**Aritmética**

***Secção 2.2: Fenômenos Periódicos ( Algoritmo da Divisão Euclidiana)***

Algoritmo da Divisão Euclidiana: Na divisão de dois números naturais a por b existe um quociente q e um resto r tal que **a = bq +r** sendo que obrigatoriamente 0 ≤ r ≤ b−1.

Apresenta exercícios que mostram como o resto de uma divisão pode ser utilizado na resolução de problemas que envolvam fenômenos periódicos. Como, por exemplo:

**Exemplo 1:** Pedro caminha ao redor de uma praça retangular onde estão dispostas 12 árvores, brincando de tocar cada arvore durante seu passeio. Se no inicio ele toca a árvore indicada na figura, e se ele anda no sentido da seta, indique que árvore ele estará tocando ao encostar em uma árvore pela centésima vez.



**Solução:** Na figura, próximo de cada arvore escreva os números 1, 2, 3, ..., correspondentes aos números de ´arvores tocadas por Pedro (a ´arvore indicada pela letra P recebe o numero 1, a próxima o número 2, e assim por diante). Como existem 12 árvores na praça, na arvore indicada pela letra P estarão escritos os número 1, 13, 25, ... Que são todos os números que deixam resto 1 quando divididos por 12. Dividindo 100 por 12, obtemos quociente 8 e resto 4, isto ´e, 100 = 8 × 12 + 4. Daí vemos que na centésima vez, Pedro estará tocando a ´arvore que está 3 posições á frente daquela indicada pela letra P

.****

***Exercícios***

1. Considere a seguinte sequência de números:

1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5 ...

Formada alternadamente pelos algarismos (1, 2, 3, 4, 5) e pelos algarismos (5, 4, 3, 2, 1). Qual algarismo aparece na posição 2015 nesta sequência?

1. João decidiu nadar de três em três dias. O primeiro dia que ele nadou foi um sábado, o segundo dia foi uma terça-feira, o terceiro dia foi uma sexta-feira, e assim por diante. Em qual dia da semana João estará nadando pela centésima vez?
2. Qual é o algarismo da unidade de $2^{2015}$ ?

***Secção 2.3: Aritmética dos restos***

Essa secção apresenta com o podemos calcular o resto da divisão de uma soma, uma diferença ou um produto de dois números, sem ter que efetuar as operações com os números dados.

**Exemplo 2:** Nas divisões de 163 e 360 por 7 obtemos, respectivamente, restos 2 e 3.

**163 = 7 × 23 + 2 e 360 = 7 × 51 + 3.**

Qual é o resto da divisão de 163 + 360 por 7?

**Solução:** E evidente que você pode calcular o valor da soma 163 + 360 e em seguida dividir este resultado por 7 para obter a resposta desejada. Mas não é isto o que se pretende fazer. Queremos achar a resposta sem calcular a soma 163 + 360. Para fazer isto, vamos pensar de um modo bastante concreto. Imagine que você tenha 163 bolinhas. O fato do resto da divisão de 163 por 7 ser igual a 2 implica que estas bolinhas podem ser organizadas em grupos de 7 bolinhas mais um grupo menor de 2 bolinhas. Como o resto da divisão de 360 por 7 é igual a 3, então 360 bolinhas podem ser organizaas em grupos de 7 bolinhas mais um grupo menor de 3 bolinhas. Agora juntando todas as bolinhas, obtemos 163 + 360 bolinhas que estão organizadas em vários grupos de 7, um grupo de 2 e um grupo de 3 bolinhas, sendo que estes dois últimos grupos podem ser unidos em um único grupo de 5 bolinhas. Portanto todas as 163+360 bolinhas estão organizadas em vários grupos de 7 e em um grupo de 5 bolinhas. Como 5 ´e um número menor que 7, o que foi feito significa que o resto da divisão de 163 + 360 por 7 ´e igual a 5 = 2 + 3. De outro modo, podemos chegar nesta mesma conclusão o utilizando a propriedade distributiva:

*a(b + c) = ab + ac*

Acompanhe o seguinte desenvolvimento: 163 + 360 = (7 · 23 + 2) + (7 · 51 + 3) = 7 ·(23 + 51) + (2 + 3) = 7 · 74 + 5. Nesta igualdade identificamos imediatamente o número 5 como o resto da divisão de 163 + 360 por 7. Portanto, neste exemplo, vimos que para calcular o resto da divisão da soma 163 + 360 por 7 bastou somar os restos das divisões dos números 163 e 360 por 7.

***Exercícios***

1. Nas divisões de 106 e 197 por 6 obtemos, respectivamente, restos 4 e 5:

*106 = 6 × 17 + 4 e 197 = 6 × 32 + 5.*

Qual é o resto da divisão de 106 + 197 por 6?

1. Se *a = 7 × 53 + 1* *e b = 7 × 15 + 3*, qual é o resto da divisão de a + b por 7?

***Secção 2.4: Múltiplos e Divisores***

*Múltiplos positivos de 3:*  M(3): { 3,6,9,12,15,18,...}

Generalizando: M(*a*): *{a,2a, 3a, 4a, 5a, ...}*

Assim, dado dois números naturais *a* e *b,* dizemos que *b* é um múltiplo de *a* se existir um número natural *n* tal que *b = an*. De modo equivalente, *b* é múltiplo de *a* quando o resto da divisão de *b* por *a* for igual a zero.

*Divisores:* Dado um número natural *a*, se *d* é um divisor positivo de a então *1 ≤ d ≤ a.* Assim, todo número natural possui uma quantidade finita de divisores positivos, enquanto possui uma quantidade infinita de múltiplos. Vejam alguns exemplos de conjuntos de divisores:

D(7) = {1, 7}

D(12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}

D(14) = {1, 2, 7, 14}

D(72) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72}

**Exemplo 3:** Da igualdade *9174532 × 13 =* 119268916 pode-se concluir que um dos números abaixo é divisível por 13. Qual é este número?

1. *119268903 (b) 119268907 (c) 119268911 (d) 119268913 (e) 119268923.*

**Solução:** Como 119268916 é divisível por 13, podemos concluir que os números divisíveis por 13 são aqueles obtidos somando-se ou subtraindo-se múltiplos de 13 ao número 119268916. Dentre os números apresentados, o número 119268916 − 13 = 119268903 é o único divisível por 13.

***Exercício***

1. Considerando somente números inteiros positivos,

**(a)** O número 7 · 38 + 5 é divisível por 7?

**(b)** O número 7 · 241 + 84 ´é um múltiplo de 7?

**(c)** O número 7 · 81 + 54 é divisível por 7 e por 9?

**(d)** Existe um número a que torna o número 7a+ 6 um múltiplo de 7?

***Secção 2.6: Critérios de Divisibilidade***

**Critério de divisibilidade por 3:** Um número é divisível por 3 se a soma dos seus algarismos é divisível por 3.

**Critério de divisibilidade por 4:** Um número é divisível por 4 quando o número formado pelo seus dois últimos algarismos é divisível por 4.

**Critério de divisibilidade por 9:** Um número é divisível por 9 se a soma dos seus algarismo é divisível por 9.

**Critério de divisibilidade por 2:** Um número é divisível por 2 se ele for par.

**Critério de divisibilidade por 6:** Um número é divisível por 6 se ele for divisível por 2 e 3 ao mesmo tempo.

**Critério de divisibilidade por 5:** Um número é divisível por 5 quando termina em 0 e 5.

**Critério de divisibilidade por 10:** Um número é divisível por 10 quando termina em 0.

***Exercício***

1. Verifique se cada um dos números é divisível por 2, 3, 4, 5, 6, 9 ou 10.

*(a) 1260 (b) 1746 (c) 2210505*