Digitação de respostas PIC-OBMEP

I) Resposta
mdc $(1218, 648) \rightarrow 1218 : \underline{648} = 1 * 648 + \underline{570}$, então,

mdc $(1218, 648)=$ mdc $(648, 570) \rightarrow 648 : \underline{570} = 1 * 570 + \underline{78}$

$=$ mdc $(570, 78) \rightarrow 570 : \underline{78} = 7 * 78 + \underline{24}$

$=$ mdc $(78, 24) \rightarrow 78 : \underline{24} = 3 * 24 + \underline{6}$

$=$ mdc $(24, 6) \rightarrow 24 : \underline{6} = 4 * 6 + \underline{0}$
Então

mdc $(1218, 648)= 6$

Isolando os restos em cada equação:

$-1218 - 1 * 648 = 570$

$648 - 1 * 570 = 78$

$570 - 7 * 78 = 24$

$78 - 3 * 24 = 6$

Tomando a última equação

$\mathbf{78} - 3 * \mathbf{24} = 6$ e substituindo os valores pelas suas respectivos igualdades, até que se consiga uma equação com o formato da equação dada:

$(648 - 1 * \mathbf{570}) - 3 * (\mathbf{570} - 7 * \mathbf{78}) = 6$

$648 - 1 * (-1218 - 1 * 648) - 3 * [(-1218 - 1 * 648) - 7 * (648 - 1 * \mathbf{570})] = 6$

$648 - 1 * (-1218 - 1 * 648) - 3 * [(-1218 - 1 * 648) - 7 * [648 - 1 * (-1218 - 1 * 648)] = 6$

Distribuindo as multiplicações, mas deixando-as indicadas:

$648 + 1 * 1218 + 1 * 648 + 3 - 1218 - 1 * 648 - 7 * [648 + 1 * 1218 + 648] = 6$

$648 + 1 * 1218 + 1 * 648 + 3 - 1218 - 1 * 648 - 7 * 648 + 7 * 1218 + 7 * 648 = 6$

648+1∗1218+**1*648**+3∗1218+**3*64**8+ **21*648**+21∗1218+**21*648** = 6 juntando os termos iguais, temos:

$47 * 648 + 25 * 1218 = 6 \rightarrow 648 * 47 + 1218 * 25 = 6 \Rightarrow$ comparando com a equação dada $648 * x + 1218 * y = 6$, temos $x = 47$ e $y = 25$.

I) a) Resposta

Seja n um inteiro múltiplo de 3 que dividido por 15 deixa resto 8.

Então, existem inteiros x e y tais que $n = 3x \Rightarrow 3x = 15y + 8$, pois fazendo a divisão: $D : d = q + r$, com D: dividendo, d: divisor, q: quociente e r: resto, temos:

$\dfrac{3x}{15} = q + 8 \Rightarrow 3x = 15q + 8$, fazendo $q = y$, temos uma equação diofantina:

$3x - 15y = 8$, que tem solução, pois $mdc(3, -15) = 3$ e esta equação não tem solução, pois 3 não divide 8. Então, não existem números inteiros múltiplos de 3 que divididos por 15 deixem resto igual a 8.

II) b) Resposta

Para ser um número par, tem de ser múltiplo de $2 \Rightarrow 2x = n$

Seja n um número inteiro par, que dividido por 15 deixa resto 8. Então existem inteiros x e y, tais que $n = 2x$.

Fazendo a divisão: $D : d = q + r$, com D: dividendo, d: divisor, q: quociente e r: resto

$\frac{2x}{15} = q+8 \Rightarrow 2x = 15q+8$, fazendo $q = y$, temos uma equação diofantina:

$2x - 15y = 8$, que tem solução, pois $mdc(2, -15) = 1$ e 1 divide 8. Então, encontrar a solução particular:

$x = x_0 + bt, \;\; x_0 = xc$, com b coeficiente de y

$y = y_0 - at, \;\; y_0 = yc$, com a coeficiente de x

Sendo que a eq. diofantina é dada por: $ax + by = mdc(a, b)$

Uma solução particular, pode ser:

$ax + by = mdc(a, b)$

$2x_0 - 15y_0 = 1$

$2 * (19) - 15 * (2) = 1$, multiplicando tudo por 8 que é o resto

$2 * (19 * 8) - 15 * (2 * 8) = 1 * 8$ temos

$x_0 = 19 * 8 \rightarrow x_0 = 152$ e $y_0 = (2 * 8) \rightarrow y_0 = 16$, substituindo os valores na eq. da solução particular da eq. diofantina

$x = x_0 + bt, \rightarrow x = 152 + (-15)t$

$y = y_0 - at, \rightarrow y = -16 - (2)t$

Assim a solução geral da equação diofantina é dada por:

$x = 152 - 15t$
$y = -16 - 2t$ com t variando no conjuntos dos números inteiros.

E $n = 2x$ (inteiros pares) é dado por:

$n = 2 * (-152 - 15t) \Rightarrow n = 304 - 30t$, com t também variando no conjuntos dos números inteiros.