Indução Matemática

Indução Matemática

Tópicos Adicionais

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Prove por indução que:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercício 2. Prove que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

Exercício 3. Mostre que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercício 4. Mostre que o número de subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ é 2^n.

Exercício 5. Prove que o número de diagonais de um polígono convexo de n lados é

$$\frac{n(n-3)}{2}.$$

Exercício 6. Mostre que

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{n-1}{n}$$

Exercício 7. Mostre que

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1) \cdot n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 8. Se $x + \dfrac{1}{x}$ é inteiro, mostre que $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ é também inteiro para todo número natural n.

Exercício 9. Prove que, para cada número natural n,

$$2^0 + 2^1 + 2^1 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Exercício 10. Prove que a soma dos n primeiros cubos perfeitos é $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercício 11. A sequência de Fibonacci é definida por: $F_1 = F_2 = 1$ e $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ se $n \geq 2$. Se $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ mostre que $\alpha^n = F_n\alpha + F_{n-1}$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 12. Considere todos os subconjuntos não vazios do conjunto $\{1, 2, ..., n\}$, dos n primeiros números naturais. Para cada um desses subconjuntos calculamos o produto de seus elementos. Encontre a soma de todos os produtos obtidos. (Obs: Se um subconjunto tem um único elemento, esse elemento é o produto).

Exercício 13. Forme todos os subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que não contém números consecutivos. Calcule o produto dos números em cada subconjunto. Prove que a soma dos quadrados destes produtos é igual a $(n+1)! - 1$.

Exercício 14. Teorema: Para todo n, num conjunto de n bolas todas elas possuem a mesma cor. Corolário: Todas as bolas do mundo têm a mesma cor Demonstração do Teorema: A demonstração do teorema será feita usando o Princípio da Indução Finita. O resultado é válido para $n = 1$ pois, num conjunto com uma bola, todas elas têm a mesma cor! Suponha que o teorema é válido para todo conjunto com i bolas. Considere um conjunto com $i + 1$ bolas. Retirando uma delas, o conjunto restante possui i bolas e pela hipótese indutiva todas possuem a mesma cor, digamos amarela. Retire uma das bolas amarela desse conjunto e retorne a bola de cor desconhecida, anteriormente retirada. Obtemos novamente um conjunto com i bolas e pelo o que foi discutido anteriormente possui $i - 1$ bolas amarelas e pela hipótese indutiva possui todas as bolas de mesma cor. Segue que a bola de cor desconhecida também é amarela. Assim todas as $i + 1$ bolas são amarelas. Como você sabe existem bolas de várias cores. Descubra o que está errado na demonstração do teorema.

Exercício 15. Mostre que existe um inteiro positivo a tal que $\dfrac{a^{29}-1}{a-1}$ tem pelo menos 2007 fatores primos distintos.

Respostas e Soluções.

1. Primeiro devemos verificar que a afirmação vale para o caso inicial $n = 1$:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

Vamos fazer a hitótese de indução: Suponha que nossa afirmação seja verdadeira para $n = k$, ou seja,

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Provemos que ela também é válida para $n = k + 1$. Pela hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) &= \\ \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) &= \\ \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

Assim, como a propriedade é válida para $k + 1$, segue por indução que a propriedade é válida para todo natural n.

2. Primeiro devemos verificar para o caso inicial $n = 1$:

$$1 = 1^2.$$

Vamos fazer a hitótese de indução: Suponha que nossa afirmação seja verdadeira para $n = k$, ou seja,

$$1 + 3 + \ldots + (2k - 1) = k^2$$

Provemos que ela também é válida para $n = k + 1$:
Pela hipótese de indução, temos:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \ldots + (2k-1) + (2(k+1) - 1) &= \\ k^2 + (2(k+1) - 1) &= \\ (k+1)^2 & . \end{aligned}$$

Assim, como a propriedade é válida para $k + 1$, segue por indução que a propriedade é válida para todo número natural n.

3. A afirmação vale para $n = 1$, pois

$$1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}.$$

Suponha que a afirmação seja válida para k, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Provemos que a afirmação também é verdadeira para $n = k + 1$. Pela hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \\ \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 &= \\ \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 &= \\ \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6(k+1))}{6} &= \\ \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}. \end{aligned}$$

Assim, como a propriedade é válida para $k + 1$, segue por indução que a propriedade é válida para todo número natural n.

4. A afirmação é válida para $n = 1$, pois $\{1\}$ possui exatamente 2^1 subconjuntos: $\emptyset, \{1\}$. Suponha que a afirmação seja válida para $n = k$. Podemos dividir os subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, k+1\}$ em dois grupos: os que contém o elemento $k + 1$ e os que não contém. Se algum subconjunto não contém o elemento $k + 1$, tal subconjunto está contido em $\{1, 2, \ldots, k\}$. Pela hipótese de indução, existem 2^k tais subconjuntos. Para contar o número de subconjuntos no grupo dos que contém o elemento $k + 1$, perceba que cada um deles é obtido pela união de um subconjunto de $\{1, 2, \ldots, k\}$ e $\{k + 1\}$. Portanto, novamente usando a hipótese de indução, existem exatamente 2^k tais subconjuntos. Logo, o total de subconjuntos procurado é $2^k + 2^k = 2^{k+1}$. Como a afirmação é válida para $k + 1$, segue por indução que a propriedade é válida para todo natural n.

5. Neste exercício, o caso inicial que devemos verificar é $n = 3$, pois não existe polígono com menos de 3 lados. De fato, para $n = 3$, existem $\dfrac{3(3-3)}{2} = 0$ diagonais no triângulo. Suponha que a propriedade é válida para $n = k$. Considere um polígono de $k + 1$ lados e três de seus vértices consecutivos: A, B e C. A quantidade de diagonais que não possuem o vértice B como uma de suas extremidades coincide com o número de diagonais do polígono de k lados obtidos ao removermos o vértice B e traçarmos um segmento entre os vértices A e C acrescido da diagonal unindo A e C que não está no novo polígono. Pela hipótese de indução, existem $\dfrac{k(k-3)}{2}$ diagonais. Para contarmos as diagoniais que possuem B como um de seus extremos, basta ligá-lo com todos os outros vértices diferentes de A e C e assim obtemos $k - 3$ diagonais. Portanto, o número de diagonais no polígono de $k+1$ lados é

$$\frac{k(k-3)}{2} + 1 + k - 3 = \frac{(k+1)(k-2)}{2}.$$

Como a afirmação é válida para $k+1$, segue por indução que a propriedade é válida para todo número natural n.

6. A afirmação é verdadeira para $n = 2$, pois

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{2-1}{2}.$$

Suponha que a propriedade seja válida para $n = k$. Pela hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(k-1)\cdot k} + \frac{1}{k\cdot(k+1)} &= \\ \frac{k-1}{k} + \frac{1}{k\cdot(k+1)} &= \\ \frac{k}{k+1}. \end{aligned}$$

Como a afirmação é válida para $k+1$, segue por indução que a propriedade é válida para todo número natural n.

7. A afirmação é verdadeira para $n = 2$, pois

$$1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}.$$

Suponha que a afirmação seja verdadeira para $n = k$. Pela hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + (k-1)\cdot k + k\cdot(k+1) &= \\ \frac{(k-1)k(k+1)}{3} + k\cdot(k+1) &= \\ \frac{k(k+1)(K+2)}{3} \end{aligned}$$

Como a afirmação é válida para $k+1$, segue por indução que a propriedade é válida para todo número natural n.

8. Como $x + \frac{1}{x}$ é um inteiro, a afirmação vale para $n = 1$. Suponha que a afirmação vale para todo $n \leq k$. Como

$$\begin{aligned} x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} &= \\ \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) \end{aligned}$$

Segue que se $\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)$ e $\left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right)$ são inteiros, como já sabemos que $\left(x + \frac{1}{x}\right)$ é inteiro, então $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$ também será inteiro, pois ele é dado pela diferença de dois números inteiros. Portanto, segue pelo *Princípio de Indução Forte* que a afirmação é verdadeira para todo inteiro positivo n.

9. A afirmação é verdadeira para $n = 0$, pois $2^0 = 2^1 - 1$. Suponha que a afirmação seja verdadeira para $n = k$. Então

$$\begin{aligned} (2^0 + 2^1 + 2^1 + \ldots + 2^k) + 2^{k+1} &= \\ 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} &= \\ 2^{k+2} - 1. \end{aligned}$$

Como a afirmação é válida para $k+1$, segue por indução que a propriedade é válida para todo número natural n.

10. A afirmação é verdadeira para $n = 1$, pois $1^3 = \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$. Suponha que a afirmação seja verdadeira para $n = k$. Então

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 &= \\ \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 &= \\ \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Como a afirmação é válida para $k+1$, segue por indução que a propriedade é válida para todo número natural n.

11. Como α é raiz da equação do segundo grau $x^2 - x - 1 = 0$, seque que $\alpha^2 = \alpha + 1$. A afirmação dada é verdadeira para $n = 1$, pois

$$\alpha^1 = F_1\alpha + F_0.$$

Suponha que a afirmação seja verdadeira para k, ou seja,

$$\alpha^k = F_k\alpha + F_{k-1}.$$

Então, pela hipótese de indução,

$$\begin{aligned} \alpha^{k+1} &= \alpha \cdot \alpha^k \\ &= \alpha \cdot (F_k\alpha + F_{k-1}) \\ &= \alpha^2 \cdot F_k + \alpha \cdot F_{k-1} \\ &= (\alpha+1)\cdot F_k\alpha \cdot F_{k-1} \\ &= \alpha \cdot (F_k + F_{k-1}) + F_k \\ &= \alpha \cdot F_{k+1} + F_k. \end{aligned}$$

Como a afirmação é válida para $k+1$, segue por indução que a propriedade é válida para todo número natural n.

12. (Extraído da Olimpíada Cearense de Matemática) A tabela abaixo mostra os valores das somas obtidos para os primeiros números naturais

n	1	2	3	4
S	1	5	23	119

Os números anteriores nos permitem conjecturar que $S(n) = (n+1)! - 1$. Vamos provar isto por indução. Os casos iniciais já estão feitos. Suponha que a afirmação vale para todos os números naturais menores ou iguais a k. Podemos separar os subconjuntos de $\{1, 2, 3, \ldots, k+1\}$ em dois grupos: os que contém o elemento $k+1$ e os que não o contém. A soma dos produtos dos subconjuntos que não contém o elemento $k+1$, pela hipótese de indução, é dada por $(k+1)! - 1$. Todos os subconjuntos que contém o elemento $k+1$, são obtidos de subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, k\}$ com on acréscimo de tal elemento. Assim, fatorando o $k+1$ nas somas dos produtos dos elementos destes subconjuntos, obtemos a soma $(k+1) \cdot ((k+1)! - 1) + (k+1)$. Precisamos acrescentar a última parcela, pois ela não foi contabilizada na soma anterior. Portanto, a soma do produto dos elementos de todos os subconjuntos de $\{1, 2, 3, \ldots, k+1\}$ é

$$\begin{aligned}(k+1) \cdot ((k+1)! - 1) + (k+1) + (k+1)! - 1 &= \\ (k+1)!((k+1)+1) - 1 &= \\ (k+2)! - 1.\end{aligned}$$

Como a afirmação é válida para $k+1$, segue por indução que a propriedade é válida para todo número natural n.

13. (Extraído da Olimpíada de Lenigrado) Para $n = 1$, existem apenas dois subconjuntos: $\emptyset$ e $\{1\}$. A soma dos quadrados dos produtos dos números em cada conjunto é $0 + 1 = 2! - 1$. Portanto a afirmação vale para $n = 1$. Suponha que a afirmação seja verdadeira para todo $n \leq k$. Considerando agora o conjunto $\{1, 2, \ldots, k+1\}$, podemos dividir seus subconjuntos sem elementos consecutivos em dois grupos: os que contém o elemento $k+1$ e os que não contém este elemento. Todo suconjunto no grupo dos que não contém o elemento de $k+1$ são subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, k\}$ e, por hipótese de indução, a soma dos quadrados dos produtos dos elementos dos subconjuntos sem elementos consecutivos é $(k+1)! - 1$. Os elementos do outro grupo podem ser obtidos pela união de $\{k+1\}$ com um subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, k-1\}$ sem elementos consecutivos. Pela hipótese de indução, a soma dos produtos de todos os elementos destes subconjutos é $(k+1)^2 \cdot (k! - 1) + (k+1)^2$. Devemos acrescentar a última parcela $(k+1)^2$, pois negligenciamos o produto oriundo do subconjunto $\{k+1\}$. Portanto, a soma procurada, para $n = k+1$, é

$$\begin{aligned}(k+1)^2 \cdot (k! - 1) + (k+1)^2 + (k+1)! - 1 &= \\ (k+1) \cdot (k+1)! + (k+1)! - 1 &= \\ (k+2)! - 1.\end{aligned}$$

Como a afirmação é válida para $k+1$, segue por indução que a propriedade é válida para todo número natural n.

14. (Extraído da Olimpíada Cearense de Matemática) O erro na demonstração anterior é que o passo indutivo, ou seja, a implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, só funciona quando k é pelo menos três. Assim, embora a afirmação seja verdadeira para uma sala contendo 1 bola, o argumento anterior não implica que ela também vale para uma sala contendo duas bolas.

15. (Extraído da OBM 2007) Vamos mostrar algo mais forte, que para todo número natural k existe um inteiro positivo par , denotado por a_k, tal que $\dfrac{a_k^{29} - 1}{a_k - 1}$ contém pelo menos k fatores primos distintos em sua fatoração em primos. Para $k = 1$, basta escolhermos $a_1 = 2$, pois $\dfrac{2^{29} - 1}{2 - 1}$ possui pelo menos um fator primo. Suponha que a afirmação seja verdadeira para k e considere o número $a_{k+1} = a_k^2$. Então

$$\begin{aligned}\frac{a_{k+1}^{29} - 1}{a_{k+1} - 1} &= \\ \frac{a_k^{29} - 1}{a_k - 1} \cdot \frac{a_k^{29} + 1}{a_k - 1}.\end{aligned}$$

Como $MDC(a_k^{29} - 1, a_k^{29} + 1) = MDC(2, a_k^{29} + 1) = 1$, pois a_k é par, segue que os números $\dfrac{a_k^{29} - 1}{a_k - 1}$ e $\dfrac{a_k^{29} + 1}{a_k + 1}$ são primos entre si. Pela hipótese de indução, o primeiro deles possui pelo menos k fatores primos. Assim, o produto deles possui pelo menos $k+1$ fatores primos, pois os fatores que aparecem no segundo deles não podem estar no primeiro. Isto mostra que a afirmação é verdadeira para $n = k+1$ e, segue pelo Princípio de Indução Finita, que ela vale para todo inteiro positivo n.

PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM