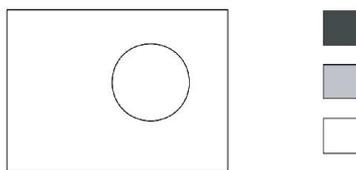


Capítulo 1

Métodos de Contagem

Problemas de contagem são, muitas vezes, considerados difíceis entre alunos e professores, apesar de as técnicas matemáticas necessárias serem bastante elementares: essencialmente, o conhecimento das operações aritméticas de soma, subtração, multiplicação e divisão. O objetivo deste material é habituar o aluno a trabalhar com problemas de contagem e a ver que, afinal de contas, tais problemas podem ser resolvidos com raciocínios simples na grande maioria dos casos, sem exigir o uso de fórmulas complicadas. É isto o que procuramos mostrar nos exemplos a seguir.

Exemplo 1. Uma bandeira com a forma abaixo vai ser pintada utilizando duas das cores dadas.



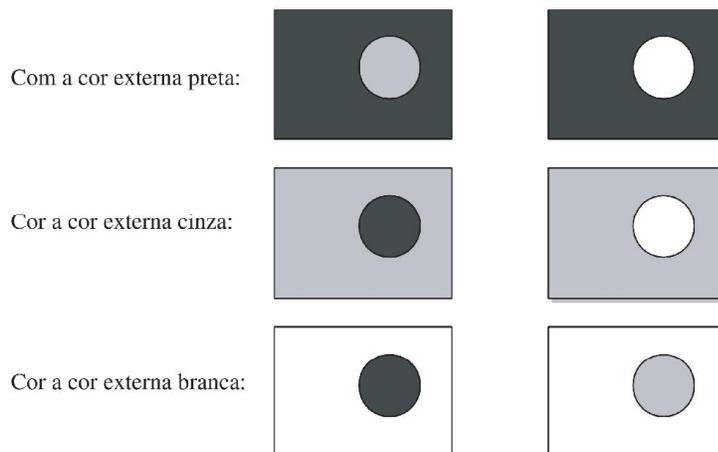
(a) *Liste todas as possíveis bandeiras. Quantas são elas?*

Solução: É importante ter um procedimento sistemático para listar todas as possíveis bandeiras, sem repeti-las. Para tal, devemos identificar as diferentes decisões a serem tomadas e examinar todas as possibilidades para cada uma delas. No caso deste problema, uma forma natural para planejar o preenchimento da bandeira é:

- escolher a cor a ser utilizada para a parte externa;
- a seguir, escolher a cor para o círculo interno.

A primeira decisão pode ser feita de 3 modos diferentes, já que a cor externa pode ser qualquer uma das disponíveis. Uma vez tomada esta decisão, a cor escolhida não pode mais ser usada para o círculo interno. Por exemplo, se a cor preta for escolhida para a parte externa, a cor interna deverá ser cinza ou branca.

Podemos, então, listar todas as possíveis bandeiras, que são 6, de acordo com a figura abaixo.



Um fato importante, que pode ser explorado na contagem eficiente do

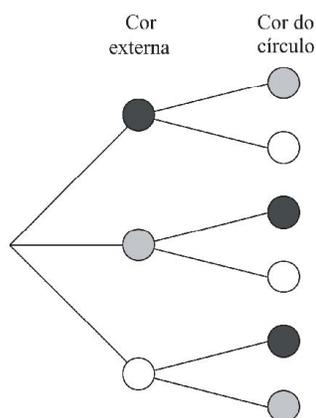
número possível de bandeiras, é o seguinte: as cores disponíveis para pintar o círculo mudam de acordo com a escolha da parte externa, mas a sua quantidade é sempre a mesma, já que, qualquer que seja a cor externa escolhida, há sempre duas cores restantes para o círculo. Portanto, poderíamos ter empregado o seguinte raciocínio para contar o número de possíveis bandeiras, sem listá-las:

A cor externa pode ser escolhida de três modos diferentes. Qualquer que seja essa escolha, a cor do círculo pode ser escolhida de dois modos. Logo, o número total de possibilidades é $2 + 2 + 2 = 3 \times 2 = 6$.

O procedimento acima ilustra o *Princípio Multiplicativo* ou *Princípio Fundamental da Contagem*:

Se uma decisão D_1 pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja essa escolha, a decisão D_2 pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D_1 e D_2 é igual a pq .

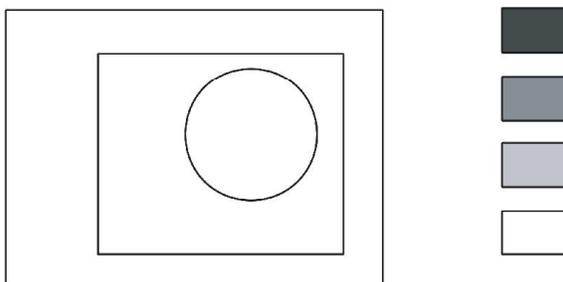
O Princípio Multiplicativo pode ser ilustrado com o auxílio de uma árvore de enumeração como a da figura a seguir.



(b) *Quantas são as possíveis bandeiras no caso em que 4 cores estão disponíveis?*

Solução: As decisões a serem tomadas são exatamente as mesmas do caso anterior, tendo mudado apenas o número de possibilidades de escolha. Para a cor externa, temos agora 4 possibilidades. Uma vez escolhida a cor externa, a cor do círculo pode ser qualquer uma das outras 3. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, o número de modos diferentes para pintar a bandeira é $4 \times 3 = 12$.

Exemplo 2. Quantas são as formas de pintar a bandeira a seguir utilizando 3 cores diferentes dentre 4 dadas?



Solução: Agora, temos 3 decisões consecutivas a tomar: a cor externa, a do retângulo e a do círculo. A cor externa pode ser qualquer uma das 4 cores; uma vez escolhida a cor externa, o retângulo pode ser pintado de três modos distintos. Logo, a escolha combinada da cor externa e do retângulo pode ser feita de $4 \times 3 = 12$ modos. Para cada um destes 12 modos, o círculo pode ser pintado com uma das duas cores que sobraram. Logo, o número total de possibilidades é $4 \times 3 \times 2 = 24$.

O raciocínio acima mostra que o Princípio Multiplicativo pode, na

realidade, ser aplicado quando temos diversas etapas de decisão: desde que o número de possibilidades em cada etapa não dependa das decisões anteriores, basta multiplicá-los para achar o número total de possibilidades.

Exemplo 3. Para pintar a bandeira abaixo, há 4 cores disponíveis. De quantos modos ela pode ser pintada de modo que faixas adjacentes tenham cores distintas?



Solução: O primeiro passo é escolher em que ordem vamos pintar a bandeira. Podemos, por exemplo, pintar as faixas de cima para baixo (veja, no exercício 16, o que ocorre quando escolhemos mal a ordem de preenchimento). A cor da primeira faixa pode ser qualquer uma das 4 cores. Qualquer que seja a cor escolhida, para a segunda faixa temos 3 cores para escolher. Escolhida a cor da segunda faixa, a terceira pode ser pintada de qualquer cor, exceto a usada para a segunda faixa. Assim, temos novamente 3 possibilidades de escolha.

O número total de possibilidades é, então:

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & \times & 3 & \times & 3 & = & 36 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1^{\text{a}} \text{ faixa} & & 2^{\text{a}} \text{ faixa} & & 3^{\text{a}} \text{ faixa} & & \end{array}$$

Exemplo 4. Quantos são os números de três algarismos distintos?

Solução: Vamos escolher, sucessivamente, os três algarismos, começando com o da esquerda (isto é importante, como veremos abaixo). O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual a 0. O segundo algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual ao primeiro algarismo. O terceiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos, pois não pode ser igual nem ao primeiro nem ao segundo algarismo.

A resposta é $9 \times 9 \times 8 = 648$.

Exemplo 5. O código Morse usa duas letras, ponto e traço, e as palavras têm de 1 a 4 letras. Quantas são as palavras do código Morse?

Solução: Há palavras de 1, 2, 3 e 4 letras, em quantidades diferentes. Assim, nossa estratégia é a de usar o Princípio Multiplicativo para contar separadamente estas palavras e, depois, somar estas quantidades. Há 2 palavras de uma letra; há $2 \times 2 = 4$ palavras de duas letras, pois há dois modos de escolher a primeira letra e dois modos de escolher a segunda letra; analogamente, há $2 \times 2 \times 2 = 8$ palavras de três letras e $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ palavras de 4 letras. O número total de palavras é $2 + 4 + 8 + 16 = 30$.

Você já deve ter percebido nesses exemplos qual é a estratégia para resolver problemas de contagem:

1. Postura: Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar. Nas diversas situações dos Exemplos 1 a 3, nós nos colocamos no papel da pessoa que deveria colorir a bandeira; no Exemplo 4, colocamo-nos no papel da pessoa que deveria escrever o número.

2. Divisão: Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples, correspondentes às diversas etapas do processo de decisão. Colorir a bandeira foi dividido em colorir cada região; formar um número de três algarismos foi dividido em escolher cada um dos três algarismos. Formar a palavra no código Morse foi dividido em escolher o número de letras e, a seguir, em escolher cada letra.

A ordem em que as decisões são tomadas pode ser extremamente importante para a simplicidade do processo de resolução. Vamos voltar ao Exemplo 4 (*Quantos são os números de três algarismos distintos?*) para ver como uma estratégia equivocada pode levar a uma solução desnecessariamente complicada.

Começando a escolha dos algarismos pelo último algarismo, há 10 modos de escolher o último algarismo. Em seguida, há 9 modos de escolher o algarismo central, pois não podemos repetir o algarismo já usado. Agora temos um impasse: de quantos modos podemos escolher o primeiro algarismo? A resposta é “depende”. Se não tivermos usado o 0, haverá 7 modos de escolher o primeiro algarismo, pois não poderemos usar nem o 0 nem os dois algarismos já usados nas demais casas; se já tivermos usado o 0, haverá 8 modos de escolher o primeiro algarismo.

Para evitar, na medida do possível, impasses como o acima, uma outra recomendação importante é:

3. Não adiar dificuldades. Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar. No Exemplo 4, a escolha do primeiro algarismo era uma decisão mais restrita do que as outras, pois o primeiro algarismo não pode ser igual a 0. Essa é, portanto, a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar, e, conforme acabamos de ver, postergá-la só serve para causar problemas.

Exemplo 6. Quantos são os números pares de três algarismos distintos?

Solução: Há 5 modos de escolher o último algarismo. Note que começamos pelo último algarismo, que é o mais restrito; o último algarismo só pode ser 0, 2, 4, 6 ou 8.

Em seguida, vamos ao primeiro algarismo. De quantos modos se pode escolher o primeiro algarismo? A resposta é “depende”: se não tivermos usado o 0, haverá 8 modos de escolher o primeiro algarismo, pois não poderemos usar nem o 0 nem o algarismo já usado na última casa; se já tivermos usado o 0, haverá 9 modos de escolher o primeiro algarismo, pois apenas o 0 não poderá ser usado na primeira casa.

Assim, apesar de termos procurado atacar inicialmente a escolha mais restrita, chegamos a um impasse no uso do Princípio Multiplicativo. Esse tipo de impasse é comum na resolução de problemas e há dois métodos para vencê-lo.

O primeiro método consiste em voltar atrás e contar separadamente.

Contaremos separadamente os números que terminam em 0 e os que não terminam em 0. Começemos pelos que terminam em 0. Há 1 modo de escolher o último algarismo, 9 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o algarismo central. Há, portanto, $1 \times 9 \times 8 = 72$ números de três algarismos distintos terminados em 0.

Para os que não terminam em 0, há 4 modos de escolher o último algarismo, 8 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o algarismo central. Há $4 \times 8 \times 8 = 256$ números pares de três algarismos distintos que não terminam em 0.

A resposta é $72 + 256 = 328$.

O segundo método consiste em ignorar uma das restrições do problema, o que nos fará contar em demasia. Depois descontaremos o que houver sido contado indevidamente.

Primeiramente fazemos de conta que o 0 pode ser usado na primeira casa do número. Procedendo assim, há 5 modos de escolher o último algarismo (só pode ser 0, 2, 4, 6 ou 8), 9 modos de escolher o primeiro algarismo (não podemos repetir o algarismo usado na última casa – note que estamos permitindo o uso do 0 na primeira casa) e 8 modos de escolher o algarismo central. Há $5 \times 9 \times 8 = 360$ números, aí inclusos os que começam por 0.

Agora vamos determinar quantos desses números começam por zero; são esses os números que foram contados indevidamente. Há 1 modo de escolher o primeiro algarismo (tem que ser 0), 4 modos de escolher o último (só pode ser 2, 4, 6 ou 8 – lembre-se de que os algarismos são distintos) e 8 modos de escolher o algarismo central (não podemos repetir os algarismos já usados). Há $1 \times 4 \times 8 = 32$ números começados por 0.

A resposta é $360 - 32 - 328$.

Exemplo 7. De quantos modos diferentes 6 pessoas podem ser colocadas em fila?

Solução: Este é um problema clássico de contagem, chamado de *problema das permutações simples*, que é facilmente resolvido pelo Princípio Multiplicativo. De fato, basta escolher sucessivamente as pessoas colocadas em cada posição da fila. Para escolher o primeiro da fila, temos 6 possibilidades; o segundo pode ser qualquer uma das 5 pessoas restantes, e assim por diante. Logo, o número total de possibilidades é $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$. De um modo geral, o número de modos de ordenar n objetos é igual a $n \times (n - 1) \times \cdots \times 1$, que é representado por $n!$ (lê-se: n fatorial).

Exemplo 8. De quantos modos podem-se escolher três dos jogadores de um time de futebol para representá-lo em uma cerimônia de premiação?

Solução: Este é um outro problema clássico de contagem, chamado de *problema das combinações simples*. À primeira vista, parece ser simples resolvê-lo pelo Princípio Multiplicativo: basta escolher um representante de cada vez. O primeiro pode ser escolhido de 11 modos, o segundo, de 10 e o terceiro, de 9. Logo, o número total de possibilidades parece ser $11 \times 10 \times 9 = 990$. Esta solução está incorreta, mas podemos consertá-la para chegar à resposta certa. Suponha que tivéssemos escolhido, sucessivamente, os jogadores A , B e C . A comissão de representantes assim formada seria exatamente a mesma se tivéssemos selecionado, por exemplo, primeiro B , depois A , depois C . No entanto, as duas escolhas foram contadas por nós como se fossem distintas. O que nos permite corrigir o resultado da contagem é o fato de que todas as possíveis comissões são repetidas o mesmo número de vezes, correspondente a todas as suas possíveis ordenações. Por exemplo, A , B e C vão surgir, em nosso processo de enumeração, $3 \times 2 \times 1 = 6$ vezes, o mesmo ocorrendo com todas as

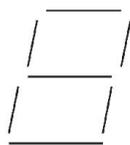
possíveis comissões. Logo, o número correto de comissões é igual a $990/6 = 165$.

De modo geral, o número de modos de escolher p dentre n objetos é representado por C_n^p (lê-se: combinação de n tomados p a p) e é igual a $\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p(p-1)\cdots 1}$.

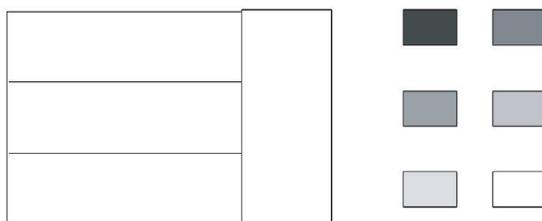
Exercícios

- 1) Um grupo de 4 alunos (Alice, Bernardo, Carolina e Daniel) tem que escolher um líder e um vice-líder para um debate.
 - (a) Faça uma lista de todas as possíveis escolhas (use a inicial de cada nome, para facilitar). Organize a sua lista do seguinte modo: primeiro, escreva todas as possibilidades em que Alice é a presidente, depois, aquelas em que Bernardo é presidente, e assim por diante.
 - (b) Conte o número de possíveis escolhas e verifique que o Princípio Multiplicativo fornece a mesma resposta.
- 2) Um restaurante possui um cardápio que apresenta escolhas de saladas (salada verde, salada russa ou salpicão), sopas (caldo verde, canja ou de legumes) e pratos principais (bife com fritas, peixe com purê, frango com legumes ou lasanha).
 - (a) De quantos modos se pode escolher um prato deste cardápio?
 - (b) De quantos modos se pode escolher uma refeição completa, formada por uma salada, uma sopa e um prato principal?
- 3) Quantos algarismos são escritos ao se escreverem os números inteiros de 1 a 100?

- 4) João e Isabel lançam, cada um, um dado.
- (a) Quantas são as possíveis combinações de resultado?
 - (b) Quantas são as possíveis somas que eles podem obter?
- 5) Cada dígito de uma calculadora é mostrado no visor acendendo filamentos dispostos como mostra a figura a seguir. Quantos símbolos diferentes podem ser representados? (Não inclua o caso em que nenhum filamento é aceso.)



- 6) Para pintar a bandeira abaixo estão disponíveis as seis cores dadas, sendo que regiões adjacentes devem ser pintadas de cores diferentes.



- (a) Qual é o número mínimo de cores a serem usadas?
 - (b) De quantos modos a bandeira pode ser pintada?
- 7) Dispomos de 5 cores distintas. De quantos modos podemos colorir os quatro quadrantes de um círculo, cada quadrante com

uma só cor, se quadrantes cuja fronteira é uma linha não podem receber a mesma cor?

- 8) Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas por questão? Em quantos destes gabaritos a letra A aparece exatamente uma vez? Em quantos a letra A não aparece?
- 9) Liste todos os subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$. Quantos são eles? De modo geral, quantos são os subconjuntos de um conjunto que tem n elementos?
- 10) De quantos modos 3 pessoas podem se sentar em 5 cadeiras em fila?
- 11) De quantos modos 5 homens e 5 mulheres podem se sentar em 5 bancos de 2 lugares, se em cada banco deve haver um homem e uma mulher?
- 12) De quantos modos podemos colocar 2 reis diferentes em casas não adjacentes de um tabuleiro 8×8 ? E se os reis fossem iguais?
- 13) De quantos modos podemos formar uma palavra de 5 letras de um alfabeto de 26 letras, se a letra A deve figurar na palavra mas não pode ser a primeira letra da palavra? E se a palavra devesse ter letras distintas?
- 14) As placas dos veículos são formadas por três letras (de um alfabeto de 26) seguidas por 4 algarismos. Quantas placas poderão ser formadas?
- 15) Um vagão do metrô tem 10 bancos individuais, sendo 5 de frente e 5 de costas. De 10 passageiros, 4 preferem se sentar de frente, 3 preferem se sentar de costas, e os demais não têm preferência. De quantos modos eles podem se sentar, respeitadas as preferências?

- 16) Escrevem-se os inteiros de 1 até 2222.
- Quantas vezes o algarismo 0 é escrito?
 - Em quantos números aparece o algarismo 0?
- 17) Quantos são os inteiros positivos de 4 algarismos nos quais o algarismo 5 figura?
- 18) Em uma banca há 5 exemplares iguais da *Veja*, 6 exemplares iguais da *Época* e 4 exemplares iguais da *Isto É*. Quantas coleções não vazias de revistas dessa banca podem ser formadas?
- 19) *Tendo 4 cores disponíveis, de quantos modos se pode pintar uma bandeira com 3 listras, tendo listras adjacentes de cores distintas?* Um aluno deu a seguinte solução: “Primeiro, eu vou pintar as listras extremas; para cada uma, eu tenho 4 possibilidades de escolha. Depois, eu pinto a listra central; como ela tem que ter cor diferente das duas vizinhas, eu posso escolher sua cor de apenas 2 modos. Logo, o número total de modos de pintar a bandeira é $4 \times 4 \times 2 = 32$ ”. A solução está certa ou errada? Se estiver errada, onde está o erro?
- 20) *Com 5 homens e 5 mulheres, de quantos modos se pode formar um casal?* Este problema foi resolvido por um aluno do modo a seguir: “A primeira pessoa do casal pode ser escolhida de 10 modos, pois ela pode ser homem ou mulher. Escolhida a primeira pessoa, a segunda pessoa só poderá ser escolhida de 5 modos, pois deve ser de sexo diferente do da primeira pessoa. Há, portanto, $10 \times 5 = 50$ modos de formar um casal.”
A solução está certa ou errada? Se estiver errada, onde está o erro?
- 21) Cada peça de um dominó apresenta um par de números de 0 a 6, não necessariamente distintos. Quantas são essas peças? E se os números forem de 0 a 8?

- 22) Quantos retângulos há formados por casas adjacentes em um tabuleiro de xadrez 8×8 ? Por exemplo, em um tabuleiro 2×2 há 9 retângulos, como mostra a figura abaixo.

