 39 & 3 \\ 7, & 13 & \end{array}$$

Como 7 e 13 são primos entre si, paramos o processo e concluímos que o mdc procurado é igual a $15 \times 2 \times 3 = 15 \times 6$.

Observe que, a partir da segunda linha do cálculo acima, realizamos o cálculo do $mdc(42,78) = 6$.

Assim, podemos concluir que

$$mdc(15\cdot 42, 15\cdot 78) = 15\cdot mdc(42,78)$$

Generalizando obtemos

$$mdc(n\cdot a, n\cdot b) = n\cdot mdc(a,b)$$

9. (Banco de Questões 2010, NIQ141) O produto de dois números de dois algarismos cada é 1728. Se o máximo divisor comum deles é 12, quais são estes números?

9) Como 12 é o mdc dos dois números e cada um tem dois algarismos, os únicos candidatos são os múltiplos de 12 menores do que 100, ou seja,

$$12, 24, 36, 48, 60, 72, 84 \ e \ 96.$$

Como

$$1728 = 12 \cdot 12 \cdot 12 = 2^6 \cdot 3^3$$

Observe que os múltiplos 60 (com fator 5) e 84 (com fator 7) não são divisores de 1728. Também,

$$1728 \div 12 = 144 \qquad \text{e} \qquad 1728 \div 96 = 18$$

Temos $24 \times 72 = 36 \times 48 = 1728$

Como $mdc(24{,}72) = 24$, temos uma única solução:

$$36 \times 48 = 1728 \quad \text{e} \quad mdc(36{,}48)12$$

10. (Encontros de Aritmética, exercício 14, pág. 102)

a) Determine números a e b tais que $mdc(a, b) = 12$ e $mmc(a, b) = 90$.

b) Determine números a e b tais que $mdc(a, b) = 12$ e $mmc(a, b) = 168$.

10)

a) $mmc(a,b) = 90$ e $mdc(a,b) = 12$

Observe

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \quad \text{e} \quad 12 = 2^2 \cdot 3$$

Como o mmc é múltiplo do mdc, obrigatoriamente $mmc(a,b) = 90$ deve ser um múltiplo de $mdc(a,b) = 12$.

Como isso não ocorre para os números dados, podemos concluir que não existem números a e b tais que

$$mdc(a,b) = 12 \quad e \quad mmc(a,b) = 90$$

b) $mmc(a,b) = 168 \quad$ e $\quad mdc(a,b) = 12$

Observe

$$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \qquad \text{e} \qquad 12 = 2^2 \cdot 3$$

Como 168 é múltiplo de 12, podemos pegar $a = 12$ e $b = 168$, pois sendo um múltiplo do outro, vemos que

$$mdc(a,b) = a = 12 \quad \text{e} \quad mmc(a,b) = b = 168$$