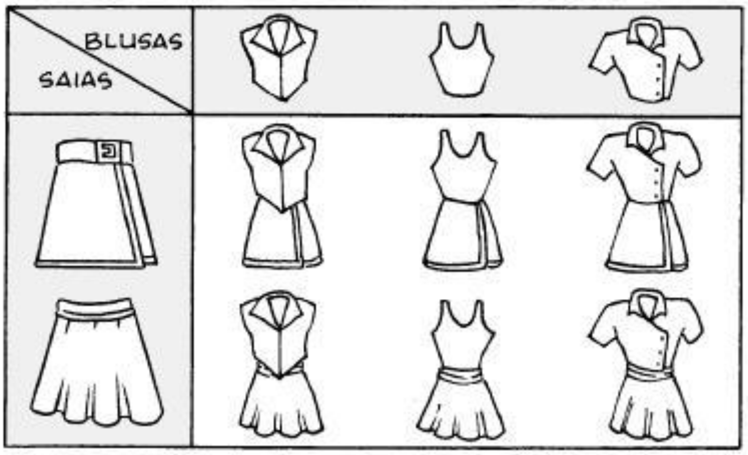
Exercício 1. Maria é muito indecisa. Ela pretende sair com suas amigas e está pensando em qual roupa vestir. Ela pode combinar três blusas diferentes com duas saias diferentes. De quantas maneiras diferentes Maria pode se vestir?

Solução: Vamos representar por S_1 e S_2 as duas saias de Maria. Podemos listar todas as combinações possíveis.

- Se ela escolheu a saia S_1, então ela pode se vestir de três modos diferentes, vestindo esta saia com cada uma das três blusas.

- De modo análogo, se ela escolheu a saia S_2, ela também pode se vestir de três modos diferentes, vestindo esta saia com cada uma das três blusas.

Então ao todo ela pode se vestir de 3+3=6 modos diferentes. Veja estas possibilidades na figura a seguir.



Comentário: A resposta 3+3=6 também pode ser escrita como $2 \times 3 = 6$. Neste caso podemos raciocinar assim. Para a escolha da saia temos 2 possibilidades. Uma vez escolhida a saia, temos 3 blusas para escolher. Então ao todo temos $2 \times 3 = 6$ pois temos uma soma de duas parcelas iguais a 3.

Exercício 2. Quantos são os números de dois algarismos distintos que podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3 e 4?

Solução: Para resolver este problema podemos listar todas as possibilidades.

- Se o número começa com o algarismo 1 temos: 12, 13 e 14. São três possibilidades.
- Se o número começa com o algarismo 2 temos: 21, 23 e 24. São três possibilidades.
- Se o número começa com o algarismo 3 temos: 31, 32 e 34. São três possibilidades.
- Se o número começa com o algarismo 4 temos: 41, 42 e 43. São três possibilidades.

Então ao todo temos 3+3+3+3=12 números possíveis.

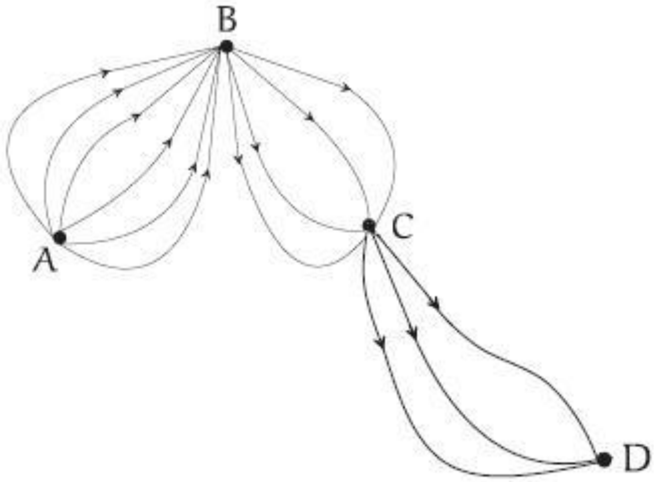
Comentário: Do jeito como a solução foi organizada, a contagem de todas estas possibilidades também pode ser pensada assim. Para a escolha do primeiro algarismo temos 4 possibilidade (são as quatro linhas destacadas na solução). Uma vez escolhido este primeiro algarismo, sobram 3 possibilidades para a escolha do algarismo seguinte (são as três possibilidades em cada linha da solução). Daí o total de possibilidades é igual ao produto $4 \times 3 = 12$ pois temos uma soma de 4 parcelas iguais a 3.

As resoluções destes dois primeiros exemplos são aplicações do princípio multiplicativo.

Princípio Multiplicativo: Se uma decisão D_1 pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja esta escolha, a decisão D_2 pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D_1 e D_2 é igual ao produto pq .

O princípio multiplicativo pode ser generalizado para uma situação em que mais de duas decisões devem ser tomadas. Se escolhas diferentes de uma decisão não modificar a quantidade de escolhas de uma outra decisão, então para saber o número total de possibilidades basta multiplicar o número de escolhas de cada uma das decisões. Vejamos isto no exercício a seguir.

Exercício 3. Existem 6 estradas ligando as cidades A e B; existem 4 estradas ligando as cidades B e C; existem 3 estradas ligando as cidades C e D. De quantas maneiras é possível dirigir de A até D?



Solução: Para o trecho AB podemos escolher uma entre 6 estradas disponíveis. Uma vez escolhida esta estrada, para o trecho BC, temos 4 escolhas. Depois de escolhida esta estrada, temos 3 possibilidades para o trecho CD. Portanto temos $6 \times 4 \times 3 = 72$ modos diferentes de dirigir de A até D.

Exercício 4. Muitos bancos estão trocando senhas numéricas por senhas alfa-numéricas (formadas por letras). Se a senha é formada por 4 letras diferentes escolhidas em um alfabeto de 26 letras, de quantos modos diferentes uma pessoa pode formar a sua senha?

Solução: Para definir a sua senha, uma pessoa deve decidir qual é cada uma das letras da senha.

- A primeira letra da senha pode ser escolhida de 26 modos diferentes.
- Escolhida a primeira letra, sobram 25 letras para a segunda posição da senha.
- Se foram escolhidas a primeira e a segunda letra, sobram 24 letras para a terceira posição da senha.
- E se foram escolhidas as três primeiras letras, a última letra pode ser escolhida de 23 modos diferentes.

Portanto a senha pode ser formada de $26 \times 25 \times 24 \times 23 = 358\,800$ modos diferentes.

Exercício 5. Considere as letras da palavra **HILBERT**.

- Quantos são os anagramas desta palavra?
- Quantos destes anagramas começam com uma vogal?
- Quantos anagramas possuem as letras HIL escritas sequencialmente nesta ordem?

Solução:

- Utilizando o conceito de permutação, uma palavra de 7 letras diferentes possui 7! anagramas, pois esta é a quantidade de permutações de 7 objetos diferentes.
- Começamos escolhendo a vogal. Como a palavra HILBERT possui duas vogais, existem duas possibilidades para escolher a vogal que vai começar o anagrama. Uma vez escolhida esta vogal, sobram 6 letras que podem ser permutadas a vontade. A quantidade de permutações destas 6 letras é igual a 6!. Portanto a quantidade de anagramas da palavra HILBERT que começam por vogal é igual a $2 \times 6!$.
- As letras HIL podem aparecer nas seguintes cinco posições do anagrama

  HILxxxx, xHILxxx, xxHILxx, xxxHILx ou xxxxHIL

  onde estamos indicando por "x" as demais letras que formarão o anagrama. Começamos então escolhendo uma destas 5 possibilidades. Feita esta escolha, para terminar o anagrama, escolhemos a ordem das outras 4 letras restantes. Sabemos que a quantidade de permutações de 4 letras diferentes é igual a 4!. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, a resposta deste item é igual a $5 \times 4!$.

Exercício 6. Quantos são os números de três algarismos distintos?

Solução: Vamos escolher, sucessivamente, os três algarismos, começando com o da esquerda. O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois ele não pode ser igual a zero. O segundo algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual ao primeiro algarismo. O terceiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos, pois ele não pode ser igual nem ao primeiro nem ao segundo algarismo. A resposta é $9 \times 9 \times 8 = 648$.

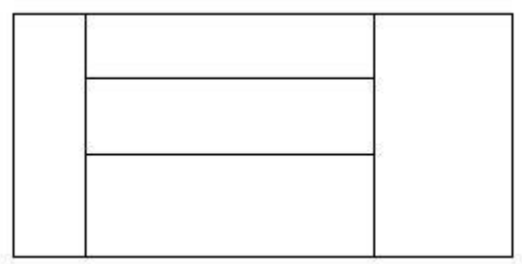
Exercício 7. (OBMEP 2005 - N2Q3 – 2ª fase) Na caixinha de costura de Lilavati só há botões de três cores: pretos, brancos e marrons. Os botões são de três tamanhos: pequenos, médios e grandes, e além disso são de duas formas: quadrados e redondos. Na caixinha não há botões pequenos redondos nem botões grandes pretos, e dos outros tipos há exatamente um botão de cada.

(A) Quantos botões brancos quadrados há na caixinha?
(B) Quantos botões há na caixinha?

Solução:

(A) Botões brancos quadrados distinguem-se pelo tamanho. Como só há um botão de cada tipo, segue que na caixinha de Lilavati há exatamente 3 botões brancos quadrados: um pequeno, um médio e um grande.
(B) Como são 3 possibilidades para tamanho, 2 possibilidades para a forma e 3 possibilidades para cor, segue que o número de possíveis tipos de botões é $3\times 2 \times 3 = 18$. Por outro lado, como não há botões pequenos redondos (seriam 3, um para cada cor) nem botões grandes pretos (seriam 2, um para cada forma) e só há um botão de cada tipo, o total de botões na caixinha de Lilavati é $18 - 3 - 2 = 13$

Exercício 8. O retângulo a seguir está dividido em 5 regiões. Se temos 5 cores a nossa disposição, de quantas maneiras podemos colorir este retângulo de modo que cada região receba uma cor e regiões adjacentes sejam coloridas com cores diferentes?



Solução: Devemos considerar dois casos, analisando separadamente se as regiões da esquerda e da direita são coloridas da mesma cor ou com cores diferentes. Suponhamos então que as regiões da esquerda e da direta são coloridas com a mesma cor. Neste caso:

- A região da esquerda pode ser colorida com 5 cores.
- A região da direita pode ser colorida de uma única cor: a mesma cor da região da esquerda.
- A faixa horizontal de cima pode ser colorida com 4 cores, pois não podemos repetir a cor das regiões laterais.
- A faixa horizontal do meio pode ser colorida com 3 cores pois devemos evitar a cor das regiões laterais e a cor da faixa horizontal de cima.
- A faixa horizontal de baixo também pode ser colorida com 3 cores pois devemos evitar a cor das regiões laterais e a cor da faixa horizontal do meio.

Neste caso obtemos $5 \times 1\times 4 \times 3\times 3 = 180$ possibilidades.

Suponhamos agora que as regiões da esquerda e da direta são coloridas com cores diferentes. Neste caso:

- Existem 5 opções de cores para a região da esquerda.
- Em seguida existem 4 opções de cores para a região da direita, pois ela deve ser colorida com uma cor diferente da região da esquerda.
- Daí podemos colorir a faixa horizontal de cima com 3 cores, pois devemos evitar as duas cores das regiões laterais.
- Em seguida podemos colorir a faixa horizontal do meio com 2 cores, pois devemos evitar as duas cores das regiões laterais e a cor da faixa horizontal de cima.
- Finalmente a faixa horizontal de baixo também pode ser coloria com 2 cores pois devemos evitar as duas cores das regiões laterais e a cor da faixa horizontal do meio.

Neste caso obtemos $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 240$ possibilidades. Somando, concluímos que o retângulo pode ser colorido de $180 + 240 = 420$ maneiras diferentes.

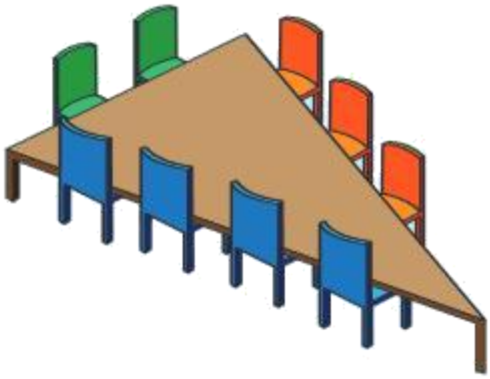
Exercício 9. Quantos são os números abc de três algarismos distintos tais que $a \in \{1, 2,3, 4,5\}$, $b \in \{1, 2,3, 4\}$ e $c \in \{1, 2,3\}$.

Solução: Observe inicialmente que se começamos escolhendo o algarismo a logo enfrentamos uma dificuldade em contar quantas são as escolhas possíveis para o algarismo b . Então vamos mudar de estratégia, começando pelo algarismo c .

- O algarismo c pode ser escolhido de 3 maneiras diferentes.
- Após uma escolha do algarismo c , o algarismo b pode ser escolhido de 3 maneiras diferentes.
- E após serem escolhidos os algarismos b e c , podemos escolher o algarismo a de 3 maneiras diferentes.

Portanto podemos formar $3\times 3\times 3 = 27$ números.

Exercício 10. (OBMEP 2012 – N3Q18 – 1ª fase) Seis amigos, entre eles Alice e Bernardo, vão jantar em uma mesa triangular, cujos lados têm 2, 3 e 4 lugares, como na figura. De quantas maneiras esses amigos podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e em um mesmo lado da mesa?



Solução: Há 6 possibilidades para escolher dois lugares juntos no mesmo lado da mesa: 1 no lado com 2 lugares, 2 no lado com 3 lugares e 3 no lado com 4 lugares. Uma vez escolhida uma dessas possibilidades, Alice e Bernardo podem se sentar de duas maneiras diferentes nesses lugares. Os quatro amigos que ainda estão em pé podem se sentar nos 7 lugares vazios de $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ maneiras diferentes. No total, os amigos podem se sentar-se à mesa de $6 \times 2 \times 840 = 10\ 080$ maneiras diferentes.

Exercício 11. (OBMEP 2008 - N2Q20 – 1ª fase) As peças da figura 1 são feitas de quadradinhos de cartolina cinza de um lado e branca do outro. A figura 3 mostra uma maneira de encaixar essas peças com o lado cinza para cima nos quatro quadrados da figura 2. De quantas maneiras diferentes é possível fazer isso?

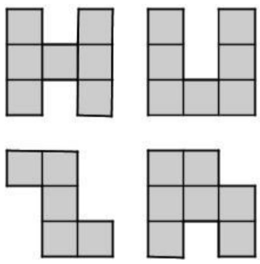


Figura 1

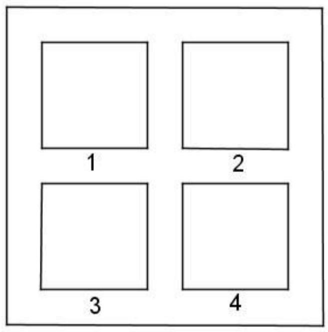


Figura 2

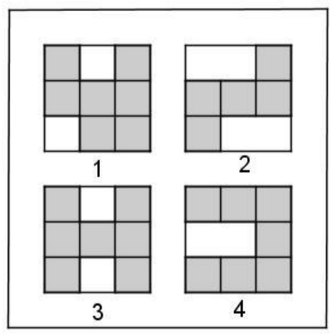
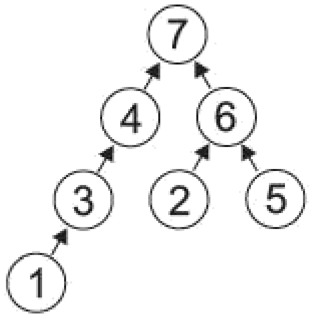
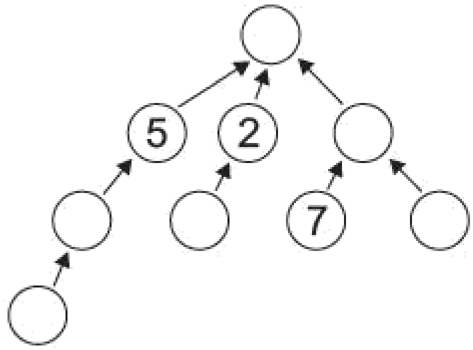


Figura 3

Solução: Vamos denotar as peças, da esquerda para a direita e de cima para baixo, de H, U, Z e R. A peça H só pode ser colocada de 2 maneiras diferentes em um quadrado, a peça U de 4 maneiras diferentes, a peça Z de 2 maneiras diferentes e a peça R de 4 maneiras diferentes. Uma vez fixada a posição em que as peças vão entrar nos quadrados, elas podem ser distribuídas de $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras diferentes. Logo o número de maneiras diferentes de colocar as peças nos quadrados é
$2 \times 4 \times 2 \times 4 \times 24 = 1536$.

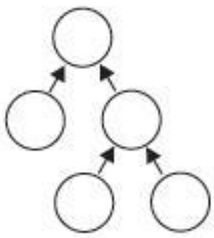
Exercício 12. (OBMEP 2008 - N1Q5 – 2ª fase) Os círculos da figura abaixo a esquerda foram preenchidos com os números de 1 a 7, de modo que todas as flechas apontam de um número menor para um maior. Neste caso, dizemos que a figura foi bem preenchida.



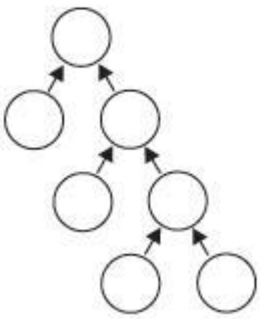


(A) Complete a figura acima a direita com os números de 1 a 9 de modo que ela fique bem preenchida.

(B) De quantas maneiras a figura a seguir pode ser bem preenchida com os números de 1 a 5?



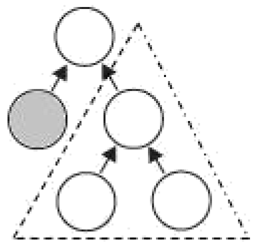
(C) De quantas maneiras a figura a seguir pode ser bem preenchida com os números de 1 a 7?

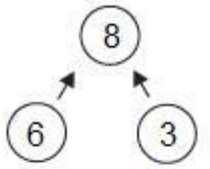


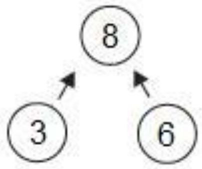
Solução:

(A) Só existe uma maneira de preencher o diagrama, como mostramos a seguir.
- O número 9 não pode ficar abaixo de nenhum número, logo deve ficar no topo.
- Acima do número 7 só podemos colocar o 9 e 8. Como o 9 já está no topo, o 8 ficará acima do 7.
- O número 6 não pode ficar abaixo do 5 nem do 2, logo ficará abaixo do 8 , ao lado do 7.
- O número 1 é o único que pode ficar abaixo do 2.
- Os números 3 e 4 devem ficar abaixo do 5, com o 3 debaixo do 4.

(B) 1ª solução: Primeiro vamos examinar o diagrama menor de três bolinhas marcadas pelo triângulo pontilhado, à direita. Para que ele fique bem preenchido com quaisquer três números positivos distintos, o maior número deve ficar no topo e os outros dois poderão ser colocados nos dois círculos de baixo de 2 maneiras diferentes. Por exemplo, se os números forem 3, 6 e 8, podemos dispô-los das 2 maneiras ilustradas a seguir.







Para que o diagrama completo do problema fique bem preenchido com os números de 1 a 5, o 5 deve ficar no topo. A casa sombreada pode ser preenchida com qualquer número de 1 a 4. As três casas restantes, marcadas com o triângulo pontilhado, formam o diagrama analisado acima e poderão então ser preenchidas de 2 maneiras, com os três números restantes. Resumindo, podemos preencher o diagrama do seguinte modo:

- preenchemos o círculo do topo com o 5: 1 possibilidade;
- preenchemos a casa sombreada com 1, 2, 3 ou 4 : 4 possibilidades;
- preenchemos as três casas que faltam com os três algarismos restantes: 2 possibilidades.

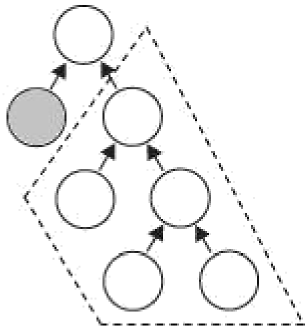
Logo o diagrama pode ser preenchido de $1\times 4 \times 2 = 8$ maneiras diferentes. Notamos que este raciocínio se aplica para quaisquer cinco números positivos distintos. Isto será importante na resolução do próximo item.

(B) 2ª solução: Notamos primeiro que o 5 deve sempre ocupar a bolinha de cima. O 4 deve então ocupar uma das duas bolinhas abaixo do 5, e então

- se o 4 ocupar a bolinha sombreada, o 3 deve ocupar a outra bolinha abaixo do 5, e o 1 e o 2 podem ser colocados de duas maneiras diferentes nas duas bolinhas que sobram; temos duas possibilidades neste caso;
- se o 4 ocupar a outra bolinha abaixo do 5, a casa sombreada pode ser ocupada por qualquer dos números de 1 a 3, e os outros dois números podem ser colocados nas duas últimas bolinhas vazias; neste caso temos $3\times 2 = 6$ possibilidades.

Deste modo, o número de maneiras de preencher o diagrama é 2 + 6 = 8 .

(C) 1ª solução: Para que o diagrama fique bem preenchido com os números de 1 a 7, temos que colocar o 7 no topo. Na figura a seguir, a casa sombreada pode ser preenchida com qualquer número de 1 a 6. A parte circundada pela linha pontilhada foi analisada no item (B) e pode ser preenchida com os 5 números restantes de 8 formas diferentes. Ou seja, podemos preencher o diagrama como segue:



- preenchemos o círculo do topo com o 7: 1 possibilidade;
- preenchemos a casa sombreada com 1, 2, 3 , 4, 5 ou 6: 6 possibilidades;
- preenchemos a parte circundada com os algarismos restantes: 8 possibilidades.

Logo o diagrama pode ser preenchido de $1 \times 6 \times 8 = 48$ maneiras diferentes.

(C) 2ª solução: Notamos primeiro que o 7 deve sempre ocupar a bolinha de cima. O 6 deve então ocupar uma das duas bolinhas abaixo do 7, e então

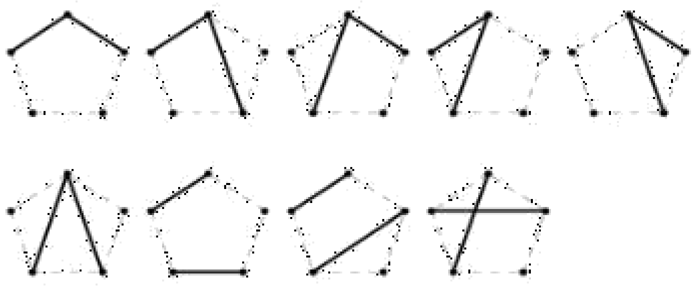
- se o 6 ocupar a bolinha sombreada, os números de 1 a 5 devem ocupar as casas circundadas com a linha pontilhada. De acordo com o item (B), isto pode ser feito de 8 maneiras distintas.
- se o 6 deve ocupar a outra bolinha abaixo do 7, podemos colocar qualquer número de 1 a 5 na casa sombreada e distribuir os números restantes pelas quatro bolinhas ainda vazias, o que pode ser feito de 8 maneiras diferentes, de acordo com o item (B). Aqui temos $5 \times 8 = 40$ possibilidades.

Logo o diagrama pode ser preenchido de 8 + 40 = 48 maneiras diferentes.

Exercício 13. (OBMEP 2009 - N2Q19 – 1ª fase) Com exatamente dois segmentos de reta, podemos fazer figuras diferentes unindo os vértices de um pentágono. Cinco dessas figuras estão ilustradas a seguir.

Incluindo essas cinco, quantas figuras diferentes podemos fazer desse modo?

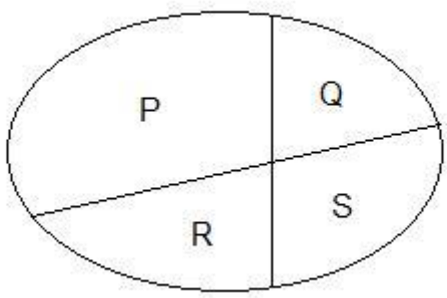
Solução: Na figura abaixo mostramos as 9 figuras diferentes que contém o vértice superior do pentágono. Observamos que nenhuma destas figuras pode ser obtida a partir de outra através de rotações do pentágono.



Cada uma destas figuras dá origem, através de rotações do pentágono, a outras 4 figuras diferentes, como ilustramos abaixo.

Segue que o número de figuras diferentes que podemos fazer com dois segmentos é $9 \times 5 = 45$.

Exercício 14. O mapa a seguir está dividido em 4 regiões P, Q, R e S. Dispomos de 4 cores e queremos colorir o mapa de modo que regiões que possuem uma linha de fronteira comum sejam coloridas com cores diferentes. De quantas maneiras é possível colorir o mapa?



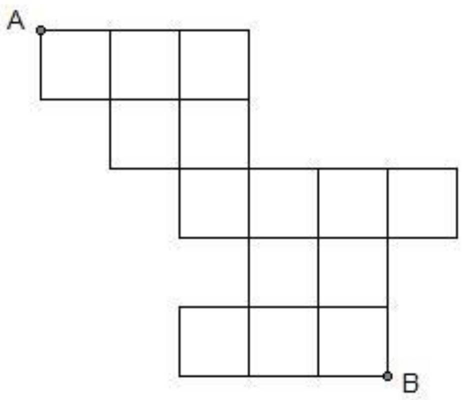
Solução: Para fazer a contagem desejada devemos considerar dois casos disjuntos: as regiões P e S podem ter cores iguais ou cores diferentes.

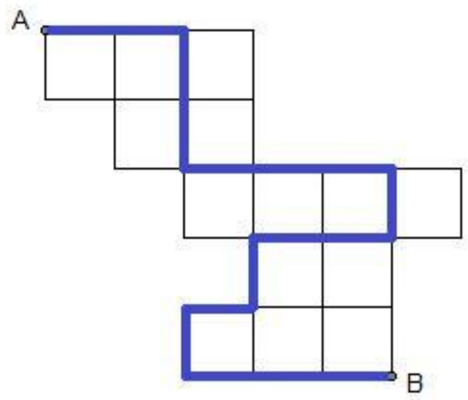
- Suponhamos que as regiões P e S sejam coloridas de cores diferentes. Neste caso existem 4 cores para a região P e existem 3 cores para a região S. Depois de coloridas as regiões P e S, existem duas escolhas de cores para a região Q pois não podem ser escolhidas as cores utilizadas em P e em S. E de modo análogo, existem duas escolhas de cores para a região R. Neste caso, o mapa pode ser colorido de $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$ maneiras diferentes.

- Suponhamos agora que as regiões P e S sejam coloridas com uma única cor. Esta cor pode ser escolhida de 4 maneiras. Após as regiões P e S serem coloridas com uma mesma cor, podemos colorir a região Q de 3 cores diferentes e também podemos colorir a região R de 3 cores diferentes pois apenas precisamos evitar a cor utilizada em P e em S. Neste caso, o mapa pode ser colorido de $4 \times 1 \times 3 \times 3 = 36$ maneiras diferentes.

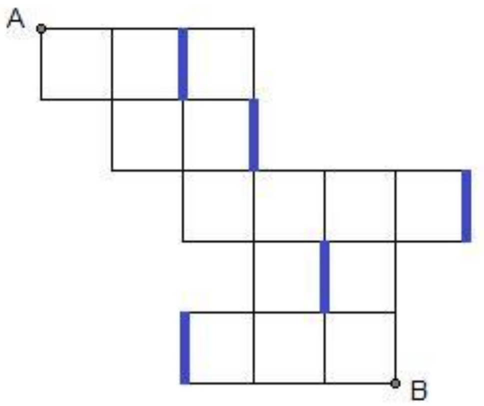
Somando as duas possibilidades, obtemos 48+36=84 possibilidades para colorir o mapa.

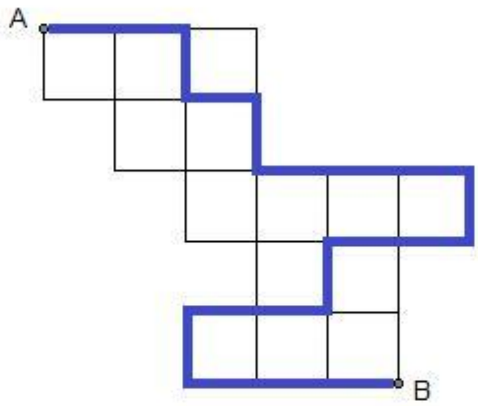
Exercício 15. (OBMEP 2007 - N3Q20 – 1ª fase) Na figura a seguir, uma formiguinha deseja sair do ponto A e chegar no ponto B, andando apenas sobre os segmentos desenhados. Ela só pode descer, ela pode ir para a esquerda ou para a direita, mas ela não pode passar duas vezes sobre um mesmo segmento. Na figura da direita está ilustrado um dos caminhos possíveis que a formiguinha pode percorrer. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer um caminho permitido do ponto A ao ponto B?





Solução: Um caminho ligando os pontos A e B contém 5 segmentos verticais. Observe que se são escolhidos estes 5 segmentos verticais, o caminho fica completamente determinado.





O primeiro segmento vertical pode ser escolhido de 4 maneiras diferentes. O segundo segmento vertical pode ser escolhido de 3 maneiras diferentes, O terceiro, de 5 maneiras. O quarto, de 3 maneiras. E o quinto segmento vertical pode ser escolhido de 4 maneiras diferentes. Deste modo, podemos formar $4 \times 3 \times 5 \times 3 \times 4 = 720$ caminhos diferentes conectando os pontos A e B.

Estes dois últimos exercícios estão resolvidos no Portal da Matemática - 2º Ano do Ensino Médio – Módulo: “princípios básicos de contagem” – Aula: “princípio fundamental da contagem” – Videoaula:

- Exercícios sobre o Princípio Fundamental da Contagem – parte 2