Encontros de Aritmética

Hotel de Hilbert – Grupo G1,1 – N1M1

Luciana Cadar
Francisco Dutenhefner

Capa: Ampersand Comunicação Gráfica

Dutenhefner, Francisco
Cadar, Luciana
Encontros de Aritmértica
Rio de Janeiro, IMPA, 2015
121 páginas
ISBN 978-85-244-0392-7

Distribuição
IMPA/OBMEP
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
E-mail: cad_obmep@obmep.org.br
www.obmep.org.br

Texto já revisado pela nova ortografia

Sumário

Introdução

Todos os medalhistas da OBMEP são convidados a participar, por aproximadamente um ano, de um Programa de Iniciação Científica Júnior (PIC). Este Programa é realizado desde a primeira edição da OBMEP, em 2005, e a partir de 2008 ele é constituído de uma parte presencial e de uma parte virtual, nas quais são desenvolvidas atividades específicas para cada nível e cada multiplicidade de participação do aluno no PIC.

A parte presencial do PIC é constituída de 10 encontros e é realizada por meio de uma rede nacional de professores em polos distribuídos no país – situados em escolas e universidades – nos quais operam professores universitários e outros, desenvolvendo um programa especialmente desenhado para os alunos que receberam medalhas na OBMEP do ano anterior. Cada encontro presencial tem um objetivo específico em que o aluno é apresentado a um conteúdo novo, importante e motivador. Para os alunos do grupo G1,1 (nível 1 e multiplicidade 1), o PIC contém três módulos (aritmética, geometria e contagem) sendo realizados quatro encontros sobre aritmética, quatro encontros sobre geometria e dois encontros sobre contagem.

Na parte virtual os alunos têm a oportunidade de participar do Hotel de Hilbert: um fórum contínuo onde são aprofundadas as discussões iniciadas nos encontros presenciais. No Fórum Hotel de Hilbert os alunos podem postar, a qualquer momento, dúvidas ou exercícios e podem discutir com os colegas e o Moderador de Fórum as soluções de vários problemas e os conceitos matemáticos trabalhados em cada encontro presencial.

Cada encontro presencial e as atividades do Fórum seguem um planejamento cuidadosamente elaborado para cada nível e cada multiplicidade de participação do aluno no PIC. Após a realização de nove edições do PIC da OBMEP, acumulou-se uma enorme quantidade de materiais teóricos e problemas discutidos no Fórum. Esta apostila contém um resumo dos planejamentos e dos materiais acumulados no Fórum em todas as edições do PIC, referentes aos quatro encontros de aritmética para alunos do grupo G1,1 (nível 1 e multiplicidade 1).

Esta apostila não tem, então, o objetivo de ser um material didático completo no qual um assunto é minuciosamente apresentado e é totalmente esgotado. Com ela temos como objetivo colocar nas mãos dos alunos participantes do PIC da OBMEP um material orientador de apoio às aulas presenciais e às atividades de fórum trabalhadas nos quatro encontros de aritmética. Esta apostila não substitui os estudos dos materiais indicados: outras apostilas do PIC, livro do Fomin e vídeos relacionados. Você também vai observar que muitos dos problemas apresentados não estão acompanhados de soluções, pois as aulas presenciais do PIC e o Hotel de Hilbert são os locais adequados para as discussões destes problemas.

Para os Professores Orientadores e para os Moderadores, esta apostila orienta as atividades das aulas presenciais e as atividades de fórum, observando que no seu contexto regional, com a sua experiência didática e conhecimento da turma, o Professor Orientador deve fazer os ajustes necessários, lembrando que a aula presencial é o início da discussão de um conteúdo que continuará no Hotel de Hilbert. O Moderador de fórum, dentro destes direcionamentos, deve criar um ambiente de aprendizagem interessante e motivador, incentivando a participação de todos os alunos na discussão da teoria e de problemas que contribuem para melhor entendimento dos conteúdos. Para os alunos do PIC, esta apostila, com exercícios organizados por temas, é o material de estudo diário referente aos quatro encontros presenciais do módulo de aritmética.

Na página da internet da OBMEP está disponibilizada uma variedade enorme de materiais: apostilas, vídeos, bancos de questões e provas anteriores. Desde 2005 estes e outros materiais estão sendo utilizados nos encontros do PIC. Como esta apostila resume os planejamentos das edições anteriores do PIC, muitos dos exercícios que apresentamos foram retirados destes materiais.

Agora um recado direcionado para os estudantes. Nesta apostila são apresentados vários exercícios, alguns já resolvidos e outros apenas enunciados. É muito importante que você tente resolver sozinho todos os exercícios, mesmo aqueles que já estão acompanhados de solução. Somente após tentar, somente após chegar a uma resposta completa ou parcial para um exercício, estude a solução apresentada aqui na apostila. O estudo e o entendimento desta solução é muito importante para você verificar o seu aprendizado, conferindo se o seu raciocínio estava correto, ou para você aprender estratégias novas e corretas de soluções de problemas de aritmética. Além disso, muitas vezes, as soluções apresentadas aqui na apostila são essenciais para um completo entendimento da teoria que está sendo desenvolvida e, nestes casos, o estudo destas soluções é obrigatório. Por outro lado, para escrever uma solução de um problema é necessário aprendizado e treino. As soluções apresentadas aqui podem ajudar você a melhorar a sua escrita de um texto matemático. Então, por favor, não leia a solução dada na apostila antes de você tentar, de verdade, entender o enunciado, de você tentar resolver e de você tentar redigir soluções dos problemas propostos. Combinado?

No canal PICOBMEP do YouTube já estão disponibilizados pelo menos 56 vídeos sobre o módulo de aritmética do PIC. Como estes vídeos foram elaborados de acordo com os conteúdos programáticos do PIC, eles são um suporte excelente para os Professores Orientadores e para os alunos. Muitos conceitos, muitas propriedades, muitos exemplos e exercícios desta apostila, dos materiais didáticos do PIC e do livro do Fomin estão explorados de um modo bastante detalhado nestes vídeos. Além disso, também são apresentadas várias outras aplicações muito interessantes.

Como os alunos podem assistir os vídeos várias vezes, o fórum e o recurso didático do vídeo fornecem uma oportunidade para os alunos do PIC continuarem os seus estudos em casa, entre dois encontros presenciais.

Ao longo desta apostila, através do número do vídeo, indicaremos sempre que um tópico, um exemplo ou um exercício possuir algum vídeo relacionado no canal picobmep no YouTube.

Observamos que os vídeos 1, 2, 3, 4 e 5 apresentam o conjunto dos números naturais e explicam algoritmos para algumas operações entre dois números naturais. Estes vídeos são muito importantes. Eles podem ser utilizados em qualquer momento e por qualquer aluno do PIC sempre que for detectada a necessidade de alguma revisão destes tópicos.

No Portal da Matemática existe uma coleção muito variada de vídeos disponibilizados para estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio. Para os alunos do grupo G1,1 os vídeos do 6º até o 9º ano do Ensino Fundamental fornecem um material complementar excelente tanto para um melhor desempenho escolar quanto para um bom entendimento dos conteúdos trabalhados no PIC. Estes vídeos estão organizados em módulos da seguinte maneira:

- Módulos do 6º ano do Ensino Fundamental
  - Divisibilidade
  - Frações, o primeiro contato
- Módulos do 7º ano do Ensino Fundamental
  - Números inteiros e números racionais
  - Porcentagem e juros
  - Notação algébrica e introdução às equações
- Módulos do 8º ano do Ensino Fundamental
  - Potenciação e dízimas periódicas
  - Expressões algébricas e polinômios
  - Produtos notáveis e fatoração de expressões algébricas
  - Elementos básicos de geometria plana – parte 1
  - Porcentagem
  - Sistemas de equações do primeiro grau
  - Elementos básicos de geometria plana – parte 3
  - Números naturais: contagem, divisibilidade e Teorema da Divisão Euclidiana

"verfinal"
2015/3/16
page x
Estilo OBMEP

- Módulos do 9º ano do Ensino Fundamental
  - Semelhança de triângulos e Teorema de Tales
  - Triângulo retângulo, lei dos senos e cossenos, polígonos regulares
  - Áreas de figuras planas
  - Equações do segundo grau

Dentro de cada um destes módulos do Portal da Matemática podem ser encontrados: videoaulas, exercícios resolvidos, materiais diversos e conteúdos interativos. Como a página do Portal da Matemática é muito dinâmica e está em pleno desenvolvimento, sugerimos que os seus módulos sejam visitados com frequência, pois novos vídeos e novos conteúdos podem ser disponibilizados a qualquer momento.

Como sugestão de estudo complementar, sempre indicaremos quando um conteúdo, um exemplo ou um exercício abordado na apostila possuir uma videoaula relacionada no Portal da Matemática. Neste caso, na aula presencial, no fórum ou como uma atividade de estudo em casa, sugerimos que o vídeo seja explorado pelos alunos, pelos Professores Orientadores e pelos Moderadores de Fórum.

Por outro lado, nem todas as videoaulas do Portal da Matemática possuem um conteúdo similar nesta apostila. Mesmo assim estas videoaulas são importantes, pois exploram conteúdos básicos fundamentais que devem ser estudados no caso do aluno possuir alguma dificuldade ou interesse em aprender mais sobre o que já foi estudado na escola. Vale a pena conferir estes vídeos, pois muito provavelmente eles apresentam a Matemática de um modo diferente do que você está acostumado a ver.

ENCONTRO 1

No primeiro encontro presencial do módulo de Aritmética, pretende-se que sejam realizados estudos sobre os seguintes temas.

Assuntos	**Materiais relacionados**	**Vídeos no canal picobmep no YouTube**
Discussão de alguns problemas do tema paridade para motivação inicial.	Fomin: capítulo 1 – Paridade Fomin: capítulo zero	18, 19, 20
Estudo do sistema decimal de numeração destacando a importância da posição dos algarismos na representação decimal de um número inteiro. Domínio das quatro operações básicas entre números naturais.		1, 2, 3, 4, 5, 11
Base binária: estudo de alguns problemas de pesagens com balanças.	Fomin: seção 1 do capítulo 15	12, 13, 14, 15, 16

1.1 Paridade

O objetivo do módulo de Aritmética é explorar o conjunto dos números inteiros, suas principais propriedades e aplicar estes conceitos no estudo de situações discretas. Uma das estruturas mais básicas do conjunto dos números naturais é a sua divisão em números pares e ímpares. Apesar disto ser muito simples, a análise da paridade dos números pode ser utilizada na solução de vários problemas, como os que estão sugeridos a seguir.

Exercício 1: [JOGO DAS FACES] Para iniciar o estudo de paridade, sugerimos a seguinte adivinhação que pode ser realizada entre o Professor Orientador e os alunos.

(a) Sobre uma mesa coloque 5 moedas: três com a coroa para cima e duas com a cara para cima (veremos logo a seguir que estes números podem ser trocados por quaisquer outros).

(b) O Professor vira de costas para as moedas e pede para os alunos virarem uma moeda qualquer.

(c) Em seguida, ele pede para os alunos virarem novamente uma moeda qualquer (que pode inclusive ser a mesma que tinha sido virada anteriormente).

(d) E o professor continua pedindo que os alunos virem uma moeda qualquer por vez, totalizando 6 viradas ao todo (veremos que este número também poderá ser substituído por um outro qualquer).

(e) Após 6 viradas, o professor solicita que os alunos escondam uma moeda, observando antes a sua face superior.

(f) Escondida a moeda, o professor observa, então, as 4 moedas que ficaram sobre a mesa e adivinha a face superior da moeda escondida.

Pergunta: como o professor consegue adivinhar a face superior da moeda escondida?

Solução. No início do jogo, temos 3 coroas e 2 caras, ou seja, temos um número ímpar de coroas e um número par de caras. Após uma moeda ser virada, podemos ter 4 coroas e 1 cara, ou então, 2 coroas e 3 caras. Observe que independente da moeda que foi virada passamos a ter uma quantidade par de coroas e uma quantidade ímpar de caras. Continuando este raciocínio vemos que após ser executada uma virada de moeda, a paridade do número de caras e a paridade do número de coroas muda (de par para ímpar ou de ímpar para par). E isto acontece em cada virada.

	COROAS	CARAS
início	ímpar	par
após a 1ª virada	par	ímpar
após a 2ª virada	ímpar	par
após a 3ª virada	par	ímpar
após a 4ª virada	ímpar	par
após a 5ª virada	par	ímpar
após a 6ª virada	ímpar	par

Observe que após 6 viradas estamos como na posição inicial: uma quantidade ímpar de coroas e uma quantidade par de caras. Quando os alunos escondem uma moeda, seja ela cara ou coroa, a paridade do mesmo tipo de moeda escondida muda em relação a situação inicial. Deste modo:

1. Se os alunos esconderam uma coroa, a quantidade de coroas existentes nas 4 moedas que sobraram na mesa é par.

2. Se os alunos esconderam uma cara, a quantidade de caras deve ser ímpar.

Daí, ao observar as 4 moedas restantes, basta que o professor observe a paridade de caras ou coroas que está diferente da situação inicial. O tipo, cara ou coroa, que estiver diferente da situação inicial é o tipo de moeda escondida pelos alunos.

Observe que esta adivinhação pode ser generalizada para uma quantidade qualquer de moedas e para uma quantidade qualquer de caras e de coroas exibidas no início da partida. Para entender a adivinhação é suficiente perceber que a cada virada de uma moeda, a paridade da quantidade de caras e a paridade da quantidade de coroas muda. Após um número par de viradas, estamos na mesma paridade do início do jogo. E após um número ímpar de viradas a paridade é invertida em relação àquela do início do jogo.

No Capítulo 1 (paridade) do livro do Fomin existem muitos problemas motivadores interessantes relacionados com o tema deste primeiro encontro presencial. Sugerimos que os alunos estudem este capítulo do livro do Fomin. Para o grupo G1,1 gostaríamos de enfatizar os seguintes problemas.

Exercício 2: Você pode encontrar cinco números ímpares cuja soma seja 100? (Este problema está discutido no vídeo 18.)

Exercício 3:

1. Existem dois números pares consecutivos?

2. Existem dois números ímpares consecutivos?

3. Existe um número natural que não é par nem ímpar?

4. Escreva dois números pares. Agora some estes dois números. O resultado obtido é par ou ímpar? Repetindo este experimento com

outros números, você poderá obter uma soma par ou uma soma ímpar? Justifique a sua conclusão.

5. O que podemos dizer da soma de dois números ímpares? O resultado é par ou ímpar?

6. E a soma de um número par com um número ímpar?

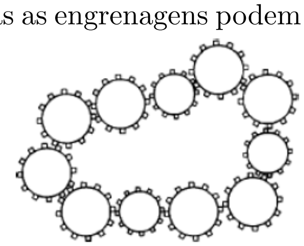
7. E se somarmos uma quantidade par de números ímpares?

8. E a soma de uma quantidade ímpar de números ímpares, é par ou ímpar?

Além do Capítulo 1 do livro do Fomin, existem dois artigos interessantes que tratam de problemas envolvendo paridades. O artigo "Paridade" de Eduardo Wagner publicado na Edição Especial OBMEP 2006 da revista *Eureka!*, e o artigo "Par ou Ímpar? Eis a questão" de Samuel Barbosa Feitosa e Einstein do Nascimento Júnior publicado na revista *Eureka!* número 31. Estes materiais fornecem uma grande quantidade de problemas que podem ser utilizados na aula presencial e no fórum. Vejamos mais alguns exercícios.

Exercício 4: (Fomin, capítulo 1, problema 16) É possível trocar uma nota de 25 rublos em dez notas com valores 1, 3 ou 5 rublos?

Exercício 5: (Fomin, capítulo 1, problema 1) Onze engrenagens estão colocadas em um plano, arrumadas em uma cadeia como está ilustrado na figura a seguir. Todas as engrenagens podem rodar simultaneamente?



Exercício 6: (Fomin, capítulo 1, problema 17) Pedro comprou um caderno com 96 folhas e numerou-as de 1 a 192. Vitor arrancou 25 folhas do caderno de Pedro e somou os 50 números que encontrou escritos nas folhas. Esta soma poderia ser igual a 1990? (Um problema muito parecido com este está resolvido no vídeo 20.)

Solução. Em cada página, de um lado está escrito um número par e do outro lado está escrito um número ímpar. Assim Vitor somou 25 números pares (obtendo um número par) e somou 25 números ímpares (obtendo um número ímpar). Como a soma de um par e um ímpar é um número ímpar, esta soma não pode ser igual a 1990.

Exercício 7a: (Fomin, capítulo 1, problema 20) Os números de 1 a 10 estão escritos em uma linha. Pode-se colocar os sinais de "$+$" e de "$-$" entre eles de modo que o valor da expressão resultante seja igual a zero?

Solução. Não é possível. Imaginando que fosse possível, poderíamos separar os números dados em dois grupos com a mesma soma (basta passar todos os números com sinal negativo para o outro lado da expressão que é igual a zero). Entretanto a soma dos números naturais de 1 a 10 é igual a 55. Como este número é ímpar, não podemos separar os números dados em dois grupos que tenham a mesma soma.

Exercício 7b: Continuando o exercício anterior, vamos imaginar que os números de 1 a 11 estão escritos em uma linha. Pode-se colocar os sinais de "$+$" e de "$-$" entre eles de modo que o valor da expressão resultante seja igual a zero?

Solução. Como no caso anterior, para isto ser possível, devemos dividir os números dados em dois grupos com mesma soma. Como a soma dos números naturais de 1 a 11 é igual a 66, precisamos de dois grupos cuja soma seja igual a 33. Começando pelos maiores, observe que $11+10+9 =$

30. Daí, $11+10+9+3=33$. Assim, $1+2+4+5+6+7+8=33$ e, portanto, $1+2+4+5+6+7+8=11+10+9+3$. Daí obtemos $1+2-3+4+5+6+7+8-9-10-11=0$.

Exercício 7c: Como **desafio** mostre que sempre que a soma dos números de 1 até n é par, então é possível separar os números de 1 até n em dois subgrupos de números de igual soma. Relacionado com este desafio podem ser levantadas várias questões, como as exemplificadas a seguir. Observamos que no Portal da Matemática, no 8º ano do Ensino Fundamental, no módulo "Números Naturais: contagem, divisibilidade e Teorema da Divisão Euclidiana" o vídeo "A soma de números naturais" e o vídeo "Soma de números naturais: resolução de exercícios" apresentam soluções para este desafio.

(a) Qual é o valor da soma $1+2+3+\cdots+2014$? Esta soma é par ou é ímpar?

(b) Qual é a soma dos múltiplos de 3 entre 1 e 301.

(c) Calcule as somas $1+2+3+\cdots+20$, $1+2+\cdots+50$ e $21+22+23+\cdots+50$.

(d) Para quais valores de n a soma dos números de 1 até n é par?

(e) Indique como o exercício 7b poderia ser revolvido para a lista dos números de 1 até 100.

Exercício 7d: (Fomin, capítulo 1, problema 21) Um gafanhoto pula ao longo de uma linha. No seu primeiro pulo, ele anda 1 cm, no segundo 2 cm, no terceiro 3 cm, e assim sucessivamente. Cada pulo o leva para a direita ou para a esquerda. Mostre que após 1985 pulos, o gafanhoto não pode retornar a sua posição inicial.

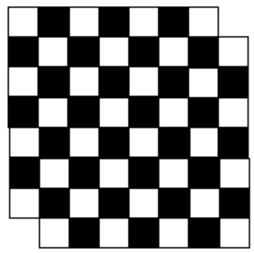
Solução. Este exercício pode ser considerado como uma aplicação dos problemas anteriores. Em cada pulo, quando o gafanhoto andar para a direita, vamos colocar um sinal "+" na distância que ele percorreu, e quando ele andar para a esquerda vamos colocar um sinal "−" na distância que ele percorreu no pulo. Assim, para ele retornar para a posição inicial deve ser possível colocar sinais de "+" e de "−" na frente e entre os números naturais de 1 até 1985 de modo que a expressão resultante seja igual a zero. Entretanto, como a soma dos números de 1 até 1985 é ímpar, concluímos que isto é impossível.

Exercício 8: (Fomin, capítulo 1, problema 10) Todas as peças de um dominó foram colocadas em uma cadeia de modo que o número de bolinhas nas extremidades de dois dominós adjacentes são iguais. Se uma das extremidades da cadeia contém 5 bolinhas, qual é o número de bolinhas na outra extremidade? (Este problema está resolvido no vídeo 19.)

Os exercícios 9, 10, 11 e 12 tratam de problemas com tabuleiros. No vídeo 18 existe uma excelente explicação sobre o tabuleiro do xadrez, sobre a nomenclatura utilizada para cada uma de suas casas e sobre a forma de movimentação de um cavalo.

Exercício 9: (Fomin, capítulo 1, problema 8) Um tabuleiro 5×5 pode ser coberto por dominós 1×2?

Exercício 10: (Fomin, capítulo 1, problema 23) Considere um tabuleiro de xadrez (com $8 \times 8 = 64$ casas). Suponha que você tenha peças de dominó, cada uma com o tamanho exato de duas casas do tabuleiro. Observe que, deste modo, pode-se cobrir todo o tabuleiro de xadrez com exatamente 32 peças de dominó. Quando são retiradas do tabuleiro duas casas diagonalmente opostas, ainda é possível cobri-lo com 31 peças de dominó?



Solução. Não é possível. Um tabuleiro usual de xadrez possui 32 casas brancas e 32 casas pretas. Quando são retiradas as duas casas diagonalmente opostas, obtemos um novo tabuleiro com 32 casas brancas e 30 casas pretas. Como cada peça do dominó cobre exatamente uma casa branca e uma casa preta, para cobri-lo com as peças de dominó, o número de casas brancas deve ser igual ao número de casas pretas.

Exercício 11: (Fomin, capítulo 1, problema 2) Em um tabuleiro de xadrez, um cavalo sai do quadrado a1 e retorna para a mesma posição depois de vários movimentos. Mostre que o cavalo fez um número par de movimentos.

Solução. Em cada movimento o cavalo sai de uma casa de uma cor e chega em uma casa de cor diferente. Assim, durante os movimentos, as cores das casas ocupadas pelo cavalo se alternam. Portanto, somente após um número par de movimentos ele pode ocupar a casa de mesma cor que ele ocupava inicialmente.

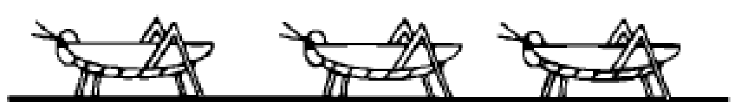
Exercício 12: (Fomin, capítulo 1, problema 3) É possível um cavalo começar na posição a1 de um tabuleiro de xadrez e terminar em h8 visitando cada um dos quadrados restantes exatamente uma vez ao longo do caminho?

Solução. Não é possível. Em cada movimento, um cavalo salta de um quadrado de uma cor para um de cor oposta. Como o cavalo tem que fazer 63 movimentos, após este último movimento (de número ímpar), ele é levado para um quadrado de cor oposta à cor onde ele começou. No entanto, os quadrados a1 e h8 têm a mesma cor.

Exercício 13: (Fomin, capítulo 1, problema 5) Três discos de borracha, A, B e C, utilizados no hóquei sobre o gelo, estão no campo. Um jogador bate em um deles de tal forma que ele passa entre os outros dois discos. Ele faz isto 25 vezes. Ele pode retornar os três discos às suas posições iniciais? (Veja a solução deste problema no vídeo 20.)

Solução. Não é possível. Olhando o campo de cima, observamos que os três discos formam os vértices de um triângulo. Lendo os vértices na ordem alfabética, em uma jogada os vértices estão ordenados no sentido horário e na outra jogada os vértices estão ordenados no sentido anti-horário. Após um número ímpar de movimentos a ordem dos vértices é a oposta da ordem inicial. Assim, após um número ímpar de movimentos, os discos não podem voltar para a sua posição inicial.

Exercício 14: (Fomin, capítulo 1, problema 30) Três gafanhotos estão brincando ao longo de uma linha. Na sua vez, cada gafanhoto pode pular sobre um outro gafanhoto, mas não sobre os outros dois. Eles podem retornar para suas posições iniciais após 2011 movimentos?



Solução. Este problema pode ser resolvido de modo análogo ao problema anterior.

Exercício 15: Em um conjunto de 101 moedas, há 50 falsas e as demais são verdadeiras. Uma moeda falsa difere de uma verdadeira em 1 grama. Marcos tem uma balança que mostra a diferença de pesos entre os objetos colocados nos dois pratos. É possível, com uma pesagem, identificar se a moeda escolhida é falsa? (Veja a solução deste problema no vídeo 20.)

1.2 Sistema posicional de numeração

Nesta seção são apresentadas atividades que contribuem para um correto entendimento do sistema posicional de numeração. Ao serem realizadas, esperamos que os alunos percebam que na representação decimal de um número, a posição de um algarismo interfere em seu valor relativo. Por exemplo, no número 742, o algarismo 7 significa sete centenas, o número 4 significa quatro dezenas e o 2 significa duas unidades, ou equivalentemente: $742 = 700 + 40 + 2 = 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$.

Observamos que o vídeo 11 do canal picobmep no YouTube apresenta o sistema posicional de numeração. Vale a pena ver as explicações apresentadas neste vídeo. Após estudar o conteúdo, resolva os seguintes problemas.

Exercício 16: (Fomin, capitulo 0, problema 8) Retire 10 dígitos do número 1234512345123451234512345 de modo que o número remanescente seja o maior possível. E para formar o menor número, como deveríamos proceder?

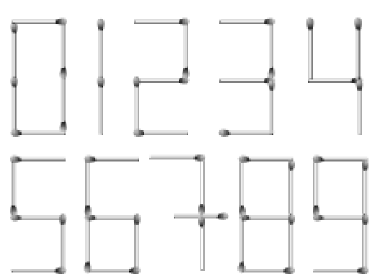
Solução. O maior número é 553451234512345 e o menor número é

111231234512345. Veja a solução deste problema no vídeo 1. Os vídeos de 1 a 5 contêm várias explicações interessantes sobre o sistema decimal de numeração e as quatro operações. Todos os alunos do grupo devem assistir estes vídeos e devem postar suas dúvidas no Fórum Hotel de Hilbert.

Exercício 17: Determine o menor número com 10 algarismos tal que a soma dos seus algarismos seja igual a 40.

Solução. Para o número ser o menor possível, devemos colocar o menor algarismo mais a esquerda do número. Assim vamos colocar o algarismo 1 à esquerda do número. Logo à direita desse algarismo 1, vamos colocar a maior quantidade possível de algarismos zero. Mas como a soma dos algarismos deve ser 40, devemos ter algarismos não nulos mais a direita do número que será formado. Quanto mais noves forem colocados à direita do número, mais destes algarismos zero poderão ser utilizados. Dividindo 40 por 9 obtemos $40 = 4 \times 9 + 4$. Portanto podemos colocar 4 algarismos 9 mais a direita do número. Como a soma dos dez algarismos deve ser 40, o número procurado é 1000039999. (Veja a solução de um problema bastante similar a este no vídeo 3.)

Exercício 18: (Banco de Questões 2012, nível 1, problema 7) Com palitos de fósforo formamos algarismos, conforme a figura. Deste modo, para escrever o número 188, usamos 16 palitos.



César escreveu o maior número que é possível escrever com exatamente 13 palitos. Qual é a soma dos algarismos do número que César escreveu?

(a) 8 (b) 9 (c) 11 (d) 13 (e) 15

Exercício 19: (Banco de Questões 2012, nível 1, problema 2) Joãozinho coleciona números naturais cujo algarismo das unidades é a soma dos outros algarismos. Por exemplo, ele colecionou 10023, pois $1+0+0+2 = 3$.

(a) Na coleção de Joãozinho há um número que tem 4 algarismos e cujo algarismo das unidades é 1. Que número é este?

(b) Qual é o maior número sem o algarismo 0 que pode aparecer na coleção?

(c) Qual é o maior número sem algarismos repetidos que pode aparecer na coleção?

Exercício 20: (Banco de Questões 2006, nível 1, lista 1, problema 3) Considere dois números naturais, cada um deles com três algarismos diferentes. O maior deles só tem algarismos pares e o menor só tem algarismos ímpares. Se a diferença entre eles é a maior possível, qual é esta diferença?

Solução. Para que a diferença seja a maior possível devemos escolher o maior número de 3 algarismos pares diferentes e o menor número de 3 algarismos ímpares diferentes. O maior número de 3 algarismos pares diferentes é 864 e o menor número de 3 algarismos ímpares diferentes é 135. A diferença entre eles é $864 - 135 = 729$.

Exercício 21: (Banco de Questões 2009, nível 1, lista 4, problema 2) Um número de 6 algarismos começa por 1. Se deslocamos este algarismo

1 da primeira posição para a última à direita, obtemos um novo número de 6 algarismos que é o triplo do número de partida. Qual é este número?

Solução. O problema é determinar os algarismos a, b, c, d e e tais que o número $abcde1$ (de 6 algarismos) seja o triplo do número $1abcde$ de 6 algarismos.

$$\begin{array}{r} 1\,a\,b\,c\,d\,e \\ \times\ 3 \\ \hline a\,b\,c\,d\,e\,1 \end{array}$$

De início vemos que $e = 7$, e a partir daí podemos ir descobrindo cada um dos algarismos, conforme indicado na sequência a seguir:

$$\begin{array}{r} 1\,a\,b\,c\,d\,7 \\ \times\ 3 \\ \hline a\,b\,c\,d\,7\,1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 1\,a\,b\,c\,5\,7 \\ \times\ 3 \\ \hline a\,b\,c\,5\,7\,1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 1\,a\,b\,8\,5\,7 \\ \times\ 3 \\ \hline a\,b\,8\,5\,7\,1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 1\,a\,2\,8\,5\,7 \\ \times\ 3 \\ \hline a\,2\,8\,5\,7\,1 \end{array}$$

Portanto, $a = 4$ e o número de partida é 142857.

Vejamos agora alguns exercícios retirados da Apostila 1.

Exercício 22: (Apostila 1, Problema 2.2) Fixe três algarismos distintos e diferentes de zero. Forme os seis números com dois algarismos distintos tomados entre os algarismos fixados. Mostre que a soma destes números é igual a 22 vezes a soma dos três algarismos fixados.

Solução. Como este problema pode ser um pouco mais complicado, sugerimos que você comece com um exemplo numérico. Por exemplo, com os algarismos 1, 2 e 3 podemos formar os números 12, 13, 21, 23, 31 e 32. A soma destes números é igual a 132, e a soma dos algarismos dados é igual a $1 + 2 + 3 = 6$. Observe que o resultado enunciado no exercício é verdadeiro pois $22 \times 6 = 132$.

Agora vamos para o caso geral. Suponhamos que os algarismos escolhidos são a, b e c. Com estes algarismos formamos os seguintes números de 2 algarismos:

$$ab = 10a + b$$

$$ac = 10a + c$$

$$ba = 10b + a$$

$$bc = 10b + c$$

$$ca = 10c + a$$

$$cb = 10c + b$$

Somando estes números, somando os lados esquerdos e os lados direitos destas igualdades, obtemos

$$ab + ac + ba + bc + ca + cb = 22a + 22b + 22c = 22(a + b + c).$$

Exercício 23: (Apostila 1, Problema 2.4) Qual é o menor número de dois algarismos? E qual é o maior? Quantos são os números de dois algarismos? Quantos algarismos precisa-se para escrevê-los?

Exercício 24: Qual é a quantidade de elementos do conjunto $\{30,\ 31,\ 32,\ \ldots, 75\}$?

Solução. Existem várias maneiras de contar a quantidade de números no conjunto dado. Em uma delas, o aluno pode observar que existem 75 números no conjunto $\{1,\ 2,\ \ldots,\ 75\}$ e que existem 29 números em $\{1,\ 2,\ \ldots,\ 29\}$. Fazendo a diferença, concluímos que existem $75 - 29 = 46$ números no conjunto $\{30,\ 31,\ \ldots,\ 75\}$. Neste tipo de problema, alunos e professores devem verificar se está sendo bem interpretado os "três pontinhos" que sempre são utilizados nestas situações.

Exercício 25: Uma urna contém 145 bolinhas numeradas sequencialmente. Se a primeira bolinha é a de número 347, qual é o número da última bolinha?

Solução. As 145 bolinhas estão númeradas com os números $\{347, 348, 349, \ldots, x\}$, sendo x o número da última bolinha. Observe que as bolinhas também podem ser numeradas do seguinte modo:

- 1ª bolinha: 347.
- 2ª bolinha: $348 = 347 + 1$.
- 3ª bolinha: $349 = 347 + 2$.
- 4ª bolinha: $350 = 347 + 3$.
- E assim por diante até a última bolinha. Como existem 145 bolinhas na urna, por analogia, vemos que o número desta bolinha deve ser igual a $347 + 144 = 491$.

Exercício 26: (Apostila 1, Problema 2.5) Quantos algarismos são usados para numerar um livro de 300 páginas?

Solução.

- Das páginas 1 até 9 são utilizados 9 algarismos.
- Das páginas 10 até 99 existem 90 números com dois algarismos, totalizando aqui $2 \times 90 = 180$ algarismos.
- Para numerar as páginas de 100 a 300 são necessários 201 números de três algarismos cada, totalizando $3 \times 201 = 603$ algarismos.

Portanto para numerar as 300 páginas do livro são necessários $9 + 180 + 603 = 792$ algarismos.

Exercício 27: Domingos usou 1002 algarismos para numerar as páginas do livro que acabou de escrever. Quantas páginas tem o livro do Domingos?

Solução.

- Das páginas 1 até 9 são utilizados 9 algarismos.
- Das páginas 10 até 99 existem 90 números com dois algarismos, totalizando aqui $2 \times 90 = 180$ algarismos. Assim, nas páginas com 1 ou 2 algarismos são utilizados $9 + 180 = 189$ algarismos.
- Das páginas 100 até 999 existem 900 números com três algarismos, totalizando aqui $3 \times 900 = 2700$ algarismos. Como $189 < 1002 < 2700$ concluímos que a última página do livro de Domingos é um número de três algarismos.
- Efetuando a diferença $1002 - 189 = 813$, vemos que foram gastos 813 algarismos em números de 3 algarismos. Dividindo por três, vemos que o livro de Domingos possui $\frac{813}{3} = 271$ páginas com três algarismos.
- Como a primeira página de três algarismos é o número 100, e como existem 271 páginas com três algarismos, concluímos que a última página do livro de Domingos é a de número $100 + 271 - 1 = 370$.

1.3 Base binária: problemas de pesagens com balanças

Comparar o sistema decimal de numeração com outras bases numéricas parece ser uma boa ideia para garantir que os alunos compreendam melhor os sistemas posicionais de numeração. Para os alunos do Nível 1, este estudo pode ser restringido as bases 10 e 2. Na base 10, todo número natural pode ser escrito como uma soma de múltiplos (de 0 a 9) de potências de 10. De modo análogo, na base 2, todo número natural pode ser escrito como uma soma de potências de 2. Nesta seção vamos explorar este fato e vamos utilizá-lo na resolução de alguns problemas com balanças. Observamos que no capítulo 15 seção 1 do livro do Fomin, existem vários problemas interessantes sobre este tópico.

Os vídeos 12, 13, 14, 15 e 16 apresentam várias atividades interessantes sobre números escritos em outras bases numéricas. Em particular, o vídeo 12 mostra o sistema binário de numeração e o vídeo 13 resolve problemas de pesagens em uma balança de equilíbrio. Vale a pena conferir.

Exercício 28: Em uma balança de dois pratos você pode utilizar pesinhos de 1 kg, 2 kg, 4 kg e k 8 kg. Utilizando no máximo uma unidade de cada um destes pesinhos de um lado da balança, quais pesos podem ser equilibrados na balança? (Assista a solução deste problema no vídeo 13.)

Exercício 29: Escrever os números 62, 125 e 347 como somas de potências de 2. Representar estas somas de modo análogo ao que é feito na base 10. (O vídeo 12 apresenta o sistema binário de um modo bastante didático, comparando-o com o sistema decimal.)

Exercício 30: O número $(101101)_2$ é par ou ímpar? E o número $(10110010)_2$ é par ou ímpar? Determine um critério para saber quando um número escrito na base 2 é par.

Exercício 31: (Problema 18, capítulo zero, Fomin) Distribua 127 moedas de um real entre 7 porta-moedas de modo que qualquer soma inteira de 1 até 127 reais possa ser paga sem abrir os porta-moedas.

Para explorar o fato de que todo número natural pode se expressar de modo único como uma soma de potências de 2, propomos a seguinte atividade que poderá ser realizada entre o professor e os alunos, ou entre grupos de alunos.

Atividade 32: Para preparar esta atividade, reproduza e recorte as 5 cartelas numeradas indicadas na figura a seguir.

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	

Nesta atividade, um colega seu pensa um número inteiro entre 1 e 30, e você vai adivinhar o número pensado por ele. Para isto, entregue todas as cartelas ao seu colega e solicite que ele devolva para você todas e apenas as cartelas em que o número que ele pensou está escrito. Somando mentalmente o primeiro número (em cima e à esquerda) das cartelas que você recebeu de volta, o resultado será o número pensado pelo seu colega. Você fala o resultado desta soma e, parecendo mágica, você adivinhou o número pensado pelo seu colega.

1. Explore esta atividade com algumas pessoas.
2. Como ela funciona?
3. Como as cartelas são construídas?
4. Como modificamos as cartelas para que o aluno possa pensar um

número entre 1 e 60?

Solução: Todos os números naturais se decompõem, de modo único, como uma soma de potências de 2. Um número está escrito apenas nas cartelas das potências de dois que aparecem nesta decomposição. Por exemplo, como

$$22 = 2 + 4 + 16,$$

o número 22 aparece apenas nas cartelas dos números 2, 4 e 16. É deste modo que as cartelas são construídas.

Os próximos dois problemas são muito interessantes. Apesar de serem problemas mais desafiadores, as suas soluções utilizam apenas a principal propriedade estudada nesta seção: *todo número natural pode ser escrito de modo único como uma soma de potências de 2.*

Desafio 33: (Banco de Questões 2009, nível 3, lista 9, problema 1) Aladim tem 10 sacos de moedas, onde cada saco tem somente moedas verdadeiras ou moedas falsas. Cada moeda verdadeira pesa 10 g e cada moeda falsa pesa 9 g. Suponhamos que em cada saco existam exatamente 10 moedas e somente um dos sacos é de moedas falsas. Utilizando uma balança e efetuando apenas uma pesagem, como Aladim deve proceder para descobrir qual é o saco das moedas falsas?

Solução. Se pudéssemos fazer qualquer número de pesagens, procederíamos da forma que nos parece mais natural: vamos pesando uma moeda de cada saco, até descobrir uma de 9 gramas. Ou seja, faríamos um teste para cada saco.

Mas como só podemos fazer uma pesagem, esta deve ser um teste simultâneo nos dez sacos. Bastará então retirar uma moeda de cada saco?

Claro que não, porque teríamos então dez moedas, uma delas obrigatoriamente falsa, que pesariam $9 \times 10 + 9 = 99$ gramas, e continuaríamos sem saber de onde tinha vindo a moeda falsa.

Então, para solucionar o problema, devemos retirar de cada saco um número diferente de moedas. Retiramos então uma moeda do primeiro saco, duas do segundo saco, três do terceiro, e assim sucessivamente, até o último saco, de onde retiramos dez moedas.

Ficamos então com $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$ moedas que são colocadas na balança.

Se todas estas moedas fossem verdadeiras, pesariam 550 gramas. Mas, como algumas são falsas, o peso obtido será menor. Se faltar uma grama é porque há uma moeda falsa e então o primeiro saco é o de moedas falsas. Se faltarem duas gramas, significa que as moedas falsas estão no segundo saco e assim por diante.

Desafio 34: Uma pessoa tem 10 sacos com muitas, muitas moedas cada. Alguns dos sacos, mas não se sabe quantos, estão cheios de moedas falsas, enquanto os outros sacos estão cheios de moedas verdadeiras. As moedas verdadeiras pesam dez gramas e as moedas falsas pesam nove gramas cada. Com uma só pesagem identificar todos os sacos que têm moedas falsas.

Solução. Em relação ao desafio anterior, este é diferentem, pois não sabemos quantos são os sacos com moedas falsas. Portanto, precisamos mudar de estratégia para resolver este problema. E esta nova estratégia não pode deixar dúvidas de qual saco uma moeda falsa foi retirada.

Para resolver este problema então, pode-se proceder assim: retira-se 1 moeda do primeiro saco, 2 moedas do segundo saco, 4 moedas do terceiro saco, 8 moedas do quarto saco, 16 moedas do quinto saco etc. Sempre dobramos o número de moedas retiradas no saco anterior. No total então, são retiradas

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 = 1023$$

moedas, que pesariam juntas 10230 gramas, caso todas fossem verdadeiras. A diferença entre o peso real obtido na pesagem destas moedas e o peso ideal (10230 gramas) indica a quantidade de moedas falsas pesadas. Além disto, afirmamos que através deste número pode-se concluir de qual saco estas moedas falsas foram retiradas. Vejamos isto através de um exemplo: imaginemos que na pesagem obtivemos 10125 gramas, ou seja, faltaram $10230 - 10125 = 105$ gramas (que corresponde a 105 moedas falsas). Escrevendo 105 como soma de potências de 2 obtemos $105 = 1 + 8 + 32 + 64$. Esta soma nos mostra que as moedas falsas estão nos sacos de onde foram retiradas 1, 8, 32 e 64 moedas, ou seja, são as moedas do 1º, 4º, 6º e 7º sacos.

1.4 Curiosidades

Nesta última seção do Encontro 1 apresentamos algumas curiosidades aritméticas. Elas são interessantes pois articulam muitos dos conteúdos apresentados nas seções anteriores. Em cada caso, tente explicar porque a curiosidade funciona.

Curiosidade 1: O número 1089 é conhecido como **número mágico**. Veja porque. Escolha qualquer número de três algarismos diferentes, por exemplo 875. Agora escreva este número de trás para frente e subtraia o menor do maior, assim:

- 875 de trás para frente é 578.
- Subtraindo o menor (578) do maior (875) obtemos $875-578 = 297$.
- Agora some este resultado com o seu inverso, assim: $297 + 792 = 1089$.
- Obtemos assim o nosso número mágico 1089.

Faça a experiência com qualquer número de três algarismos diferentes e verá que o resultado será sempre 1089. (é sempre 1089, mesmo?)

Curiosidade 2:

- Escolha qualquer número de três algarismos. Por exemplo 234.
- Agora escreva este número na frente dele mesmo, assim: 234234.
- Agora divida por 13: $\dfrac{234234}{13} = 18018$.
- Agora divida o resultado por 11: $\dfrac{18018}{11} = 1638$.
- Divida novamente o resultado, agora por 7: $\dfrac{1638}{7} = 234$.
- Viu só? O resultado é o número de três algarismos que você escolheu: 234.

Você pode experimentar com qualquer outro número de três algarismos. O resultado será sempre o mesmo.

Curiosidade 3: Em uma calculadora, digite o número 12345679, que é a sequência de números de 1 a 9, com exceção do 8. Agora peça a alguém para escolher o seu número preferido na sequência. Digamos que a pessoa escolheu o 6. Multiplique mentalmente (sem a pessoa perceber) o número escolhido por 9: $9 \times 6 = 54$. Agora, na calculadora, multiplique este resultado por aquela sequência de números que você digitou no começo. Neste exemplo, o resultado exibido pela calculadora será

$$12345679 \;\times\; 54 \;=\; 666666666.$$

Aí você diz: "Está aí o seu número preferido!".

Curiosidade 4: Observe o que acontece quando multiplicamos 37 por múltiplos de 3.

- $3 \times 37 = 111$
- $6 \times 37 = 222$
- $9 \times 37 = 333$
- $12 \times 37 = 444$
- $15 \times 37 = 555$
- $18 \times 37 = 666$
- $21 \times 37 = 777$
- $24 \times 37 = 888$
- $27 \times 37 = 999$

Curioso, não é mesmo? Porque isto ocorre com o número 37?

Curiosidade 5: Os números **cíclicos** são aqueles que multiplicados por outro número menor ou igual ao número de dígitos de que ele possui, resulta um número que possui os mesmos algarismos do número inicial, mas passando para o final os seus primeiros algarismos. Por exemplo o primeiro número cíclico é o 142857. Se este número (que possui seis dígitos) for multiplicado pelos números de 1 a 6 obtemos:

- $2 \times 142857 = 285714$ (note que o 1 e o 4 foram passados para o final).
- $3 \times 142857 = 428571$ (o 1 passa para o final).
- $4 \times 142857 = 571428$.
- $5 \times 142857 = 714285$.
- $6 \times 142857 = 857142$.

Se multiplicarmos por 7, o que obtemos é 999999. Isto não é uma casualidade. Este número (142857) é a parte periódica da divisão $\frac{1}{7}$.

O próximo número cíclico é o 0588235294117647. Se multiplicarmos este número pelos números de 1 a 16 acontece o mesmo que com o anterior. E se multiplicarmos por 17 resulta em 9999999999999999.

Estes números são raros de encontrar. Outra característica curiosa destes números é a forma que se pode obtê-los. Pegamos um número primo (p) e calculamos seu inverso (1/p). Se a parte decimal é periódica e o período possui tantos dígitos quanto o número primo menos 1, então este é um número cíclico. Quando dividimos 1 por 7 obtemos $0,142857142857142857\ldots$ Note que esta é uma dízima periódica e que o período possui seis dígitos.

Observação: Na revista *Eureka!*, Edição Especial da OBMEP 2006, no artigo “Números mágicos e contas de dividir” do professor Carlos

Gustavo Tamm de Araújo Moreira, são analisados cuidadosamente os números cíclicos definidos neste exemplo. Naquele artigo, este tema é discutido tanto na base 10, quanto em outras bases, tornando este artigo interessante para alunos de níveis mais avançados, como os do grupo G2.

ENCONTRO 2

No primeiro encontro presencial foram resolvidos vários problemas envolvendo as operações básicas com números naturais. Naquele primeiro encontro, tínhamos como objetivo motivar os alunos com problemas interessantes e familiarizá-los com o Hotel de Hilbert, além de mostrar alguns tipos de raciocínios úteis na resolução de problemas. Agora vamos abordar de um modo mais sistemático o conjunto dos números inteiros, explorando o Algoritmo da Divisão Euclidiana, mostrando que o resto de uma divisão pode ser utilizado para descrever alguns fenômenos periódicos. Também iremos estudar alguns critérios de divisibilidade e algumas propriedades operatórias do resto de uma divisão.

Assuntos	**Materiais relacionados**	**Vídeos no canal picobmep no Youtube**
Algoritmo da divisão. e Fenômenos periódicos.	Apostila 1: seção 3.4 Fomin: capítulo 3 Apostila 7: seção 2.1	32, 33, 37, 39
Propriedades operatórias do resto de uma divisão.	Fomin: capítulo 3	35
Múltiplos e divisores.	Apostila 1: seções 3.2 e 3.3	8, 9, 36, 6, 7
Números primos. Crivo de Eratóstenes. Fatoração.	Apostila 1: seções 2.4, 2.5 e 2.6 Apostila 7: seção 1.2	10, 33, 34
Critérios de divisibilidade.	Apostila 1: seções 2.2 e 2.3	6, 8, 40, 41

“verfinal”
2015/3/16
page 28
Estilo OBMEP

2.1 Divisão Euclidiana

Um dos principais objetivos deste encontro é desenvolver nos alunos a habilidade de utilizar corretamente o Algoritmo da Divisão de Euclides e de utilizá-lo na resolução de problemas. Ao ser efetuada uma divisão, por exemplo a divisão indicada abaixo de 478 por 7, obtemos quociente 68 e resto 2.

$$\begin{array}{r|l} 478 & 7 \\ \cline{2-2} -\ \underline{476} & 68 \\ 2 & \end{array}$$

Isto significa que $478 = 68 \times 7 + 2$. Esta igualdade também pode ser pensada do seguinte modo. Suponhamos que você tenha 478 bolinhas e deseje separá-las em grupos de 7. Agrupando de 7 em 7 é possível organizar estas bolinhas em 68 grupos de 7 bolinhas, totalizando $68 \times 7 = 476$ bolinhas, sobrando 2 bolinhas que não podem formar um novo grupo de 7.

A partir deste exemplo, e de outros se for o caso, podemos generalizar para concluir que no Algoritmo de Euclides da divisão de a por b, encontramos um quociente q e um resto r tal que $a = q \cdot b + r$ com $0 \leq r \leq b - 1$.

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

Exercício 1: Em cada caso calcule o quociente q e o resto r da divisão de a por b. Em seguida tire a prova, verificando a igualdade $a = q \cdot b + r$.

- $a = 307$ e $b = 4$.
- $a = 1933$ e $b = 6$.
- $a = 879$ e $b = 7$.

- $a = 1045$ e $b = 11$.
- $a = 2351$ e $b = 12$.

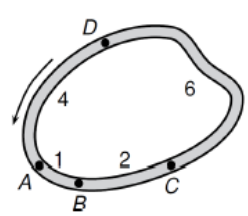
No Portal da Matemática, no 8º ano do Ensino Fundamental, no módulo "Números naturais: contagem, divisibilidade e Teorema da Divisão Euclidiana" o vídeo "Teorema da Divisão Euclidiana" apresenta o algoritmo da divisão de Euclides de uma maneira bastante interessante. Assista este vídeo e confira as suas soluções dos próximos dois exercícios.

Exercício 2: Encontre o número natural que ao ser dividido por 7 resulta um quociente 4 e resto o maior possível.

Exercício 3: Encontre os números naturais que, quando divididos por 8 deixam o resto igual ao dobro do quociente.

Observamos também que o algoritmo da divisão Euclidiana está detalhadamente explicado no vídeo 32 do canal picobmep no YouTube. Em comparação ao vídeo apresentado no Portal da Matemática, este outro é mais detalhado e mais formal. Estude este vídeo e poste suas dúvidas no Fórum Hotel de Hilbert.

Exercício 4: (OBMEP 2006 - N1Q6 - 2ª fase) A figura abaixo representa o traçado de uma pista de corrida.



Os postos A, B, C e D são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha. Por exemplo, uma corrida de 17 quilômetros pode ser realizada com partida em D e chegada em A.

(a) Quais são os postos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?

(b) E para uma corrida de 100 quilômetros, quais são estes postos?

(c) Mostre que é possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.

Solução.

(a) Uma volta completa em torno de uma pista tem extensão $1km + 2km+6km+4km = 13km$. Por isto, para percorrer $14km$ é preciso dar uma volta completa e percorrer mais $1km$. A única forma de percorrer $1km$ respeitando-se o sentido da corrida é começando em A e terminando em B. Portanto a corrida deve começar em A, dar uma volta completa e terminar em B.

(b) Como $100 = 7 \times 13 + 9$, uma corrida de $100km$ corresponde a dar 7 voltas completas na pista e percorrer mais $9km$. A única forma de percorrer $9km$ respeitando-se o sentido da corrida é começando em A e terminando em D. Portanto a corrida deve começar em A, dar 7 voltas completas e terminar em D.

(c) Como sugerido nos itens anteriores, a solução do problema está baseada na ideia de "dar uma certa quantidade de voltas" sem exceder o comprimento da corrida e depois localizar trechos convenientes para percorrer a "distância restante". Do ponto de vista matemático, este procedimento corresponde a efetuar o algoritmo de divisão com divisor igual a 13. Por uma inspeção direta, pode-se verificar que é possível executar qualquer corrida com comprimento igual a 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ou $12km$. Se a corrida tem comprimento um múltiplo qualquer de $13km$, podemos começar num ponto, dar um certo número de voltas, e voltar para o mesmo ponto de partida. E se a corrida tem um comprimento maior que 13, efetuamos a divisão deste número por 13. O quociente corresponde ao número de voltas e o resto é um pedaço de uma volta de comprimento de $1km$ até $12km$, que sempre pode ser percorrido, como comentamos anteriormente.

Por exemplo, se a extensão da corrida é $109 = 8 \times 13 + 5$, ela deve começar no posto D, dá 8 voltas completas, retornando então a D, e depois percorre o trecho de D a B, que tem $5km$.

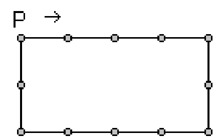
Exercício 5: Na divisão de dois números inteiros, o quociente é 16 e o resto é o maior possível. Se a soma do dividendo e do divisor é 125, determine o resto.

Solução. Vamos representar por a o dividendo e por b o divisor. Como o resto é o maior possível, então ele deve ser igual a $b-1$, que é o maior número permitido para o resto de uma divisão por b. Daí obtemos $a = 16b + (b-1)$, ou seja, $a = 17b - 1$. Como a soma $a + b = 125$ obtemos $(17b-1) + b = 125 \Rightarrow 18b = 126 \Rightarrow b = \dfrac{126}{18} = 7$. Portando o divisor é $b = 7$, o dividendo é $a = 17b - 1 = 118$, o quociente é 16 e o resto é 6.

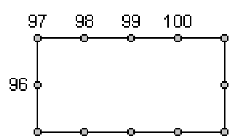
2.2 Fenômenos periódicos

Nos próximos exercícios ilustramos como o resto de uma divisão pode ser utilizado na resolução de problemas que envolvem fenômenos periódicos.

Exercício 6: Pedro caminha ao redor de uma praça retangular onde estão dispostas 12 árvores, brincando de tocar cada árvore durante seu passeio. Se no início ele toca a árvore indicada na figura, e se ele anda no sentido da seta, indique que árvore ele estará tocando ao encostar em uma árvore pela centésima vez.



Solução. Na figura, próximo de cada árvore escreva os números 1, 2, 3, ..., correspondentes aos números de árvores tocadas por Pedro (a árvore indicada pela letra P recebe o número 1, a próxima o número 2, e assim por diante). Como existem 12 árvores na praça, na árvore indicada pela letra P estarão escritos os número 1, 13, 25, ... que são todos os números que deixam resto 1 quando divididos por 12. Dividindo 100 por 12, obtemos quociente 8 e resto 4, isto é, $100 = 8 \times 12 + 4$. Daí vemos que na centésima vez, Pedro estará tocando a árvore que está 3 posições à frente daquela indicada pela letra P.



Exercício 7: Considere a seguinte sequência de números:

1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5 ...

formada alternadamente pelos algarismos (1, 2, 3, 4, 5) e pelos algarismos (5, 4, 3, 2, 1). Qual algarismo aparece na posição 2015 nesta sequência?

Solução. Na sequência dada é importante observar que o bloco de algarismos

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2$$

fica se repetindo indefinidamente, como está ilustrado na figura a seguir:

$$\boxed{1,2,3,4,5,4,3,2}\ \boxed{1,2,3,4,5,4,3,2}\ \boxed{1,2,3,4,5,4,3,2}\ \cdots$$

Dividindo 2015 por 8 (que é a quantidade de algarismos do bloco que fica se repetindo), obtemos $2015 = 251 \times 8 + 7$. Daí, para se chegar até o algarismo da posição 2015, deve-se escrever 251 blocos de oito algarismos cada, e depois mais sete algarismos. Portanto o número que está na posição 2015 é o número da sétima posição dentro do bloco, ou seja, o número 3.

Exercício 8: Qual é o algarismo da unidade de 2^{2015} ?

Solução. Calculando as primeiras potências de 2 obtemos:

$$2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32,\ 2^6 = 64,$$

$$2^7 = 128,\ 2^8 = 256,\ 2^9 = 512$$

Observando esses números, vemos que os últimos algarismos formam uma sequência periódica: 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2 etc., em que os quatro números 2, 4, 8, 6 ficam se repetindo infinitamente. Dividindo 2015 por 4 obtemos quociente 503 e resto 3, de modo que $2015 = 503 \times 4 + 3$. Na sequência acima, os expoentes que deixam resto 3 quando divididos por 4 definem potências de 2 com último algarismo 8 ($2^3 = 8$, $2^7 = 128$ etc.). Daí o algarismo da unidade de 2^{2015} é 8.

Exercício 9: João decidiu nadar de três em três dias. O primeiro dia que ele nadou foi um sábado, o segundo dia foi uma terça-feira, o terceiro dia foi uma sexta-feira, e assim por diante. Em qual dia da semana João estará nadando pela centésima vez?

Solução. Na tabela a seguir, listamos os dias da semana que João está nadando pelas primeiras 21 vezes.

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
6	4	2	7	5	3	1
13	11	9	14	12	10	8
20	18	16	21	19	17	15

Analisando a tabela vemos, por exemplo, que os múltiplos de 7 sempre estão na quarta-feira, que os números que deixam resto 1 quando divididos por 7 estão no sábado e que os números que deixam resto 2 quando divididos por 7 estão na terça-feira. Dividindo 100 por 7 obtemos quociente 14 e resto 2 ($100 = 14 \times 7 + 2$). Daí concluímos que na centésima vez, João estará nadando em uma terça-feira.

Exercício 10: O ano de 2014 começou em uma quarta-feira. Em que dia da semana cairá o último dia deste ano?

Solução. É claro que se você olhar para uma agenda você vai encontrar rapidamente a resposta do problema. Não é isso o que se pretende, é claro. Tente resolver sozinho. Assistindo o vídeo 37 do canal picobmep no YouTube você poderá ver uma solução matemática para este problema além de poder aprender algumas propriedades muito, mas muito interessantes do nosso calendário. VALE A PENA ASSISTIR!!!

Exercício 11: (Fomin, capítulo 3, problema 28) Encontre o último algarismo do número 1989^{1989}.

Solução. Para começar, note que o último algarismo do número 1989^{1989} é igual ao último algarismo do número 9^{1989}. Escrevendo as primeiras potências de 9 obtemos: $9^1 = 9$, $9^2 = 81$, $9^3 = 729$ etc. Daí observamos que os últimos algarismos destes números formam a sequência 9, 1, 9, 1 etc. Assim o último algarismo de 9^n é 9 se n é ímpar e o último algarismo de 9^n é 1 se n é par.

Observamos que para resolver este tipo de problema, não é necessário calcular as potências de 9. Basta calcular o último algarismo das potências de 9. Para fazer isso, começamos por $9^1 = 9$. Multiplicando por 9, obtemos $9 \times 9 = 81$. Para calcular o último algarismo de 9^3, multiplicamos o último algarismo de 9^2 por 9, obtendo $1 \times 9 = 9$. Então o último algarismo de 9^3 é 9. E assim, por diante, vamos olhando sempre para o último algarismo dos produtos, e efetuado o produto, consideramos somente o seu último algarismo para fazer a próxima multiplicação.

Exercício 12: (Fomin, capítulo 3, problema 30) Encontre o último algarismo do número 777^{777}.

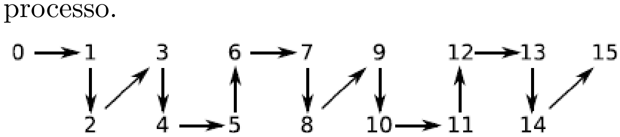
Solução. Para começar, note que o último algarismo do número 777^{777} é igual ao último algarismo do número 7^{777}. Procedendo como explicado no exercício anterior, podemos calcular o último algarismo das primeiras potências de 7.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
último algarismo de 7^n	7	9	3	1	7	9	3	1	7

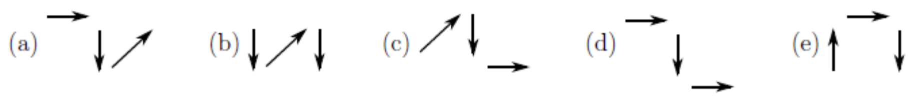
Daí vemos que o ciclo 7, 9, 3, 1 se repete infinitamente. Dividindo 777 por 4 (que é o tamanho do ciclo), obtemos quociente 194 e resto 1. Daí o último algarismo de 7^{777} é igual ao último algarismo de 7^1, que é 7.

Exercício 13: Qual é o resto da divisão de 2^{56} por 7? E por 11? (Veja a solução no vídeo 39.)

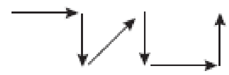
Exercício 14: (Banco de Questões 2010, nível 1, problema 86) Os números de 0 a 2000 foram ligados por flechas. A figura dada mostra o começo do processo.



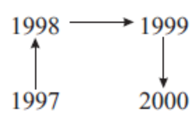
Qual é a sucessão de flechas que liga o número 1997 ao número 2000?



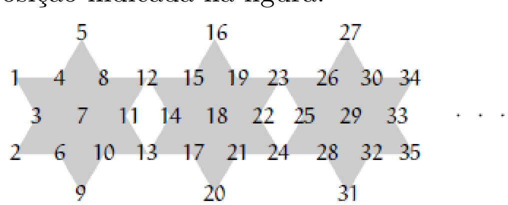
Solução. A alternativa correta é a (e). Observe que o seguinte caminho, formado por seis flechas, é um padrão que se repete na figura dada.



Este caminho-padrão sempre começa nos múltiplos de 6, ou seja, em 0, 6, 12 etc. Vamos averiguar qual é a posição de 1997 em relação ao múltiplo de 6 mais próximo. Dividindo 1997 por 6, obtemos $1997 = 6 \times 332 + 5$, correspondendo a 332 caminhos-padrão mais o resto de 5 flechas. Portanto, 1998 é múltiplo de 6 mais próximo de 1997, ocupando a primeira posição no caminho-padrão. Assim, a figura seguinte ilustra as flechas que ligam 1997 a 2000.

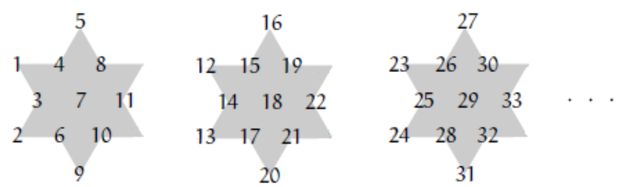


Exercício 15: (Banco de Questões 2011, nível 1, problema 10) Estrelix, um habitante de Geometrix, decidiu colocar os inteiros positivos seguindo a disposição indicada na figura.

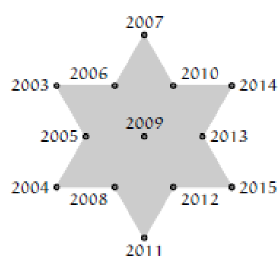


Em quais estrelas aparece o número 2011? Posicione todos os números que aparecem nas referidas estrelas?

Solução. Separe as estrelas deixando os números compartilhados sempre na estrela à direita. Fazendo isto, como indicado na figura a seguir, vemos que em cada estrela ficam escritos 11 números.



Dividindo 2011 por 11, obtemos quociente 182 e resto 9. Assim, o número 2011 é o nono número da 183^a estrela, que está representada na figura ao lado.



2.3 Aritmética dos restos

Na seção anterior estudamos o Algoritmo da Divisão Euclidiana. Na divisão de dois números naturais a por b existe um quociente q e um resto r tal que $a = bq + r$ sendo que obrigatoriamente $0 \leq r \leq b - 1$. Por exemplo, na igualdade $1649 = 7 \times 235 + 4$ identificamos imediatamente o número 4 como o resto da divisão de 1649 por 7. Por outro lado, na igualdade $415 = 7 \times 58 + 9$, o número 9 não é o resto da divisão de 58 por 7, pois na divisão por 7 o resto deve ser um número natural menor que 7. Observe que a igualdade $415 = 7 \times 58 + 9$ significa que se temos 415 unidades, estas podem ser organizadas em 58 grupos de 7 unidades cada e em um grupo de 9 unidades. Este último grupo pode ainda ser dividido em um grupo de 7 unidades e em um grupo de 2 unidades, de modo que as 415 unidades ficam organizadas em 59 grupos de 7 unidades cada e em um grupo de 2 unidades, que não pode ser dividido em grupos de 7. Isto significa que $415 = 7 \times 59 + 2$.

Nesta igualdade, identificamos o número 2 como o resto da divisão de 415 por 7.

Nesta seção veremos como calcular o resto da divisão de uma soma, uma diferença ou um produto de dois números, sem ter que efetuar as operações com os números dados. Para começar, vamos ver alguns exercícios já resolvidos.

Exemplo 16: Nas divisões de 163 e 360 por 7 obtemos, respectivamente, restos 2 e 3.

$$163 = 7 \times 23 + 2 \quad \text{e} \quad 360 = 7 \times 51 + 3.$$

Qual é o resto da divisão de $163 + 360$ por 7?

Solução. É evidente que você pode calcular o valor da soma $163 + 360$ e em seguida dividir este resultado por 7 para obter a resposta desejada. Mas não é isto o que se pretende fazer. Queremos achar a resposta sem calcular a soma $163 + 360$. Para fazer isto, neste primeiro exercício, vamos pensar de um modo bastante concreto. Imagine que você tenha 163 bolinhas. O fato do resto da divisão de 163 por 7 ser igual a 2 implica que estas bolinhas podem ser organizadas em grupos de 7 bolinhas mais um grupo menor de 2 bolinhas. Como o resto da divisão de 360 por 7 é igual a 3, então 360 bolinhas podem ser organizadas em grupos de 7 bolinhas mais um grupo menor de 3 bolinhas. Agora juntando todas as bolinhas, obtemos $163 + 360$ bolinhas que estão organizadas em vários grupos de 7, um grupo de 2 e um grupo de 3 bolinhas, sendo que estes dois últimos grupos podem ser unidos em um único grupo de 5 bolinhas. Portanto todas as $163+360$ bolinhas estão organizadas em vários grupos de 7 e em um grupo de 5 bolinhas. Como 5 é um número menor que 7, o que foi feito significa que o resto da divisão de $163 + 360$ por 7 é igual a $5 = 2 + 3$.

De outro modo, podemos chegar nesta mesma conclusão utilizando a propriedade distributiva:

$$a(b + c) \ = \ ab \ + \ ac$$

Acompanhe o seguinte desenvolvimento:

$$163+360 = (7\cdot 23+2) \ + \ (7\cdot 51+3) = 7\cdot(23+51)+(2+3) = 7\cdot 74+5.$$

Nesta igualdade identificamos imediatamente o número 5 como o resto da divisão de $163 + 360$ por 7. Portanto, neste exemplo, vimos que para calcular o resto da divisão da soma $163 + 360$ por 7 bastou somar os restos das divisões dos números 163 e 360 por 7.

Exemplo 17: Nas divisões de 106 e 197 por 6 obtemos, respectivamente, restos 4 e 5:

$$106 = 6 \times 17 + 4 \quad \text{e} \quad 197 = 6 \times 32 + 5.$$

Qual é o resto da divisão de $106 + 197$ por 6?

Solução. Para calcular o resto da divisão do número $106 + 197$ por 6 podemos imaginar que temos esta quantidade de bolinhas e queremos dividi-las em grupos de 6. Aquela quantidade $r < 6$ que não puder ser agrupada para formar um novo grupo de 6 é o resto da divisão.

Do enunciado sabemos que 106 bolinhas podem ser agrupadas em 17 grupos de 6 mais um grupo menor com 4 bolinhas. E que 197 bolinhas podem ser agrupadas em 32 grupos de 6 mais um grupo menor com 5 bolinhas. Juntando todas as bolinhas, vemos que as $106 + 197$ bolinhas podem ser agrupadas em $17 + 32 = 49$ grupos de 6 bolinhas, um grupo com 4 e um grupo com 5, sendo que estes dois últimos grupos podem ser unidos em um grupo com 9 bolinhas. Agora este grupo de 9 bolinhas pode ser dividido em um grupo com 6 bolinhas e um outro grupo com 3 bolinhas. Deste modo, vemos que as $106 + 197$ bolinhas podem ser organizadas em $49 + 1 = 50$ grupos de 6 bolinhas mais um grupo menor com 3 bolinhas. Como $3 < 6$ identificamos este número 3 como o resto da divisão de $106 + 197$ por 6.

Utilizando a propriedade distributiva poderíamos reescrever esta solução do seguinte modo:

$$\begin{aligned} 106 + 197 &= (6 \cdot 17 + 4) \ + \ (6 \cdot 32 + 5) = 6 \cdot (17 + 32) + (4 + 5) \\ &= 6 \cdot 49 + 9 = 6 \cdot 49 + (6 + 3) = 6 \cdot 50 + 3. \end{aligned}$$

Nesta igualdade $106 + 197 = 6 \cdot 50 + 3$ identificamos 3 como o resto da divisão de $106 + 197$ por 6. Portanto, como no exemplo anterior, para calcular o resto da divisão da soma $106 + 197$ por 6, somamos os restos das divisões dos números 106 e 197 por 6. Neste caso obtemos $4 + 5 = 9$. Como este número é maior que 6, ele ainda pode ser dividido por 6, resultando um resto igual a 3.

Procedendo como nestes exemplos podemos concluir o seguinte resultado.

Para calcular o resto da divisão de uma soma por um divisor, basta somar os restos das divisões de cada uma das parcelas pelo mesmo divisor. Se a soma dos restos passa do divisor, calcule o resto da divisão pelo divisor dessa soma de restos.

Exemplo 18:

- Se os restos das divisões de a e b por 7 são respectivamente 2 e 3, então $a+b$ deixa resto $2+3=5$ quando dividido por 7.

- Se os restos das divisões de a e b por 9 são respectivamente 8 e 5, para calcular o resto da divisão de $a+b$ por 9 some $8+5=13$. Como este número passou do divisor, devemos dividir 13 por 9. Neste caso obtemos resto 4.

- Se os restos das divisões de a, b e c por 8 são respectivamente 4, 7 e 6, para calcular o resto da divisão de $a+b+c$ por 8 some os restos $4+7+6=17$. Como passou do divisor, divida 17 por 8, obtendo resto 1.

Como uma multiplicação de números naturais é uma soma de parcelas iguais, o resultado obtido para o cálculo do resto da divisão de uma soma implica um resultado análogo para o cálculo do resto da divisão do resultado de uma multiplicação.

Para calcular o resto da divisão do resultado de uma multiplicação por um divisor, basta multiplicar os restos das divisões de cada uma das parcelas pelo mesmo divisor. Se o produto dos restos passa do divisor, calcule o resto da divisão pelo divisor desse produto de restos.

Exemplo 19:

- Os números 723 e 451 deixam resto 2 e 3 ao serem divididos por 7. O número 723×451 deixa resto $2 \times 3 = 6$ ao ser dividido por 7.
- Os números 275 e 562 deixam resto 5 e 4 ao serem divididos por 6. Para calcular o resto da divisão do produto 275×562 por 6 multiplique os restos $5 \times 4 = 20$. Como este número é maior que o divisor, divida 20 por 6 obtendo resto 2. Portanto o resto da divisão de 275×562 por 6 é igual a 2.
- Os números 73, 112 e 245 deixam restos 1, 4 e 2 ao serem divididos por 9. O produto $73 \times 112 \times 245$ deixa resto $1 \times 4 \times 2 = 8$ ao ser dividido por 9.

No exemplo anterior é mais fácil fazer a conta como ela foi explicada ou é mais fácil multiplicar os números $73 \times 112 \times 245$ e depois dividir o resultado deste produto por 9 para obter o resto desejado? Em qual dos dois casos você manipula com números menores?

O vídeo 35 do canal picobmep no YouTube apresenta vários exemplos que explicam as propriedades operatórias do resto de uma divisão. Observamos que para formalizar as propriedades apresentadas nesta seção é necessário utilizar as propriedades associativa e distributiva. Estas propriedades estão explicadas no vídeo 5.

Exercício 20:

1. A soma de dois múltiplos de 7 é um múltiplo de 7?
2. Qual é o resto da divisão de $7 \times 82 + 3$ por 7?
3. E qual é o resto da divisão de $7 \times 29 + 10$ por 7?
4. E qual é o resto da divisão de $7 \times 41 + 93$ por 7?
5. E qual é o resto da divisão de $7 \times 18 - 2$ por 7?
6. Determine os restos das divisões de $7 \times 81 + 8$ por 7 e por 9.
7. Se $a = 7 \times 53 + 1$ e $b = 7 \times 15 + 3$, qual é o resto da divisão de $a + b$ por 7?
8. Se $m = 7 \times 22 + 5$ e $n = 7 \times 38 + 6$, qual é o resto da divisão de $m + n$ por 7?

Solução.

1. Sim, pois $7n + 7m = 7(n + m)$.
2. Sempre que escrevemos um número na forma $7q + r$, sendo r um número de 0 até 6, este r é o resto da divisão do número dado por 7. Isto é a definição do resto de uma divisão.
3. Neste item não queremos fazer a conta $7 \times 29 + 10$ para determinar o resto da divisão deste número por 7. Como $10 = 7 + 3$, o número dado é a soma de dois múltiplos de 7 com 3. Portanto o resto da divisão deste número por 7 é 3.
4. Dividindo 93 por 7 obtemos quociente 13 e resto 2. Daí o número $7 \times 41 + 93$ é igual a soma de dois múltiplos de 7 com 2. E, portanto, o resto da divisão deste número por 7 é igual a 2.

5. Este item pode ser mais difícil. Acompanhe o seguinte desenvolvimento:

$$7 \times 18 - 2 = 7 \times (17 + 1) - 2 = 7 \times 17 + 7 - 2 = 7 \times 17 + 5.$$

Portanto o resto é igual a 5.

6. O número 7×81 é múltiplo de 7 e de 9. Então precisamos somente analisar os restos das divisões de 8 por 7 e por 9. Estes restos são respectivamente 1 e 8.

7. O resto é $1 + 3 = 4$.

8. O resto é 4, pois $5 + 6 = 11$, que deixa resto 4 quando dividido por 7.

Exercício 21: Sabe-se que 503 e 418 deixam restos 7 e 2 quando divididos por 8, respectivamente. Quais são os restos das divisões de $503+418$ e 503×418 por 8? Qual é o resto da divisão de $503 - 418$ por 8?

Exercício 22: Sabe-se que 2811 e 1744 deixam restos 3 e 7 quando divididos por 9, respectivamente. Quais são os restos das divisões de $2811 + 1744$, de $2811 - 1744$ e de 2811×1744 por 9?

Exercício 23: Calcule o resto da divisão de 2011 por 7. Em seguida calcule o resto da divisão de $2011 + 2012 + 2013 + 2014 + 2015$ por 7. Qual é o resto da divisão de $2011 \cdot 2012 \cdot 2013 \cdot 2014 \cdot 2015$ por 7?

Exercício 24:

1. Se o resto da divisão de a por 7 é igual a 3, então qual é o resto da divisão de 5a por 7?

2. Se a deixa resto 6 quando dividido por 8 e se b deixa resto 5 quando dividido por 8, qual é o resto da divisão de $a + b$ e de $a - b$ por 8?

Solução.

1. Podemos escrever $a = 7q + 3$. Daí $5a = 5(7q + 3) = 7 \times (5q) + 15$. Dividindo 15 por 7 obtemos resto 1. Daí $5a$ é a soma de um múltiplo de 7 com 1 e, portanto, o resto da divisão de $5a$ por 7 é igual a 1.

2. Podemos escrever $a = 8n + 6$ e $b = 8m + 5$. Daí $a + b = (8n + 6) + (8m + 5) = (8n + 8m) + 11$ e $a - b = (8n + 6) - (8m + 5) = (8n - 8m) + 1$. Como 11 deixa resto 3 quando dividido por 8, vemos que $a+b$ deixa resto 3 quando dividido por 8. De $a-b = (8n-8m)+1$, segue que $a - b$ deixa resto 1 quando dividido por 8.

Exercício 25: Quais são os restos das divisões de 1991^3 e $1989 \cdot 1990 \cdot 1991 + 1992^2$ por 7? Após tentar resolver este exercício, compare a sua solução com a que está apresentada no vídeo 35 do canal picobmep no YouTube.

2.4 Múltiplos e divisores

Multiplicando o número 3 por qualquer número natural obtém-se os múltiplos positivos de 3. Assim, os múltiplos positivos de 3 são: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ... Todos estes números formam o conjunto dos múltiplos positivos de 3, que pode ser representado do seguinte modo:

$$M(3) \ = \ \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \ldots\}.$$

Generalizando, considerando somente números positivos, dado um número natural a, o conjunto dos múltiplos de a é o conjunto

$$M(a) \ = \ \{a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a, 7a, 8a, \ldots\}.$$

Deste modo, dado dois números naturais a e b, dizemos que b é um múltiplo de a se existir um número natural n tal que $b = an$. De modo equivalente, b é múltiplo de a quando o resto da divisão de b por a for igual a zero.

Assim, se m e n são dois números naturais, o produto $p = mn$ é um múltiplo tanto de m quanto de n. Neste caso, também dizemos que m e n são fatores de p. Por exemplo, na multiplicação $24 = 3 \times 8$ podemos dizer que:

- 24 é um múltiplo de 3.
- 24 é um múltiplo de 8.
- 3 é um fator de 24.
- 8 é um fator de 24.

Neste contexto, a palavra fator é um sinônimo da palavra divisor. Ou seja, na multiplicação $24 = 3 \times 8$ também podemos dizer que:

- 24 é divisível por 3.
- 24 é divisível 8.
- 3 é um divisor de 24.
- 8 é um divisor de 24.

Evidentemente, dado um número natural a, se d é um divisor positivo de a então $1 \leq d \leq a$. Assim, todo número natural possui uma quantidade finita de divisores positivos, enquanto possui uma quantidade infinita de múltiplos. Vejam alguns exemplos de conjuntos de divisores. Observamos que nesta apostila somente vamos considerar múltiplos e divisores positivos.

$$\begin{aligned} D(7) &= \{1,7\} \\ D(12) &= \{1,2,3,4,6,12\} \\ D(14) &= \{1,2,7,14\} \\ D(72) &= \{1,2,3,4,6,8,9,12,18,24,36,72\} \end{aligned}$$

Olhando para o resto de uma divisão, observe que, por exemplo, na divisão de 14 por um número d, o resto desta divisão é zero somente quando d é um divisor de 14, isto é, somente quando $d \in D(14) = \{1,2,7,14\}$. Qualquer número $d \notin D(14)$ faz com que a divisão de 14 por d tenha um resto diferente de zero.

No Portal da Matemática, no 6º ano do Ensino Fundamental, no módulo "Divisibilidade" você pode assistir a videoaula "múltiplos e divisores" sobre as definições apresentadas nesta seção.

Exercício 26: (Banco de Questões 2006, nível 1, lista 4, problema 1) Da igualdade $9174532 \times 13 = 119268916$ pode-se concluir que um dos números abaixo é divisível por 13. Qual é este número?
(a) 119268903 (b) 119268907 (c) 119268911
(d) 119268913 (e) 119268923.

Solução. Como 119268916 é divisível por 13, podemos concluir que os números divisíveis por 13 são aqueles obtidos somando-se ou subtraindo-se múltiplos de 13 ao número 119268916. Dentre os números apresentados, o número $119268916 - 13 = 119268903$ é o único divisível por 13.

Quando perguntamos se um dado número b é divisível por um número a, podemos pensar que estamos perguntando se o resto da divisão de b por a é igual a zero. Utilizando as propriedades aritméticas do resto de uma divisão discutidas na seção anterior, podemos concluir algumas propriedades interessantes a respeito da divisibilidade. Por exemplo, o número $b = 7 \cdot 13 + 9$ é divisível por 7? Aqui este número b é a soma de um múltiplo de 7, $7 \cdot 13$, que deixa resto zero quando dividido por 7 com o número 9, que não é múltiplo de 7, pois deixa resto 2 quando dividido por 7. Daí o resto da divisão de $b = 7 \cdot 13 + 9$ por 7 é igual a 2 e, portanto, o número b não é divisível por 7.

> Considerando somente números inteiros positivos, um número da forma $a \cdot q + r$ é um múltiplo de a somente quando r é um múltiplo de a.

Exercício 27: Considerando somente números inteiros positivos,

1. O número $7 \cdot 38 + 5$ é divisível por 7?
2. O número $7 \cdot 241 + 84$ é um múltiplo de 7?
3. O número $7 \cdot 81 + 54$ é divisível por 7 e por 9?
4. Existe um número a que torna o número $7a + 6$ um múltiplo de 7?
5. O número $7a + 100$ pode ser divisível por 7?
6. Para quais condições sobre b, o número $7a + b$ é um múltiplo de 7?
7. Sabendo que o número $7a + b$ é divisível por 7, o que podemos afirmar sobre o número b?

Exercício 28: (OBMEP 2011 - N2Q3 - 2ª fase) O *múltiplo irado* de um número natural é o menor múltiplo do número formado apenas pelos algarismos 0 e 1. Por exemplo, o múltiplo irado de 2, bem como de 5, é 10; já o múltiplo irado de 3 é 111 e o de 110 é ele mesmo.

(a) Qual é o múltiplo irado de 20?

(b) Qual é o múltiplo irado de 9?

(c) Qual é o múltiplo irado de 45?

(d) Qual é o menor número natural cujo múltiplo irado é 1110?

Exercício 29: Extrapolando o exercício anterior, tente resolver o seguinte **desafio**. Mostre que todo número natural possui um múltiplo que se escreve apenas com os algarismos zero e um.

Solução. Para resolver este desafio você vai precisar utilizar várias propriedades apresentadas neste encontro. Tente resolver e compare a sua solução com a que está apresentada no vídeo 36. Vale a pena assistir este vídeo, pois além de ele apresentar uma solução para o desafio, ele também explica muito bem as propriedades estudadas neste encontro.

Para terminar esta seção vamos deixar dois exercícios que estão resolvidos no Portal da Matemática, no 8º ano do Ensino Fundamental, no módulo "Números Naturais: Contagem, Divisibilidade e Teorema da Divisão Euclidiana" na videoaula "Divisibilidade: Resolução de Exercícios – Parte 3". Antes de assistir as soluções no vídeo, é claro que você deve tentar resolver estes exercícios sozinho.

Exercício 30: Sabendo-se que o número

$$12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \ + \ 14$$

é divisível por 13, qual é o resto da divisão do número

$$13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

por 169?

Exercício 31: Se a e b são números naturais e $2a + b$ é divisível por 13, então qual dos seguintes números é um múltiplo de 13?

(A) $91a + b$

(B) $92a + b$

(C) $93a + b$

(D) $94a + b$

(E) $95a + b$

2.5 Fatoração

Um número natural maior que 1 é **primo** quando ele é divisível apenas por 1 e por ele mesmo. Por exemplo, 7 é primo, pois os únicos divisores de 7 são 1 e 7. Já o número 12 não é primo, pois ele possui mais divisores, como por exemplo o 2. Quando um número não é primo, ele é chamado de **composto**. Os primeiros números primos estão listados a seguir:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ \ldots$$

Pela própria definição de número composto, vemos que um número composto é um produto de dois números diferentes de 1. Por exemplo, vimos que 12 é composto, pois 2 é um divisor de 12 e isto significa que $12 = 2 \cdot 6$. Repetindo o mesmo raciocínio para cada uma das parcelas deste produto, observamos que 2 é primo e que ele não pode ser escrito como um produto de fatores diferentes de 1. Já o número 6 é composto e pode ser escrito como $6 = 2 \cdot 3$. Substituindo esta igualdade em $12 = 2 \cdot 6$, podemos escrever $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$. Agora, neste produto cada uma das parcelas é um número primo que não pode ser escrito como um produto de números menores. Quando chegamos neste ponto dizemos que $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ está fatorado como um produto de números primos, ou que $2 \cdot 2 \cdot 3$ é uma fatoração do número 12 em números primos.

Afirmamos que este procedimento pode ser generalizado para qualquer número natural e chamamos esta propriedade de **Teorema Fundamental da Aritmética**: todo número natural maior que 1 pode ser escrito como um produto de números primos.

Exercício 32: Escreva o número 1820 como um produto de números primos.

Solução. Podemos fazer isto escrevendo o número 1820 ao lado de uma barra vertical. Do lado direito desta barra vamos escrevendo os divisores primos de 1820 e do lado esquerdo vamos escrevendo os resultados das divisões sucessivas por estes fatores primos, como está indicado a seguir:

$$\begin{array}{r|l} 1820 & 2 \\ 910 & 2 \\ 455 & 5 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Multiplicando os números do lado direito da barra vertical obtemos a fatoração de 1820 como um produto de números primos: $1820 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$.

Exercício 33: Dê a fatoração em números primos de 378, 638 e 1800.

O vídeo 10 do canal picobmep do YouTube apresenta, de modo bem claro, o conceito de número primo, o Crivo de Eratóstenes e o Teorema Fundamental da Aritmética. Assista este vídeo para entender melhor os conceitos introduzidos nesta aula.

Agora vamos ver uma outra propriedade muito importante dos números naturais que é obtida por meio da sua fatoração em números primos. Quando vamos fatorar um número como um produto de primos, como nos exercícios anteriores, o que fazemos, de fato, é ir testando quais números primos dividem o número dado. Por exemplo, quando determinamos a fatoração $1820 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ verificamos que apenas os números primos 2, 5, 7 e 13 dividem 1820 e que, portanto, nenhum outro número primo divide 1820. Portanto, quando vemos um número fatorado como produto de números primos, somente os primos que aparecem nesta fatoração são divisores do número dado. Formalizando:

Um número primo p divide um certo número natural a somente quando p é um dos fatores primos que aparece na fatoração de a.

Por exemplo, da fatoração $a = 2 \cdot 7^3 \cdot 13^5$, vemos que apenas 2, 7 e 13 são os divisores primos de a. Além disso, por exemplo, os números primos 3, 5 e 11 não são divisores de a, pois eles não aparecem na fatoração de a.

Neste contexto, utilizando fatoração, é interessante explorar os exercícios de 1 a 11 do parágrafo 1 do capítulo 3 do livro do Fomin:

Exercício 34: (Fomin, páginas 22-23)

1. O número $2^9 \cdot 3$ é divisível por 2?
2. O número $2^9 \cdot 3$ é divisível por 5?
3. O número $2^9 \cdot 3$ é divisível por 8?
4. O número $2^9 \cdot 3$ é divisível por 9?

5. O número $2^9 \cdot 3$ é divisível por 6?
6. É verdade que, se um número natural for divisível por 4 e por 3, então ele tem que ser divisível por $4 \cdot 3 = 12$?
7. É verdade que, se um número natural for divisível por 4 e por 6, então ele tem que ser divisível por $4 \cdot 6 = 24$?
8. O número a não é divisível por 3. É possível que o número $2a$ seja divisível por 3?
9. O número a é par. É verdade que $3a$ tem que ser divisível por 6?
10. O número $5a$ é divisível por 3. É verdade que a tem que ser divisível por 3?
11. O número $15a$ é divisível por 6. É verdade que a tem que ser divisível por 6?

Para finalizar esta seção, observamos que sempre que um número natural está fatorado como um produto de números primos, existe uma maneira bastante rápida para calcular a sua quantidade de divisores e também existe uma maneira organizada para listar o seu conjunto de divisores. Vejamos um exemplo.

Exemplo 35: Liste todos os divisores positivos de $a = 2^3 \cdot 5^2$.

Solução. Se d é um divisor de a, então os únicos fatores primos de d são 2 e 5. Deste modo $d = 2^x \cdot 5^y$. Mais ainda, como a é um múltiplo de d, podemos escrever $a = dn$, e isto implica que as potências x e y dos números 2 e 5 na fatoração de d devem ser menores do que ou iguais as potências dos números 2 e 5 na fatoração de a. Logo $x \leq 3$ e $y \leq 2$. Portanto, $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $y \in \{0, 1, 2\}$. Fazendo todas as possibilidades, listamos todos os divisores de a, que são:

$$
\begin{aligned}
x = 0 \text{ e } y = 0 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^0\, 5^0 = 1.\\
x = 0 \text{ e } y = 1 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^0\, 5^1 = 5.\\
x = 0 \text{ e } y = 2 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^0\, 5^2 = 25.\\
x = 1 \text{ e } y = 0 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^1\, 5^0 = 2.\\
x = 1 \text{ e } y = 1 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^1\, 5^1 = 10.\\
x = 1 \text{ e } y = 2 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^1\, 5^2 = 50.\\
x = 2 \text{ e } y = 0 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^2\, 5^0 = 4.\\
x = 2 \text{ e } y = 1 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^2\, 5^1 = 20.\\
x = 2 \text{ e } y = 2 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^2\, 5^2 = 100.\\
x = 3 \text{ e } y = 0 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^3\, 5^0 = 8.\\
x = 3 \text{ e } y = 1 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^3\, 5^1 = 40.\\
x = 3 \text{ e } y = 2 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^3\, 5^2 = 200.
\end{aligned}
$$

Observe que como existem 4 possibilidades para x e existem 3 possibilidades para y, o número a possui $4 \cdot 3 = 12$ divisores.

Observamos que o vídeo 10 do canal picobmep no YouTube apresenta explicações bastante detalhadas sobre o exercício anterior, isto é, sobre como podemos listar de modo organizado o conjunto de divisores de um número natural dado e como podemos determinar rapidamente a sua quantidade de divisores. Com certeza este vídeo irá ajudar na solução do próximo exercício.

Exercício 36: Em cada caso determine a quantidade de divisores e liste todos os divisores dos números dados.

(a) $3 \cdot 7^2$

(b) $2^3 \cdot 3^2$

(c) $2 \cdot 6^2$

(d) $2 \cdot 3 \cdot 5^2$

(e) $71^2 \cdot 113$

No Portal da Matemática, no 6º ano do Ensino Fundamental, no módulo de "Divisibilidade" existem 3 videoaulas sobre "conjunto e quantidade de divisores". Estas aulas são um excelente recurso para ajudar no entendimento do que foi estudado nesta seção.

2.6 Critérios de divisibilidade

O objetivo desta seção é apresentar os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 9 e 10. Antes disso gostaríamos de observar que em muitos casos o uso de um critério de divisibilidade só faz sentido para números "grandes". Para números "pequenos", o problema de decidir se um dado número é divisível ou não por outro pode ser resolvido através do uso da tabuada ou de uma simples divisão. Além disso, como "ser divisível por" e "ser múltiplo de" significam exatamente a mesma coisa, é importante ter em mente que um critério de divisibilidade também é um critério de multiplicidade.

No Portal da Matemática, no 6º ano do Ensino Fundamental, no módulo "Divisibilidade", existem 4 videoaulas que explicam os principais critérios de divisibilidade apresentados nesta apostila. Além disso, existem mais 5 videoaulas com resoluções de exercícios envolvendo critérios de divisibilidade. Recomendamos que estes vídeos sejam estudados e que as dúvidas sejam apresentadas no Fórum Hotel de Hilbert.

No que segue os critérios de divisibilidade serão apresentados por meio de exemplos numéricos resolvidos que apresentam as ideias de como as explicações poderiam ser generalizadas para quaisquer números.

Exemplo 37: [critério de divisibilidade por 3] Um número é divisível por 3 se a soma dos seus algarismos é divisível por 3 (veja o vídeo 8). Para entender este critério de divisibilidade, primeiramente precisamos observar que todas as potências de 10 deixam resto 1 quando divididas por 3:

$$10 = 3 \cdot 3 + 1.$$

$$100 = 3 \cdot 33 + 1.$$

$$1000 = 3 \cdot 333 + 1.$$

Desta observação, vamos verificar, sem efetuar a divisão, se o número 457 é ou não é divisível por 3. O número 457 pode ser escrito como $457 = 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7$ ou ainda, $457 = 4(3 \cdot 33 + 1) + 5(3 \cdot 3 + 1) + 7$. Colocando o fator 3 em evidência, vemos que $457 = 3(4 \cdot 33 + 5 \cdot 3) + (4 + 5 + 7)$. Como o número $3(4 \cdot 33 + 5 \cdot 3)$ é divisível por 3, precisamos somente verificar se $4 + 5 + 7 = 16$ é divisível por 3. Como este número não é divisível por 3, concluímos que 457 também não é divisível por 3. Mais ainda, como 16 deixa resto 1 quando dividido por 3, podemos até concluir que 457 também deixa resto 1 quando dividido por 3.

Exemplo 38: [critério de divisibilidade por 9] Um número é divisível por 9 se a soma dos seus algarismos é divisível por 9. Como no caso da divisibilidade por 3, primeiramente observe que todas as potências de 10 deixam resto 1 quando divididas por 9:

$$10 = 9 \cdot 1 + 1.$$

$$100 = 9 \cdot 11 + 1.$$

$$1000 = 9 \cdot 111 + 1.$$

Vejamos, sem efetuar a divisão, se o número 2345 é ou não é divisível por 9. Podemos escrever $2345 = 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5$, ou ainda, $2345 = 2(9 \cdot 111 + 1) + 3(9 \cdot 11 + 1) + 4(9 + 1) + 5$. Colocando o fator 9 em evidência, $2345 = 9(2 \cdot 111 + 3 \cdot 11 + 4) + (2 + 3 + 4 + 5)$. Como o número $9(2 \cdot 111 + 3 \cdot 11 + 4)$ é divisível por 9, precisamos somente verificar se o número $2 + 3 + 4 + 5 = 14$ é divisível por 9. Como este número não é divisível por 9, podemos concluir que 2345 também não é divisível por 9. Mais ainda, como 14 deixa resto 5 quando dividido por 9, concluímos que 2345 também deixa resto 5 quando dividido por 9.

Exemplo 39: [critério de divisibilidade por 4] Um número natural é divisível por 4 quando o número formado pelos seus dois últimos algarismos é divisível por 4. Vamos explorar este critério escrevendo, por exemplo, o número 23562 do seguinte modo: $23562 = 235 \cdot 100 + 62$. E como $100 = 4 \cdot 25$, $23562 = 235 \cdot 4 \cdot 25 + 62 = 4(235 \cdot 25) + 62$. Como $4(235 \cdot 25)$ é divisível por 4, é suficiente analisar o número 62. Como $62 = 4 \cdot 15 + 2$ vemos que 62 e, portanto, $23562 = 4(235 \cdot 25) + 62$ não são divisívies por 4. Além disso, estes números deixam resto 2 quando divididos por 4.

Agora vamos relembrar os critérios mais fáceis. Um número é divisível por 2 quando é par e um número é divisível por 6 quando é divisível, ao mesmo tempo, por 2 e por 3. Um número é divisível por 5 quanto termina em 0 ou em 5, e um número é divisível por 10 quando termina em zero. Utilize os critérios de divisibilidade para resolver os seguintes problemas.

Exercício 40: Verifique se cada um dos números é divisível por 2, 3, 4, 5, 6, 9 ou 10.

(a) 1260.

(b) 1746.

(c) 2210505.

Exercício 41: (Banco de Questões 2007, nível 1, lista 1, problema 1)

(a) Qual é o menor múltiplo positivo de 9 que é escrito apenas com os algarismos 0 e 1?

(b) Qual é o menor múltiplo positivo de 9 que é escrito apenas com os algarismos 1 e 2?

Solução.

(a) Um número é divisível por 9 se a soma dos seus algarismos é um múltiplo de 9. Logo, o número deve ter 9 algarismos iguais a 1. Assim, o menor número é: 111 111 111. Se alguém entender que o algarismo 0 deve obrigatoriamente figurar no número procurado, então a resposta é: 1 011 111 111.

(b) Devemos usar o maior número possível de algarismos iguais a 2, que devem ficar nas casas mais à direita. Assim, o menor número é: 12 222.

Exercício 42: Encontre um número que quando multiplicado por 9 resulta em um número formado somente por algarismos iguais a 1.

Solução. Assista o vídeo 6 e apresente uma solução diferente utilizando o critério de divisibilidade por 9.

Exercício 43: (Banco de Questões 2011, nível 1, problema 1) Encontre o menor múltiplo de 9 que não possui algarismos ímpares.

Solução. Como o número deve ser divisível por 9, a soma dos algarismos deve ser divisível por 9. Por outro lado, como todos os algarismos são pares, a soma dos algarismos também é par. Assim, a soma dos algarismos é no mínimo 18. O menor múltiplo de 9 com a soma dos algarismos igual a 18 é 99, mas seus algarismos são ímpares. Isto implica que o número deve ter três ou mais algarismos. Se queremos o menor número com 3 algarismos, o primeiro algarismo deve ser no mínimo 2. Neste caso, a soma dos outros dois algarismos é igual a 16 e como são pares, a única possibilidade é 288. Portanto, $288 = 9 \times 32$ é o menor múltiplo de 9 com todos os algarismos pares.

Exercício 44: (Banco de Questões 2010, nível 1, problema 136) No número $6a78b$, a denota o algarismo da unidade de milhar e b denota o algarismo da unidade. Se $x = 6a78b$ for divisível por 45, então quais são os possíveis valores de x?

Solução. Como o número x é múltiplo de $45 = 5 \times 9$, ele também é um múltiplo de 5 e de 9. Todos os múltiplos de 5 terminam em 0 ou em 5. Daí o número procurado tem a forma $x = 6a780$ ou a forma $x = 6a785$. Agora vamos achar o algarismo a, sabendo que para ser múltiplo de 9 a soma dos algarismos de x deve ser um múltiplo de 9.

- Se $x = 6a780$ então $6+a+7+8+0 = 21+a$ deve ser um múltiplo de 9. A única possibilidade é $21+a = 27$ donde $a = 6$ e $x = 66780$.
- Se $x = 6a785$ então $6+a+7+8+5 = 26+a$ deve ser um múltiplo de 9. A única possibilidade é $26+a = 27$ donde $a = 1$ e $x = 61785$.

Portanto o número procurado é $x = 66780$ ou $x = 61785$.

Exercício 45: (Banco de Questões 2010, nível 1, problema 169) Qual é o menor número de cinco algarismos divisível por 4 que se pode formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 9?

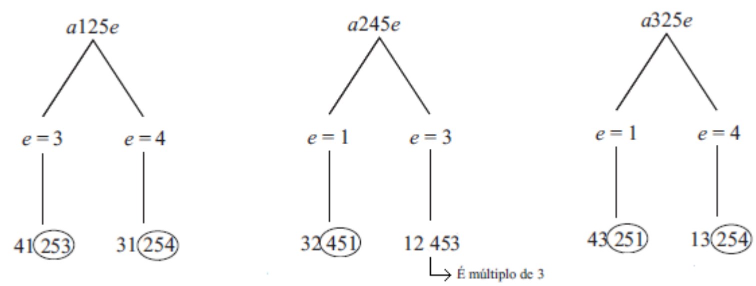
Solução. Um número é divisível por 4 se o número formado pelos seus dois últimos algarismos for divisível por 4. Assim, usando apenas os algarismos 1, 2, 3, 4 e 9, as únicas possibilidades para os dois últimos algarismos do número procurado são 12, 24, 32 ou 92. Como 9 é o maior algarismo, devemos colocá-lo "o mais à direita possível", de modo que 9 deve ser o algarismo da casa das dezenas, ou seja, nosso número termina com 92. Os outros algarismos 1, 3 e 4, devem aparecer em ordem crescente à esquerda de 92, ou seja, os três primeiros algarismos do número devem ser 134. Portanto, o número procurado é 13492.

Exercício 46: (Banco de Questões 2010, nível 1, problema 187) Os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 foram usados, cada um uma única vez, para escrever um certo número $abcde$ de cinco algarismos tal que abc é divisível por 4, bcd é divisível por 5 e cde é divisível por 3. Encontre este número.

Solução. Para que abc seja divisível por 4, seus dois últimos algarismos devem formar um número divisível por 4. Como os algarismos são 1, 2, 3, 4 e 5, as únicas possibilidades são $bc = 12$, $bc = 24$, $bc = 32$ e $bc = 52$. Por outro lado, os números divisíveis por 5 terminam em 0 ou 5. Como 0 não está incluído, segue que $d = 5$, pois bcd é divisível por 5. Isto exclui a possibilidade $bc = 52$, porque não podemos repetir o 5. Até agora temos três possibilidades, a saber:

$$a125e,\ a245e \text{ e } a325e.$$

Examinemos estes três casos para escolher os algarismos a e e, lembrando que não pode haver repetição.



Após analisar todas as possibilidades, na figura acima todos os números circulados *cde* não são múltiplos de 3, com exceção de $cde = 453$. Portanto, vemos que apenas o 12453 atende a todas as hipóteses do problema.

Exercício 47: (Banco de Questões 2010, nível 1, problema 224) O dobro de um número, quando dividido por 5, deixa resto 1. Qual é o resto da divisão deste número por 5?

Solução 1. O dobro do número procurado é um múltiplo de 5 acrescido de 1. Como os múltiplos de 5 terminam em 0 ou 5, o dobro termina em 1 ou 6. Mas o dobro é um número par, logo termina em 6. Assim, o número termina em 3 ou 8 e, portanto, dividido por 5, deixa resto 3.

Solução 2. Sabemos que o número inteiro n procurado satisfaz $2n = 5m+1$, para algum inteiro m. Então o produto $5m = 2n-1$ de 5 por m é ímpar, o que implica que m é ímpar. Assim, $m = 2k+1$, para algum inteiro k e, portanto,

$$2n = 5m + 1 = 5(2k + 1) + 1 = 10k + 6 = 2(5k + 3),$$

ou seja, $n = 5k + 3$ deixa resto 3 na divisão por 5.

Exercício 48. O vídeo 40 e o vídeo 41 apresentam, respectivamente, critérios de divisibilidade por 11 e por 7. Estude estes vídeos e em seguida aplique estes critérios para, sem efetuar a divisão, determinar se cada um dos números a seguir é divisível por 7 ou por 11.

(a) 145 659.

(b) 4 754 542.

(c) 240 394.

(d) 2 436.

ENCONTRO 3

Os principais objetivos deste encontro são apresentar/relembrar os conceitos de *mmc* e de *mdc*, explicar métodos para os cálculos destes números e utilizar estes conceitos na resolução de problemas. Os assuntos, os materiais e os vídeos relacionados aos temas deste terceiro encontro presencial são:

Assuntos	**Materiais relacionados**	**Vídeos no canal picobmep no YouTube**
Resolução de alguns exemplos que motivam as definições de *mdc* e de *mmc*.	Fomin: capítulo 3 Apostila 1: seções 3.3 e 3.7	8
Cálculo do *mdc* e do *mmc* de dois números já fatorados.		8, 9, 10
Cálculo do *mdc* e do *mmc* através de uma fatoração simultânea.		10
Aplicações variadas do *mdc* e do *mmc*.	Bancos de Questões. Provas da OBMEP.	38

3.1 Máximo Divisor Comum

Antes de apresentar a definição formal de Máximo Divisor Comum e também antes de apresentar estratégias para o cálculo do *mdc*, veremos como esse conceito aparece naturalmente na solução de problemas contextualizados.

Exercício 1: Dois rolos de arame, um de 210 metros e outro de 330 metros, devem ser cortados em pedaços de mesmo comprimento. De que modo isto pode ser feito se desejamos que cada um destes pedaços tenha o maior comprimento possível?

Solução. Primeiramente pode-se discutir algumas possibilidades.

- Podemos cortar cada um dos rolos em pedaços de um metro, obtendo 210 pedaços de um rolo e 330 pedaços de outro rolo.
- Mas podemos obter pedaços maiores, cortando em pedaços de, digamos, três metros. Neste caso obtemos $\dfrac{210}{3} = 70$ pedaços de um rolo e $\dfrac{330}{3} = 110$ pedaços do outro rolo.
- Podemos ober um pedaço ainda maior, de 10 metros, obtendo $\dfrac{210}{10} = 21$ pedaços de um rolo e $\dfrac{330}{10} = 33$ pedaços do outro rolo.

Apesar de ser possível obter a resposta assim, por tentativas, podemos parar e pensar um pouco sobre o que estamos procurando. Queremos dividir cada um dos rolos em pedaços de, digamos, d metros. Como queremos que esta divisão seja exata, d deve ser um divisor de 210 e 330, certo? Assim, devemos procurar d na lista dos divisores comuns de 210 e 330.

$$\begin{aligned} D(210) &= \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210\} \\ D(330) &= \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 11, 15, 22, 30, 33, 55, 66, 110, 165, 330\} \end{aligned}$$

E fazendo a interseção, obtemos os seguintes divisores comuns de 210 e 330 $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. Assim, considerando qualquer uma destas medidas, podemos dividir os dois rolos em pedaços do mesmo comprimento. Por exemplo, se $d = 6$ obtemos pedaços de 6 metros, dividindo um rolo em $\dfrac{210}{6} = 35$ pedaços e o outro rolo em $\dfrac{330}{6} = 55$ pedaços.

Mas, segundo o enunciado, queremos pedaços do maior comprimento possível que, segundo nossa interpretação, deve ser o maior divisor comum dos números 210 e 330. Da lista anterior, vemos que este número é 30. Deste modo, então, podemos dividir os rolos em pedaços de 30 metros, obtendo $\frac{210}{30} = 7$ pedaços de um rolo e $\frac{330}{30} = 11$ pedaços do outro rolo.

Exercício 2: Vamos supor que precisamos remeter duas encomendas de sabonetes para dois compradores diferentes. Um pediu 420 sabonetes e outro 480 sabonetes. Entretanto, queremos condicionar os sabonetes em embalagens que sirvam para atender a estes dois pedidos, já que vamos enviar uma certa quantidade de embalagens para um comprador e uma outra quantidade de embalagens para o outro comprador. Quantos sabonetes devem caber em cada uma destas embalagens para que possamos atender as duas encomendas utilizando a menor quantidade possível de embalagens?

Solução. Como todas as embalagens contém a mesma quantidade de sabonetes, esta embalagem deve conter uma certa quantidade de sabonetes que seja um número que divida 420 e 480, certo? Vejamos alguns exemplos. Suponhamos que cada embalagem contenha dois sabonetes. Assim, devemos enviar $\frac{420}{2} = 210$ embalagens para um comprador e $\frac{480}{2} = 240$ embalagens para o outro comprador. Mas se cada embalagem contém 5 sabonetes, precisaremos enviar menos embalagens para cada um deles: $\frac{420}{5} = 84$ embalagens para um comprador e $\frac{480}{5} = 96$ embalagens para o outro comprador. Utilizando embalagens de 10 sabonetes cada, podemos diminuir mais ainda a quantidade de embalagens a ser envidada para cada comprador: $\frac{420}{10} = 42$ embalagens para um comprador e $\frac{480}{10} = 48$ embalagens para o outro comprador.

Deste modo vemos que se queremos enviar menos embalagens para cada comprador, devemos colocar a maior quantidade possível de sabonetes em cada embalagem. Como a quantidade de sabonetes em cada embalagem deve ser um divisor de 420 e 480, o número de sabonetes em cada embalagem deve ser o maior número que divide 420 e 480.

Os divisores dos números 420 e 480 são:

$$\begin{aligned} D(420) &= \{1,2,3,4,5,6,7,10,12,14,15,20,21,28,30,\\ &35,42,60,70,84,105,140,210,420\}\\ D(480) &= \{1,2,3,4,5,6,8,10,12,15,16,20,24,30,32,\\ &40,48,60,80,96,120,160,240,480\} \end{aligned}$$

Os divisores comuns de 420 e 480 são

$$\{1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60\}$$

e podemos, portanto, confeccionar embalagens com qualquer uma destas quantidades de sabonetes.

Da lista anterior vemos que o maior número que divide 420 e 480 ao mesmo tempo é igual a 60. Assim, vemos que se fizermos embalagens com 60 sabonetes teremos que enviar a menor quantidade de embalagens para atender aos dois pedidos. Neste caso deveremos enviar $\frac{420}{60} = 7$ embalagens para um comprador e $\frac{480}{60} = 8$ embalagens para o outro comprador.

Exercício 3: Um terreno retangular de $105m \times 165m$ será cercado com arame farpado fixado em estacas igualmente espaçadas. Se existe uma estaca em cada vértice do terreno, qual é o número mínimo de estacas a serem utilizadas?

Solução. Também parece interessante começar explorando este problema a partir de algumas situações mais simples.

- Podemos colocar as estacas espaçadas de um em um metro. Mas para isto vamos gastar muitas estacas.

- Não podemos colocar as estacas espaçadas de dois em dois metros, porque os lados têm comprimento ímpares.

- Como $\dfrac{105}{3} = 35$ e $\dfrac{165}{3} = 55$, podemos colocar as estacas espaçadas de três em três metros.

- Também podemos colocar as estacas espaçadas de cinco em cinco metros, pois $\dfrac{105}{5} = 21$ e $\dfrac{165}{5} = 33$. Comparando com as possibilidades anteriores, neste caso, gasta-se menos estacas.

Para não ter que ficar experimentando todas as possibilidades, observe que se d é a distância entre duas estacas consecutivas, então d deve ser um divisor de 105 e d também deve ser um divisor de 165, certo? Como queremos a maior distância possível entre as estacas, vemos que d deve ser o maior número que divide ao mesmo tempo 105 e 165. Ora, isto significa que d é o máximo divisor comum de 105 e 165. Para achar este número, podemos listar os divisores de 105, os divisores de 165 e daí podemos considerar d o maior número que aparece nestas duas listas.

$$\begin{aligned} D(105) &= \{1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105\} \\ D(165) &= \{1, 3, 5, 11, 15, 33, 55, 165\} \end{aligned}$$

Divisores comuns de 105 e 165, $\{1, 3, 5, 15\}$. Concluímos, então, que a distância entre duas estacas consecutivas deve ser igual a $d = 15$.

Agora vamos contar quantas estacas são necessárias. Como um lado de $105m$ fica dividido em partes de $15m$ cada, vemos que este lado fica dividido em $\dfrac{105}{15} = 7$ pedaços. Logo sobre este lado existem 2 estacas nos vértices e mais 6 estacas no interior do lado.

Já o lado de $165m$ fica dividido em partes de $15m$ cada e, portanto, fica dividido em $\dfrac{165}{15} = 11$ pedaços. Logo sobre este lado existem 2 estacas nos vértices e mais 10 estacas no interior do lado.

O número total de estacas é, portanto, igual a 4 estacas nos vértices, mais $6 + 6 = 12$ estacas no interior dos lados de $105m$ e mais $10 + 10 = 20$ estacas no interior dos lados de $165m$, totalizando $4 + 12 + 20 = 36$ estacas.

Pergunta. É possível obter o número total de estacas, 36, a partir do perímetro total $2 \cdot 105 + 2 \cdot 165 = 540$ do terreno e do número $15 = mdc(105, 165)$, que é a distância entre duas estacas consecutivas?

Para resolver os três exercícios anteriores foi necessário considerar o maior número que divide ao mesmo tempo dois números naturais dados. Como esta necessidade é recorrente, parece ser natural apresentar a seguinte definição para o máximo divisor comum.

Definição: $mdc(a, b)$ é o maior divisor comum de a e de b.

Das soluções dos exercícios anteriores vimos que:

- $mdc(210, 330) = 30$.
- $mdc(420, 480) = 60$.
- $mdc(105, 165) = 15$.

Para calcular cada um destes números, $mdc(a, b)$, listamos os divisores de a, listamos os divisores de b, selecionamos os divisores comuns de a e de b, e identificamos $mdc(a, b)$ como o maior divisor comum. Apesar deste procedimento ser geral, isto é, teoricamente poder ser aplicado para todos os números, na prática ele fica inviável, pois pode ser muito difícil listar todos os divisores de um número dado. Esta dificuldade reside, essencialmente, no fato de não ser fácil identificar se um certo número é primo ou não. Por exemplo, tente listar o conjunto de divisores dos números 241, 997 e 3421. Nas próximas seções veremos outras maneiras mais eficientes para o cálculo do *mdc*. Entretanto, antes de começar esta parte mais técnica, parece ser interessante apresentar o conceito de *mmc*, uma vez que algumas estratégias para os cálculos do *mdc* e do *mmc* são similares.

3.2 Mínimo Múltiplo Comum

Vejamos como o conceito de Mínimo Múltiplo Comum aparece naturalmente durante a análise de algumas situações bem interessantes.

Exercício 4: Uma lâmpada pisca de 14 em 14 segundos e uma outra lâmpada pisca de 20 em 20 segundos. Um cronômetro zerado foi ligado exatamente quando estas lâmpadas piscam juntas. Se o cronômetro foi desligado na primeira vez em que as lâmpadas piscaram juntas novamente, que tempo ele marcou?

Solução. Como uma das lâmpadas pisca de 14 em 14 segundos, ela vai piscar nos instantes 0, 14, 28, 42,... ou seja, em todos os números que são múltiplos de 14. De modo análogo, a lâmpada que pisca de 20 em 20 segundos vai piscar em todos os instantes que são múltiplos de 20. Os múltiplos positivos de 14 e 20 são:

$M(14) \; = \{14, 28, 42, 56, 70, 84, 98, 112, 126, 140, 154, 168, \ldots\}.$

$M(20) = \{20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200, 220, 240, \ldots\}.$

Desta observação vemos que as lâmpadas vão piscar juntas em todos os instantes que são múltiplos comuns de 14 e de 20. Como queremos determinar o primeiro instante que elas vão piscar juntas, identificamos este instante como o menor múltiplo comum de 14 e de 20. Analisando os conjuntos dos múltiplos de 14 e 20, vemos que este instante é igual a 140 segundos. Ou seja, após o cronômetro ser ligado, as lâmpadas vão piscar juntas pela primeira vez após 2 minutos e 20 segundos.

Exercício 5: Dois ciclistas correm numa pista circular e gastam, respectivamente, 30 segundos e 35 segundos para completar uma volta na pista. Eles partem do mesmo local e no mesmo instante. Após algum tempo os dois atletas se encontram, pela primeira vez, no local de largada. Neste momento, o atleta mais veloz estará completando quantas voltas? E o menos veloz? Depois de quanto tempo da largada ocorrerá o encontro?

Solução. O atleta mais veloz passará pela linha de largada pela primeira vez após 30 segundos, pela segunda vez após 60 segundos, pela terceira vez após 90 segundos, e assim por diante. Ou seja, este atleta passará pela linha de largada nos instantes que são múltiplos de 30.

$M(30) = \{30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240, 270, 300, 330, 360, \ldots\}.$

De modo análogo vemos que o outro atleta passará pela linha de largada nos instantes que são múltiplos de 35.

$M(35) = \{35, 70, 105, 140, 175, 210, 245, 280, 315, 350, 385, 420, \ldots\}.$

Portanto, eles estarão juntos na linha de largada em todos os instantes que são múltiplos comuns de 30 e de 35. Como queremos o primeiro instante que isto vai ocorrer, identificamos este instante como o menor múltiplo comum de 30 e de 35. Analisando os conjuntos $M(30)$ e $M(35)$ vemos que o menor número que aparece nestes dois conjuntos é o 210. Portanto, os dois atletas vão se encontrar pela primeira vez na linha de largada após 210 segundos de dada largada, ou seja, após 3 minutos e 30 segundos. Neste instante o atleta mais veloz estará completado $\dfrac{210}{30} = 7$ voltas, enquanto o outro atleta estará completando $\dfrac{210}{35} = 6$ voltas.

Exercício 6: Duas engrenagens A e B têm 16 e 28 dentes, respectivamente. Elas estão encaixadas de modo que um motor ligado à engrenagem A a faz girar no sentido horário e esta faz a engrenagem B girar no sentido anti-horário. Se a engrenagem A realiza uma revolução por minuto, após quanto tempo de o motor ter sido ligado as duas engrenagens retornarão a posição inicial?

Solução. Vamos focar nossa atenção para o ponto T em que as duas engrenagens estão encaixadas. Como elas giram simultaneamente, a quantidade de dentes que passa por T de uma engrenagem é igual a quantidade de dentes que passa por T da outra engrenagem. Após uma volta da engrenagem A, passam por T os 16 dentes de A. Após duas voltas de A, passam por T 32 dentes de A. Após a terceira volta de A, passam por T um total de 38 dentes de A. E assim, sucessivamente, vemos que a cada volta de A, o número de dentes de A que passam por T é um múltiplo de 16.

$M(16) \ = \{16, 32, 48, 64, 80, 96, 112, 128, 144, 160, 176, 192, \ldots\}.$

De modo análogo, a cada volta da engrenagem B, o número de dentes de B que passam por T é um múltiplo de 28.

$M(28) \ = \{28, 56, 84, 112, 140, 168, 196, 224, 252, 280, 308, 336, \ldots\}.$

Para cada número de $M(16)$ a engrenagem A completa uma certa quantidade de voltas completas, e para cada número de $M(28)$ a engrenagem

B também completa uma certa quantidade de voltas completas. Assim, se um número pertence tanto a $M(16)$ quanto a $M(28)$ estamos em uma situação que as duas engrenagem dão voltas completas e, portanto, ambas voltaram à posição inicial. Como queremos determinar o primeiro instante em que isso ocorre, queremos o menor número que pertence tanto a $M(16)$ quanto a $M(28)$, ou seja, queremos o menor múltiplo comum de 16 e 28. Observando os conjuntos acima, vemos que este número é 112.

Para essa quantidade de dentes, vemos que a engrenagem A completa $\frac{112}{16} = 7$ voltas e a engrenagem B completa $\frac{112}{28} = 4$ voltas. Como a engrenagem A realiza uma volta por minuto concluímos, então, que as engrenagens retornam à posição inicial pela primeira vez após 7 minutos.

Para resolver os três exercícios anteriores, foi necessário considerar o menor número que é ao mesmo tempo um múltiplo de dois números naturais dados. Este é o mínimo múltiplo comum.

Definição: $mmc(a, b)$ é o menor múltiplo comum de a e de b.

De acordo com os exercícios anteriores, temos

- $mmc(14, 20) = 140$.
- $mmc(30, 35) = 210$.
- $mmc(16, 28) = 112$.

Para calcular cada um desses números, $mmc(a, b)$, listamos os múltiplos de a, listamos os múltiplos de b, e identificamos o $mmc(a, b)$ como o menor múltiplo comum. Como no caso do mdc, apesar desse procedimento ser geral, na prática ele pode ser muito trabalhoso, pois podem aparecer números muito grandes, uma vez que pode demorar muito até aparecer o primeiro múltiplo comum. Dessa dificuldade surge a necessidade de estudar outras estratégias para o cálculo do *mmc*.

3.3 Cálculo do *mdc* e do *mmc*: dada a fatoração

Nos exercícios anteriores vimos que é possível, apesar de muito trabalhoso, calcular o *mmc* e o *mdc* utilizando apenas as definições destes conceitos. Agora, utilizando as propriedades dos números naturais vistas nos encontros anteriores, veremos estratégias mais eficientes para o cálculo destes números. Vale a pena observar que no vídeo 10 estão discutidos os cálculos do *mdc* e do *mmc*. Recorra a este vídeo para estudar ainda mais sobre os temas deste encontro.

Antes de apresentar uma estratégia para o cálculo do *mdc* e do *mmc* de dois números já fatorados como produtos de números primos, vamos relembrar, nos exercícios seguintes, algumas propriedades apresentadas no encontro anterior.

Exercício 7: Se $a = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2$ identifique quais dos seguintes números são divisores de a.

Solução. Para que d seja um divisor de a, deve existir um número n tal que $nd = a = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2$. Daí vemos que d só pode ter fatores primos 2, 5 e 7, ou seja d tem a forma $d = 2^x \cdot 5^y \cdot 7^z$. Mais ainda, como, ao efetuar o produto nd, os expoentes x, y e z só podem aumentar, vemos que $x \leq 3$, $y \leq 1$ e $z \leq 2$. Daí pode-se concluir que apenas nos itens (a) e (e) temos um divisor de a.

Os próximos exercícios ajudam a estabelecer uma estratégia para o cálculo do *mdc*.

Exercício 8: Se $a = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ e $b = 2^3 \cdot 5^2$, liste os divisores comuns de

a e de b.

Solução. Se d é um divisor de a, os únicos fatores primos de d são 2, 3 e 5. Se d é um divisor de b, os únicos fatores primos de d são 2 e 5. E, se d é um divisor comum de a e b, fazendo a interseção, vemos que os únicos fatores primos de d são 2 e 5. Assim $d = 2^x \cdot 5^y$. O número x não pode ser maior que 2 e 3, que são os expoentes do fator primo 2 nas fatorações de a e de b. Logo, no máximo podemos pegar $x = 2$. De modo análogo, o número y não pode ser maior que 1 e 2, expoentes do fator primo 5 nas fatorações de a e de b e assim, no máximo podemos pegar $y = 1$. Assim, vemos que $x \in \{0, 1, 2\}$ e $y \in \{0, 1\}$. Fazendo todas as possibilidades, podemos listar os divisores comuns de a e de b.

$$\begin{aligned}
x = 0 \text{ e } y = 0 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^0\,5^0 = 1.\\
x = 0 \text{ e } y = 1 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^0\,5^1 = 5.\\
x = 1 \text{ e } y = 0 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^1\,5^0 = 2.\\
x = 1 \text{ e } y = 1 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^1\,5^1 = 10.\\
x = 2 \text{ e } y = 0 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^2\,5^0 = 4.\\
x = 2 \text{ e } y = 1 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^2\,5^1 = 20.
\end{aligned}$$

Desta lista de divisores comuns vemos que $mdc(a, b) = 20$.

Exercício 9: Se $a = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 11$ e $b = 2 \cdot 3^5 \cdot 7^3$, calcule $mdc(a, b)$.

Solução. Se o objetivo é apenas determinar o mdc, podemos simplificar o que foi feito no exercício anterior. Se d é um divisor de a, então os únicos fatores primos de d são 2, 3 e 11. E se d é um divisor de b, então os únicos fatores primos de d são 2, 3 e 7. Assim, fazendo a interseção, se d é um divisor comum de a e de b, concluímos que os únicos fatores primos de d são 2 e 3 e, portanto, d tem a forma $d = 2^x \cdot 3^y$. Como queremos o maior divisor comum, precisamos considerar os maiores valores permitidos para

x e y. O número x não pode ser maior que 4 e 1, que são os expoentes do fator primo 2 nas fatorações de a e de b. Logo o maior valor possível para x é 1. De modo análogo, y não pode ser maior que 2 e 5, expoentes do fator primo 3 nas fatorações de a e de b. Portanto o maior valor possível para y é 2. Tomando então $x = 1$ e $y = 2$, concluímos que $mdc(a, b) = 2^1 \cdot 3^2$. Ou seja, $mdc(a, b)$ é a parte comum (interseção) das fatorações de a e b.

A solução do exercício anterior nos ensina uma estratégia para o cálculo do mdc de dois números já fatorados. Utilizando esta estratégia resolva o seguinte exercício.

Exercício 10: Em cada caso, calcule $mdc(a, b)$.

(a) $a = 3 \cdot 5^6 \cdot 11^2\ ,\ \ b = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^4$.

(b) $a = 2^3 \cdot 7^2 \cdot 13^5\ ,\ \ b = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 11^6 \cdot 13$.

(c) $a = 3 \cdot 5^2 \cdot 7^3\ ,\ \ b = 2^5 \cdot 7 \cdot 13$.

(d) $a = 2^3 \cdot 7^2 \cdot 11^5\ ,\ \ b = 3^6 \cdot 5^2 \cdot 13^4$.

Solução. Procedendo como no exercício anterior, comparando as fatorações de a e de b, considerando os menores expoentes, pode-se concluir que

(a) $mdc = 3 \cdot 5^2$.

(b) $mdc = 2^3 \cdot 13$.

(c) $mdc = 7$.

(d) $mdc = 1$.

Aproveitando o item (d) do exercício anterior, vamos ver o conceito de números relativamente primos.

Definição: Dois números naturais a e b são **relativamente primos**, ou **primos entre si**, se não existir um número primo que divide simultaneamente a e b. De modo equivalente, isto significa que $mdc(a, b) = 1$. Por exemplo, $28 = 2^2 \cdot 7$ e $45 = 3^2 \cdot 5$ são relativamente primos, ou primos entre si, pois não existe um fator primo em comum entre a e b. De modo equivalente isto também poderia ser concluído do fato de $mdc(28, 45) = 1$.

Agora seguem alguns exercícios que irão apresentar uma estratégia para o cálculo do mmc de dois números fatorados.

Exercício 11: Se $a = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2$ identifique quais dos seguintes números são múltiplos de a.

(a) $2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3$

(b) $2 \cdot 5 \cdot 7^4 \cdot 13^2$

(c) $2^5 \cdot 5^2 \cdot 7$

(d) $2^3 \cdot 5 \cdot 7^6 \cdot 13 \cdot 19^2$

(e) $2^7 \cdot 5^3 \cdot 7^4 \cdot 60$

Solução. Se m é um múltiplo de a, então existe um número n tal que $m = na = n \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2$. Isto implica que na fatoração de m devem aparecer pelo menos os elementos 2^3, 5 e 7^2 e, portanto, que m deve ter a forma $m = 2^x \cdot 5^y \cdot 7^z \cdot n$, em que $x \geq 3$, $y \geq 1$, $z \geq 2$ e n é qualquer número natural. Daí segue que, entre os números dados, somente em (a), (d) e (e) encontramos múltiplos de a.

Exercício 12: Se $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ e $b = 2 \cdot 3^4 \cdot 5$, calcule $mmc(a, b)$.

Solução. Como no exercício anterior, se m é um múltiplo de a, então na fatoração de m devem aparecer pelo menos os elementos 2^3, 3^2, 5 e 7. Se m é um múltiplo de b, então na fatoração de m devem aparecer pelo menos 2, 3^4 e 5. Daí, para que isso ocorra simultaneamente no caso em que m é um múltiplo comum de a e de b, na fatoração de m devem aparecer pelo menos 2^3, 3^4, 5 e 7. Portanto, os múltiplos comuns de a e de b têm a forma $m = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot n$, em que n é um número natural qualquer. Como queremos o menor múltiplo comum, pegamos $n = 1$ e obtemos $mmc(a, b) = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$.

A solução do exercício anterior nos ensina uma estratégia para o cálculo do mmc de dois números já fatorados. Utilizando essa estratégia resolva o seguinte exercício.

Exercício 13: Em cada caso, calcule $mmc(a, b)$.

(a) $a = 2 \cdot 5^3$, $b = 2^2 \cdot 7^4$.

(b) $a = 3^2 \cdot 11$, $b = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^4$.

(c) $a = 5^2 \cdot 7$, $b = 5^2 \cdot 7^3$.

(d) $a = 2 \cdot 13$, $b = 3 \cdot 5$.

Solução. Procedendo como no exercício anterior, comparando as fatorações de a e de b, considerando os maiores expoentes, pode-se concluir que

(a) $mmc = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^4$.

(b) $mmc = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 11$

(c) $mmc = 5^2 \cdot 7^3$.

(d) $mmc = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$.

Observamos que se temos dois números fatorados como produtos de primos, o que acabamos de ver é um excelente método para o cálculo do *mmc* e do *mdc*. Entretanto, se os números não estão fatorados, este método pode ser muito trabalhoso, pois na prática é muito difícil fatorar um número muito grande. Para fazer isto, para fatorar um número, devemos achar os seus divisores primos, que pode ser uma tarefa inviável se o número for grande. Por exemplo, tente encontrar as fatorações em primos dos números 461, 2437 ou 252997.

3.4 Cálculo do *mdc* e do *mmc*: fatorando simultaneamente

De modo geral, na escola básica é ensinado o cálculo do *mdc* e do *mmc* por meio de uma fatoração simultânea, como está explicado logo a seguir. O vídeo 10 do canal picobmep no YouTube explica detalhadamente este procedimento para o cálculo do *mdc* e do *mmc*. Recomendamos que você assista este vídeo para tirar suas dúvidas ou para aprender essa estratégia para o cálculo do *mdc* e do *mmc*.

Exercício 14: Calcule $mdc(100, 140)$.

Solução. Como o *mdc* entre 100 e 140 deve, naturalmente, ser um divisor de 100 e 140, podemos ir dividindo estes dois números por todos os números primos que os dividem simultaneamente. Como na fatoração de um número, esses cálculos podem ser organizados da seguinte maneira, em que do lado direito da barra vertical são colocados os números primos que dividem 100 e 140 ao mesmo tempo, e do lado esquerdo da barra são colocados os resultados dessas divisões sucessivas.

$$\begin{array}{rr|l} 100\ , & 140 & 2 \\ 50\ , & 70 & 2 \\ 25\ , & 35 & 5 \\ 5\ , & 7 & \end{array}$$

Como 5 e 7 são primos entre si (eles não possuem divisor primo em comum), paramos o processo e vemos que $mdc(100, 140) = 2^2 \cdot 5 = 20$, pois do modo como esse número foi construído, ele é um divisor comum de 100 e 140 e ele é o maior possível, pois testamos todas as possibilidades de divisores comuns.

Exercício 15: Calcule $mdc(1500, 1800)$.

Solução. Aplicando o processo prático para o cálculo do mdc descrito no exercício anterior, devemos dividir 1500 e 1800 por todos os divisores primos comuns. Paramos até obter dois números relativamente primos, isto é, dois números sem fator primo algum em comum.

$$\begin{array}{rr|l} 1500\ , & 1800 & 2 \\ 750\ , & 900 & 2 \\ 375\ , & 450 & 3 \\ 125\ , & 150 & 5 \\ 25\ , & 30 & 5 \\ 5\ , & 6 & \end{array}$$

Daí $mdc(1500, 1800) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300$.

Vejamos agora um processo similar para o cálculo do mmc.

Exercício 16: Calcule $mmc(12, 90)$.

Solução. Por ser um múltiplo de 12 e de 90, o $mmc(12, 90)$ deve ter todos os fatores primos que aparecem nas fatorações de 12 e de 90. Deste modo, a fatoração do $mmc(12, 90)$ deve conter as fatorações em números primos dos números 12 e 90. Então para calcular $mmc(12, 90)$ fatoramos ao mesmo tempo estes dois números, organizando o cálculo como está indicado a seguir, em que do lado direito da barra vertical colocamos os primos que dividem ou 12 ou 90. Para achar o menor múltiplo comum, sempre que for possível, dividir os dois números do lado esquerdo da barra vertical pelo respectivo número que aparece do lado direito.

$$\begin{array}{rr|l}
12\,, & 90 & 2 \\
6\,, & 45 & 2 \\
3\,, & 45 & 3 \\
1\,, & 15 & 3 \\
1\,, & 5 & 5 \\
1\,, & 1 &
\end{array}$$

Multiplicando todos os números primos do lado direito da barra vertical obtemos o mmc desejado. Portanto, $mmc(12, 90) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$.

Exercício 17: Calcule $mmc(75, 84)$.

Solução.

$$\begin{array}{rr|l}
75\,, & 84 & 2 \\
75\,, & 42 & 2 \\
75\,, & 21 & 3 \\
25\,, & 7 & 5 \\
5\,, & 7 & 5 \\
1\,, & 7 & 7 \\
1\,, & 1 &
\end{array}$$

Daí segue que $mmc(75, 84) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 2100$.

Vale a pena observar que os processos explicados nos exercícios anteriores para o cálculo do *mdc* e do *mmc* podem ser aplicados simultaneamente. Para isto, basta identificar os fatores primos que dividiram os dois números ao mesmo tempo. Considerando somente estes números, obtemos o *mdc*. E considerando todos, obtemos o *mmc*.

Exercício 18: Calcule o *mdc* e o *mmc* de 980 e 1050.

Solução. Podemos utilizar o processo prático para o cálculo do *mmc*, mas em cada linha marcamos com um quadradinho o fator primo que divide os dois números simultaneamente.

$$\begin{array}{r@{\ ,\ }r|c}
980 & 1050 & \boxed{2} \\
490 & 525 & 2 \\
245 & 525 & 3 \\
245 & 175 & \boxed{5} \\
49 & 35 & 5 \\
49 & 7 & \boxed{7} \\
7 & 1 & 7 \\
1 & 1 &
\end{array}$$

Considerando somente os fatores comuns obtemos $mdc(980, 1050) = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$ e considerando todos os fatores obtemos $mmc(980, 1050) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 14700$.

Também é importante observar que para o cálculo do *mdc* ou do *mmc* não existe a obrigatoriedade de dividir apenas por números primos e nem a necessidade de considerar os números primos em ordem crescente. Considerando números compostos, ou números primos maiores, o processo pode ser facilitado ou acelerado. Veja o seguinte exercício.

Exercício 19: Calcule o $mdc(6930, 9750)$.

Solução.

$$\begin{array}{rr|c} 6930\,, & 9750 & \boxed{10} \\ 693\,, & 975 & 5 \\ 693\,, & 195 & 5 \\ 693\,, & 39 & \boxed{3} \\ 231\,, & 13 & \end{array}$$

Como 13 e 231 não primos entre si, não é necessário continuar, pois não obteremos mais fatores em comum. Daí multiplicando os números marcados obtemos $mdc(6930, 9750) = 10 \cdot 3 = 30$.

O processo que acabamos de apresentar, nesta seção, para o cálculo do *mdc* e do *mmc* pode ser tão trabalhoso de ser executado quanto o processo visto na seção anterior, pois essencialmente, aqui também estamos fatorando os números como um produto de primos. Experimente esta dificuldade tentando calcular, por exemplo, $mdc(34241, 44329)$ ou $mmc(15563, 18407)$. Por este motivo surge a necessidade de estudar um método ainda mais eficiente para o cálculo do *mdc* e do *mmc*. No próximo encontro presencial será apresentado o Algoritmo de Euclides para o cálculo do *mdc*. Além disso, utilizando a propriedade $mdc(a, b) \cdot mmc(a, b) = a \cdot b$ veremos que também teremos um algoritmo para o cálculo do *mmc*. Entretanto, antes de apresentar este algoritmo e algumas propriedades importantes do *mmc* e do *mdc* vamos ver algumas aplicações dos conceitos introduzidos nesta aula.

3.5 Problemas de aplicação

Lembre-se de que começamos o estudo do *mdc* e do *mmc* pela análise das resoluções de alguns problemas contextualizados. Após esta motivação, após introduzir estes conceitos e de apresentar algumas estratégias para o cálculo do *mdc* e do *mmc*, é interessante voltar e aplicar novamente a teoria estudada na resolução de outros problemas. Nesta seção apresentamos uma pequena lista de problemas que envolvem o cálculo do *mdc* ou do *mmc*. Tente resolver estes problemas sozinho, procurando entender e sentir como os conceitos de *mdc* e de *mmc* surgem naturalmente na análise do problema proposto.

Exercício 20: (Banco de Questões 2010, nível 1, problema 28) Uma bibliotecária recebe 130 livros de Matemática e 195 livros de Português. Ela quer arrumá-los em estantes, colocando igual quantidade de livros em cada estante, sem misturar livros de Matemática e de Português na mesma estante. Quantos livros ela deve colocar em cada estante para que o número de estantes utilizadas seja o menor possível?

Solução. Denotando por n o número de livros que a bibliotecária vai colocar em cada estante, temos $130 \div n =$ número de estantes para os livros de Matemática e $195 \div n =$ número de estantes para os livros de Português. Isso mostra que n deve ser um divisor comum de 130 e de 195, pois o número de estantes utilizadas é inteiro. Sabemos que, quando aumentamos o denominador de uma fração, esta fração diminui; por exemplo, $27/10$ é menor do que $27/8$. Logo, quanto maior for o denominador n, menores serão as frações $130/n$ e $195/n$, o que significa que menor será o número de estantes utilizadas. Vemos, assim, que n deve ser o maior divisor comum de 130 e 195. Como as decomposições destes números em fatores primos são $130 = 2 \cdot 5 \cdot 13$ e $195 = 3 \cdot 5 \cdot 13$, segue que o *mdc* de 130 e 195 é $5 \cdot 13 = 65$. Logo, a bibliotecária vai colocar 65 livros em cada estante, o número de estantes para os livros de Matemática é $130 \div 65 = 2$ e o número de estantes para os de Português é $195 \div 65 = 3$, o que dá um total de $2 + 3 = 5$ estantes.

Exercício 21: (Banco de Questões 2010, nível 1, problema 158) No ponto de ônibus perto de sua casa, Quinzinho pode pegar os ônibus de duas linhas para ir à escola. Os ônibus de uma linha passam de 15 em 15 minutos e os da outra de 25 em 25 minutos, sendo que às 7h30m da manhã os ônibus das duas linhas passam juntos.

(a) A que horas passarão juntos novamente?

(b) Entre as 7h30min da manhã e a meia noite, quais são os horários em que os ônibus passam juntos neste ponto perto da casa de Quinzinho?

Solução.

(a) Fatorando temos $15 = 3 \cdot 5$ e $25 = 5^2$. Portanto o menor múltiplo comum de 15 e 25 é $75 = 3 \cdot 5^2$. Assim, os dois ônibus passarão juntos novamente no ponto a cada 75 minutos, ou seja, a cada 1h15min. Logo, os ônibus passarão juntos novamente no ponto perto da casa de Quinzinho, às 7h30min + 1h15min = 8h45min.

(b) Para obter os horários em que os ônibus passarão juntos no ponto de ônibus perto da casa de Quinzinho, devemos ir somando 1h15min, obtendo 8h45min, 10h, 11h15min, 12h30min, 13h45min, 15h, 16h15min, 17h30min, 18h45min, 20h, 21h15min, 22h30min e 23h45min. O próximo ônibus só passa depois da meia noite.

Exercício 22: Quantos números entre 1 e 2012 são múltiplos de 6 ou múltiplos de 15?

Solução. Para encontrar a quantidade de múltiplos de 6 compreendidos entre 1 e 2012, basta usar o algoritmo da divisão e observar que $2012 = 335 \cdot 6 + 2$. Isto mostra que $6 \cdot 1, 6 \cdot 2, \ldots, 6 \cdot 335$ são os múltiplos de 6 entre 1 e 2012, ou seja, temos 335 destes múltiplos. Do mesmo modo, como

$2012 = 134\cdot 15+2$, vemos que existem 134 múltiplos de 15 entre 1 e 2012. Neste total de $335+134 = 469$, alguns números aparecem contados duas vezes, pois são múltiplos de 6 e de 15 ao mesmo tempo. Por exemplo, os números $6 \cdot 15$ e $2 \cdot 6 \cdot 15$ foram contados tanto como múltiplos de 6 quanto como múltiplos de 15. Lembre que os múltiplos de 6 e de 15 são, também, múltiplos de $mmc(6, 15) = 30$. Como $2012 = 67 \cdot 30 + 2$, podemos concluir que existem 67 múltiplos de 30 entre 1 e 2012. Logo, o número de múltiplos de 6 ou 15 entre 1 e 2012 é $469 - 67 = 402$.

Os próximos dois exercícios podem ser utilizados para comentar que o *mdc* e o *mmc* também são calculados para uma lista de mais de dois números.

Exercício 23: Três atletas correm numa pista circular e gastam, respectivamente, $2,4$ *min*, $2,0$ *min* e $1,6$ *min* para completar uma volta na pista. Eles partem do mesmo local e no mesmo instante. Após algum tempo, os três atletas se encontram, pela primeira vez, no local de largada. Neste momento, o atleta mais veloz estará completando quantas voltas?

Solução. Para utilizar apenas números inteiros, em vez de considerar minutos como unidade de tempo, vamos utilizar segundos. Como um minuto possui 60 segundos, multiplicando os tempos em minutos por 60, vemos que os atletas percorrem uma volta na pista em 144 *seg*, 120 *seg* e 96 *seg*. Como cada atleta percorre voltas na pista em tempos que são múltiplos do tempo que ele gasta para percorrer uma volta, vemos que eles se encontrarão novamente, pela primeira vez, no local da largada após um tempo igual ao $mmc(144, 120, 96) = 1440$ segundos. Neste instante os atletas estarão completando $1440 \div 144 = 10$ voltas, $1440 \div 120 = 12$ voltas e $1440 \div 96 = 15$ voltas. Portanto, neste instante, o atleta mais veloz (aquele que gasta menos tempo para percorrer uma volta) estará completando 15 voltas.

Exercício 24: Três arames medem respectivamente, $180m$, $252m$ e $324m$. Pretende-se dividi-los em pedaços de mesmo comprimento. Qual deverá ser este comprimento de modo que o número de pedaços seja o menor possível? Em quantos pedaços os arames serão divididos? (Compare com o exercício 1 deste encontro.)

Solução. Para que a quantidade de pedaços seja a menor possível, o tamanho de cada um destes pedaços deve ser o maior possível. E como queremos dividir os arames em pedaços do mesmo tamanho, vemos que este tamanho d deve ser um divisor de 180, 252 e 324. Assim concluímos que d é o máximo divisor comum de 180, 252 e 324.

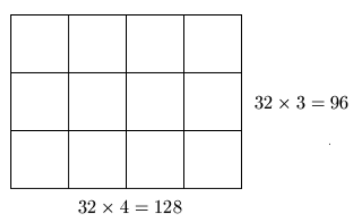
$$\begin{array}{rrr|l} 180\ , & 252\ , & 324 & 2 \\ 90\ , & 126\ , & 162 & 2 \\ 45\ , & 63\ , & 81 & 3 \\ 15\ , & 21\ , & 27 & 3 \\ 5\ , & 7\ , & 9 & \end{array}$$

Como 5, 7 e 9 são relativamente primos, paramos o processo e concluímos que $mdc(180, 252, 324) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$. Portanto os arames serão divididos em pedaços de 36 metros sendo que um rolo será dividido em $180 \div 36 = 5$ pedaços, o outro rolo em $252 \div 36 = 7$ pedaços e o último rolo em $324 \div 36 = 9$ pedaços.

Exercício 25: Determine a quantidade mínima de placas quadradas que são necessárias para cobrir uma superfície retangular de $12,8\ m$ de comprimento por $9,6\ m$ de largura?

Solução. Para utilizar apenas números inteiros, em vez de considerar metros como unidade de comprimento, vamos utilizar decímetros. Assim, o terreno retangular possui $128\ dm$ de comprimento por $96\ dm$ de largura.

Vamos supor que a superfície retangular seja coberta por $m \times n$ placas quadradas, sendo m faixas horizontais (no sentido do comprimento) e n faixas verticais (no sentido da largura da superfície retangular). Deste modo, se d é o comprimento do lado de cada placa quadrada, vemos que $n \times d = 128$ e $m \times d = 96$, de modo que d é um divisor comum de 128 e 96. Para conseguir cobrir a superfície retangular com a menor quantidade de placas é necessário considerar placas de maior tamanho possível. Assim, podemos concluír que d é o máximo divisor comum de 128 e 96. Daí $d = mdc(128, 96) = 32$ e, portanto, cada placa quadrada tem $32\ dm = 3,2\ m$ de lado. Mais ainda, como $n = 128 \div 32 = 4$ e $m = 96 \div 32 = 3$, vemos que a superfície retangular deve ser coberta por $4 \times 3 = 12$ placas quadradas. (Compare com o exercício 3 deste capítulo.)



Exercício 26: Determine o menor número inteiro positivo de três algarismos que é divisível, ao mesmo tempo, por 4, 8 e 12.

Solução. Dizer que um número é divisível por 4, 8 e 12 é o mesmo que dizer que este número é um múltiplo, ao mesmo tempo, de 4, 8 e 12. Como sabemos, todos os múltiplos de 4, 8 e 12 são múltiplos do $mmc(4, 8, 12) = 24$. Como $2 \times 24 = 48$, $3 \times 24 = 72$, $4 \times 24 = 96$ e $5 \times 24 = 120$, concluímos que o menor número inteiro positivo de três algarismos que é divisível, ao mesmo tempo, por 4, 8 e 12 é o número 120.

Exercício 27: Apresente dois números naturais que multiplicados por

168 e 180, respectivamente, resultam o mesmo número natural. Agora determine os menores números naturais com esta propriedade.

Solução. Procuramos números m e n tais que $168m = 180n$. Fatorando 168 e 180, podemos escrever esta igualdade assim: $2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot m = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot n$. Como a fatoração é única, para que esta igualdade seja verdadeira devem aparecer em m pelos menos os fatores 3 e 5 e, em n, devem aparecer pelo menos 2 e 7. Daí vemos que $m = 3 \cdot 5 \cdot k$ e $n = 2 \cdot 7 \cdot k$, para qualquer número natural k. Observe que neste caso $168m = 180n \Rightarrow 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot m = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot n \Rightarrow 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot (3 \cdot 5 \cdot k) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 7 \cdot k) \Rightarrow (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7) \cdot k = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7) \cdot k$.

A menor solução é obtida para $k = 1$, ou seja, para $m = 3 \cdot 5 = 15$ e $n = 2 \cdot 7 = 14$.

De outro modo ainda, se $168m = 180n$ com os menores valores possíveis de m e n, então o número $168m = 180n$ é igual ao mínimo múltiplo comum de 168 e 180. Daí $168m = 180n = mmc(168, 180) = 2520$. Portanto $m = 2520 \div 168 = 15$ e $n = 2520 \div 180 = 14$.

Exercício 28: Determine o menor número inteiro $n > 1$ tal que n deixa resto 1 quando dividido por 156 e n também deixa resto 1 quando dividido por 198.

Solução. Como n deixa resto 1 quando dividido por 156 temos que n tem a forma $n = 156a + 1$. Como n deixa resto 1 quando dividido por 198, n tem a forma $n = 198b + 1$. Assim vemos que $n - 1 = 156a$ e $n - 1 = 198b$ e, portanto, $n - 1$ é um múltiplo comum de 156 e de 198. Como queremos encontrar o menor tal número n, podemos então concluir que $n-1$ é o mínimo múltiplo comum de 156 e 198.

$$\begin{array}{rcr|c} 156 & , & 198 & 2 \\ 78 & , & 99 & 2 \\ 39 & , & 99 & 3 \\ 13 & , & 33 & 3 \\ 13 & , & 11 & 11 \\ 13 & , & 1 & 13 \\ 1 & , & 1 & \end{array}$$

Logo $n-1 = mmc(156, 198) = 2^2 \times 3^2 \times 11 \times 13 = 5148$ e, portanto, $n = 5149$.

Exercício 29: Determine os três menores números, maiores que 1, que ao serem divididos por 2, 3, 4, 5, 6, e 7 deixam resto 1.

Solução. Este exercício é muito similar ao anterior e a sua solução está discutida no vídeo 38 do canal picobmep no YouTube.

No Portal da Matemática, no 6º ano do Ensino Fundamental, no módulo "Divisibilidade", existem seis videoaulas sobre *mdc* e *mdc*:

- Máximo Divisor Comum
- Propriedades do *mdc*
- Exercícios de *mdc*
- Mínimo Múltiplo Comum
- Propriedades do *mmc*
- Exercícios de *mmc*

Durante os encontros 3 e 4 recomendamos o estudo destes vídeos. Em particular no vídeo "exercícios de *mmc*" você pode ver as soluções dos exercícios seguintes. Como sempre, tente resolver sozinho. E só depois de chegar a uma solução parcial ou completa, compare o seu raciocínio com o que está apresentado na videoaula.

Exercício 30: Em um cesto haviam ovos. Eram mais de 50 e menos de 60. Contando de 3 em 3, sobravam 2. Contando de 5 em 5, sobravam 4 ovos. Qual é a quantidade de ovos no cesto?

Exercício 31: Determine o menor número que divido por 8, 18 e 20 deixa restos 1, 11 e 13, respectivamente.

ENCONTRO 4

No encontro anterior apresentamos os conceitos de *mmc* e de *mdc*, vimos que estes números podem ser calculados usando uma fatoração simultânea e estudamos algumas aplicações. Agora, neste encontro, vamos apresentar o Algoritmo de Euclides para o cálculo do *mdc* e vamos estudar algumas propriedades do *mdc* e do *mmc*. Os assuntos, os materiais e os vídeos relacionados aos temas deste quarto encontro presencial são:

Assuntos	**Materiais relacionados**	**Vídeos no canal picobmep no Youtube**
Explorar o algoritmo de Euclides: $mdc(a,b) = mdc(a, b-a)$.	Apostila 1: seção 3.3 Fomin: capítulo 3	9
Explorar o algoritmo de Euclides: $mdc(a,b) = mdc(a,r)$ em que r é o resto da divisão de b por a.	Apostila 1: seção 3.8 Fomin: capítulo 3	21
Resolver exercícios e explorar algumas propriedades do *mdc* e do *mmc*.	Apostila 1: seção 3.3 Apostila 1: seção 3.8 Problemas suplementares da Apostila 1.	25, 26

4.1 Cálculo do mdc: algoritmo de Euclides – parte 1

O Algoritmo de Euclides para o cálculo do mdc baseia-se na seguinte propriedade dos números naturais. Observamos que essa propriedade está muito bem explicada no vídeo 9. Dê uma olhada.

Propriedade: Sejam a e b números naturais com $a < b$.

(a) Se d é um divisor comum de a e b, então d também é um divisor de $b - a$.

(b) Reciprocamente, se d é um divisor de a e de $b - a$, então d é um divisor de b.

Lembre-se de que esta propriedade já foi estudada nos exercícios 20 e 27 do encontro 2. Na verdade, esta propriedade está relacionada com o fato de que a soma e a diferença de dois múltiplos de um número d ainda são múltiplos de d.

Exemplos:

- É fácil ver que 84 e 35 são múltiplos de 7. Então $84 + 35 = 119$ e $84 - 35 = 49$ são múltiplos de 7.
- O número $d = 4$ é um divisor de $a = 20$ e de $b = 48$, pois $20 = 4 \cdot 5$ e $48 = 4 \cdot 12$. Daí $d = 4$ é um divisor de $b - a = 28$, pois $b - a = (4 \cdot 12) - (4 \cdot 5) = 4 \cdot (12 - 5) = 4 \cdot 7$.
- Para entender o item (b) vamos considerar que a e $b - a$ são múltiplos de d. Como $b = a + (b - a)$ é uma soma de múltiplos de d, segue que b também é um múltiplo de d.

É importante observar que a propriedade anterior implica que os divisores comuns de a e b são iguais aos divisores comuns de a e $b-a$.

Exercício 1: Se $a = 18$ e $b = 60$ calcule os conjuntos $D(a)$, $D(b)$ e $D(b-a)$ dos divisores de a, de b e de $b-a$. Em seguida verifique que $D(a) \cap D(b) = D(a) \cap D(b-a)$.

Solução.

$$D(a) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

$$D(b) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$$

$$D(b-a) = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$$

Calculando os divisores comuns:

$$D(a) \cap D(b) \;=\; \{1, 2, 3, 6\} \;=\; D(a) \cap D(b-a).$$

As propriedades que acabamos de verificar implicam que os divisores comuns de a e b são iguais aos divisores comuns de a e $b-a$. Em particular, o maior divisor comum de a e b é igual ao maior divisor comum de a e $b-a$. Ou seja, acabamos de verificar a seguinte propriedade.

Propriedade: Se a e b são números naturais com $a < b$, então $mdc(a, b) = mdc(a, b-a)$. (Este teorema também está demonstrado no vídeo 9.)

Como veremos logo abaixo, esta propriedade permite ir reduzindo sucessivamente o cálculo do mdc de dois números ao cálculo do mdc de números cada vez menores. E como a única conta que deve ser feita é uma subtração, este método é mais fácil de ser aplicado do que os métodos anteriores, quando tínhamos que fatorar os números dados.

Exercício 2: Calcule $mdc(18, 60)$.

Solução.

$$mdc(18, 60) = mdc(18, 60-18) = mdc(18, 42) =$$

$$mdc(18,42) = mdc(18,42-18) = mdc(18,24) =$$
$$mdc(18,24) = mdc(18,24-18) = mdc(18,6) = 6.$$

Exercício 3: Calcule $mdc(459,595)$.

Solução.

$$mdc(459,595) = mdc(459,595-459) = mdc(459,136) =$$
$$mdc(136,459) = mdc(136,459-136) = mdc(136,323) =$$
$$mdc(136,323) = mdc(136,323-136) = mdc(136,187) =$$
$$mdc(136,187) = mdc(136,187-136) = mdc(136,51) =$$
$$mdc(51,136) = mdc(51,136-51) = mdc(51,85) =$$
$$mdc(51,85) = mdc(51,85-51) = mdc(51,34) =$$
$$mdc(34,51) = mdc(34,51-34) = mdc(34,17) = 17.$$

Exercício 4: Tente calcular o $mdc(1203,3099)$ usando uma fatoração simultânea e depois calcule este mdc usando a propriedade $mdc(a,b) = mdc(a,b-a)$.

Solução. Como $1203 = 3 \cdot 401$, $3099 = 3 \cdot 1033$, 401 e 1033 são números primos, aparentemente pode ser difícil obter as fatorações destes dois números. E se alguém ainda não achar este exemplo difícil, podemos facilmente dificultar mais, propondo exemplos com números cada vez maiores até convencer de que o cálculo do mdc por meio da propriedade $mdc(a,b) = mdc(a,b-a)$ sempre permite o cálculo do mdc, enquanto que para calcular o mdc via uma fatoração simultânea precisamos descobrir divisores primos dos números dados, e isto realmente pode ser uma tarefa muito complicada. Não está convencido? Tente calcular $mdc(398\,549\,358\ ,\ 398\,549\,415)$.

Utilizando sucessivamente a igualdade $mdc(a,b) = mdc(a,b-a)$, o cálculo do mdc desejado pode ser efetuado do seguinte modo.

$mdc(1203, 3099) = mdc(1203, 3099 - 1203) = mdc(1203, 1896) =$

$mdc(1203, 1896) = mdc(1203, 1896 - 1203) = mdc(1203, 693) =$

$mdc(693, 1203) = mdc(693, 1203 - 693) = mdc(693, 510) =$

$mdc(510, 693) = mdc(510, 693 - 510) = mdc(510, 183) =$

$mdc(183, 510) = mdc(183, 510 - 183) = mdc(183, 327) =$

$mdc(183, 327) = mdc(183, 327 - 183) = mdc(183, 144) =$

$mdc(144, 183) = mdc(144, 183 - 144) = mdc(144, 39) = 3.$

Na próxima seção veremos que é possível acelerar o método que acabamos de exemplificar para o cálculo do mdc. Antes disso, veja que a propriedade $mdc(a, b) = mdc(a, b-a)$ permite mostrar que dois números consecutivos sempre são relativamente primos. De fato,

$$mdc(n, n+1) = mdc(n, n+1-n) = mdc(n, 1) = 1.$$

Antes de ver esta propriedade como você calcularia, por exemplo, $mdc(51834, 51835)$?

4.2 Cálculo do mdc: algoritmo de Euclides–parte 2

O Algoritmo de Euclides está explicado de um modo mais adequado para os alunos do grupo G1,1 no vídeo 9 do canal picobmep no YouTube. Neste vídeo o algoritmo é apresentado e demonstrado de um modo mais informal, sem o uso excessivo de álgebra. Dependendo da turma somente a explicação dada neste vídeo pode ser suficiente. Entretanto, no vídeo 21 é apresentada uma demonstração formal e completa do Algoritmo de Euclides. Pode ser que este vídeo não seja adequado a todos os alunos do grupo G1,1. Mesmo assim fica a sugestão para os alunos interessados em aprender cada vez mais.

No que segue apresentamos uma proposta de como o estudo do algoritmo de Euclides pode ser desenvolvido em um turma de alunos do grupo G1,1.

Na seção anterior vimos que se $a < b$ então $mdc(a, b) = mdc(a, b - a)$, e também vimos que esta propriedade permite que o mdc seja calculado, uma vez que trocamos a e b por números cada vez menores. Agora veremos que este processo pode ser acelerado.

Para ficar mais claro o que será feito, vamos analisar novamente o exercício 2 da seção anterior.

$$mdc(18, 60) = mdc(18, 60 - 18) = mdc(18, 42) =$$

$$mdc(18, 42 - 18) = mdc(18, 24) = mdc(18, 24 - 18) = mdc(18, 6).$$

Neste desenvolvimento a propriedade $mdc(a, b) = mdc(a, b - a)$ foi utilizada 3 vezes consecutivas, sendo que de 60 retiramos por 3 vezes o número 18. Assim, do cálculo do $mdc(18, 60)$ chegamos no cálculo do $mdc(18, 60 - 3 \cdot 18) = mdc(18, 60 - 54) = mdc(18, 6)$. Observando bem, utilizamos a igualdade $60 - 3 \cdot 18 = 6$, ou seja, $60 = 3 \cdot 18 + 6$, que nada mais é do que o algoritmo da divisão de 60 por 18. Portanto identificamos 6 como o resto da divisão de 60 por 18 e percebemos que, neste exemplo, trocamos o cálculo do mdc entre 18 e 60 pelo cálculo do mdc entre 18 e o resto da divisão de 60 por 18.

De modo análogo, na resolução do exercício 3 passamos por

$$mdc(51, 136) = mdc(51, 136 - 51) = mdc(51, 85) =$$

$$mdc(51, 85 - 51) = mdc(51, 34)$$

onde a propriedade $mdc(a, b) = mdc(a, b-a)$ foi utilizada duas vezes consecutivas: do cálculo do $mdc(51, 136)$ chegamos em $mdc(51, 136 - 2 \cdot 51) = mdc(51, 136 - 102) = mdc(51, 34)$. Da igualdade $136 - 2 \cdot 51 = 34$ identificamos 34 como o resto da divisão de 136 por 51 e concluímos que o mdc entre 51 e 136 é igual ao mdc entre 51 e o resto da divisão de 136 por 51.

Generalizando, aplicando consecutivamente a propriedade $mdc(a, b) = mdc(a, b - a)$, podemos subtrair de b múltiplos de a até, evidentemente, ainda termos números positivos. E, como fazemos isto até obter o menor número possível, de fato, chegamos em $r = b - aq$, resto da divisão de b por a. Estas observações demonstram a seguinte propriedade, que é uma generalização do que foi feito na seção anterior e que, como veremos, acelera o cálculo do mdc.

Propriedade: Se $a < b$ são números naturais e se r é o resto da divisão de b por a, então $mdc(a, b) = mdc(a, r)$.

De modo alternativo, pelas propriedades aritméticas do resto de uma divisão, observe que se d é um divisor comum de a e b, então d é um divisor comum de a e $r = b - aq$. Assim, de fato, é possível mostrar que o conjunto dos divisores comuns de a e b é igual ao conjunto dos divisores comuns de a e $r = b - aq$, em que r é o resto da divisão de b por a. Verifique esta propriedade na solução do seguinte exercício.

Exercício 5: Se $a = 84$ e $b = 330$ calcule o resto r da divisão de b por a, calcule os conjuntos $D(a)$, $D(b)$ e $D(r)$ dos divisores de a, de b e de r, e verifique que $D(a) \cap D(b) = D(a) \cap D(r)$.

Solução. Dividindo b por a obtemos $330 = 3 \cdot 84 + 78$, de modo que $r = 78$ é o resto da divisão de b por a.

$D(a) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84\}$

$D(b) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 11, 15, 22, 30, 33, 55, 66, 110, 165, 330\}$

$D(r) = \{1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78\}$

Calculando os divisores comuns:

$$D(a) \cap D(b) \; = \; \{1, 2, 3, 6\} \; = \; D(a) \cap D(r).$$

Daí, como o conjunto dos divisores comuns de a e b é igual ao conjunto dos divisores comuns de a e r, tomando o maior dos elementos, concluímos que $mdc(a, b) = mdc(a, r)$.

Vamos ver agora alguns exercícios que nos mostram que a propriedade que acabamos de discutir pode ser utilizada para acelerar o cálculo do *mdc*.

Exercício 6: Calcule $mdc(162, 372)$.

Solução.

- Dividindo 372 por 162 obtemos $372 = 2 \cdot 162 + 48$. Assim $mdc(162, 372) = mdc(162, 48)$.
- Dividindo 162 por 48 obtemos $162 = 3 \cdot 48 + 18$. Daí $mdc(48, 162) = mdc(48, 18)$.
- Dividindo 48 por 18 obtemos $48 = 2 \cdot 18 + 12$ e portanto $mdc(18, 48) = mdc(18, 12)$.
- Dividindo 18 por 12 obtemos $18 = 1 \cdot 12 + 6$ e assim $mdc(12, 18) = mdc(12, 6)$.
- Portanto $mdc(162, 372) = mdc(6, 12) = 6$.

Pode ser interessante comparar esta resolução com aquela que deveria ser feita pelo método da seção anterior, quando aplicamos apenas a propriedade $mdc(a, b) = mdc(a, b - a)$.

$$mdc(162,372) = mdc(162,372-162) = mdc(162,210) =$$
$$mdc(162,210) = mdc(162,210-162) = mdc(162,48) =$$
$$mdc(48,162) = mdc(48,168-48) = mdc(48,114) =$$
$$mdc(48,114) = mdc(48,114-48) = mdc(48,66) =$$
$$mdc(48,66) = mdc(48,66-48) = mdc(48,18) =$$
$$mdc(18,48) = mdc(18,48-18) = mdc(18,30) =$$
$$mdc(18,30) = mdc(18,30-18) = mdc(18,12) =$$
$$mdc(12,18) = mdc(12,18-12) = mdc(12,6) = 6.$$

Exercício 7: Calcule $mdc(339,1407)$.

Solução.

- Dividindo 1407 por 339 obtemos $1407 = 4 \cdot 339 + 51$. Assim $mdc(339,1407) = mdc(339,51)$.
- Agora dividimos 339 por 51, obtendo $339 = 6 \cdot 51 + 33$. Daí $mdc(51,339) = mdc(51,33)$.
- Dividindo 51 por 33 obtemos quociente 1 e resto 18. Daí $mdc(33,51) = mdc(33,18)$.
- Dividindo 18 por 33 obtemos quociente 1 e resto 15. Logo $mdc(18,33) = mdc(18,15)$.
- Dividindo 18 por 15 obtemos quociente 1 e resto 3, de modo que $mdc(15,18) = mdc(15,3)$.

Observar que o quociente 4 na divisão de 1407 por 339 significa que podemos aplicar quatro vezes consecutivas a propriedade $mdc(a,b) =$

$mdc(a, b-a)$, subtraindo quatro vezes 339 de 1407, caso se quisesse calcular este mdc como na seção anterior. Observe:

$$mdc(339, 1407) = mdc(339, 1407-339) = mdc(339, 1068) =$$

$$mdc(339, 1068) = mdc(339, 1068-339) = mdc(339, 729) =$$

$$mdc(339, 729) = mdc(339, 729-339) = mdc(339, 390) =$$

$$mdc(339, 390) = mdc(339, 390-339) = mdc(339, 51).$$

Isto explica porque trocando b pelo resto da divisão de b por a aceleramos o cálculo do mdc.

Exercício 8: Calcule $mdc(2282, 7063)$.

Solução.

- Dividindo 7063 por 2282 obtemos $7063 = 3 \cdot 2282 + 217$. Assim $mdc(2282, 7063) = mdc(2282, 217)$.
- Dividindo 2282 por 217 obtemos $2282 = 10 \cdot 217 + 112$. Logo $mdc(217, 2282) = mdc(217, 112)$.
- Dividindo 217 por 112 obtemos $217 = 1 \cdot 112 + 105$ e assim $mdc(112, 217) = mdc(112, 105)$.
- Dividindo 112 por 105 obtemos $112 = 1 \cdot 105 + 7$ de modo que $mdc(105, 112) = mdc(105, 7)$.

Exercício 9: Utilizando o Algoritmo de Euclides calcule:

(a) $mdc(1287, 2782)$.

(b) $mdc(2616, 3240)$.

(c) $mdc(1598, 14909)$.

4.3 Propriedades e exercícios

O objetivo desta seção é apresentar mais algumas propriedades do *mdc* e do *mmc*. Apesar de algumas destas propriedades poderem ser apresentadas como em um livo texto, outras podem ser exploradas em resoluções de exercícios, sendo experimentadas em situações numéricas e depois abstraídas para o caso geral. A seguir apresentamos, então, na forma de exercícios, uma lista com as principais propriedades do *mdc* e do *mmc* que podem ser exploradas neste encontro e também no Fórum Hotel de Hilbert.

Observamos que nesta parte de aritmética, cálculo com restos, *mmc* e *mdc*, só utilizamos números inteiros positivos. Desse modo, esta é uma hipótese que está presente em todos os exercícios propostos.

Exercício 10: Verifique cada uma das seguintes propriedades.

(a) $mdc(0, b) = b$.

(b) $mdc(1, b) = 1$.

(c) $mmc(a, a) = mdc(a, a) = a$.

(d) $mdc(a, b) \leq a$ e $mdc(a, b) \leq b$.

(e) $mmc(a, b) \geq a$ e $mmc(a, b) \geq b$.

Exercício 11: Se b é um múltiplo de a, determine $mdc(a, b)$ e $mmc(a, b)$.

Solução. Diretamente das definições de *mdc* e de *mmc* pode-se concluir que $mdc(a, b) = a$ e $mmc(a, b) = b$. Relacione este exercício com os itens (d) e (e) do exercício anterior.

Exercício 12: Neste exercício vamos ver que o $mmc(a, b)$ sempre é um múltiplo do $mdc(a, b)$. Você já tinha reparado nisto? Verifique esta afirmação testando para $a = 252$ e $b = 980$. Agora tente apresentar um argumento geral, mostrando que para quaisquer a e b, $mmc(a, b)$ é um múltiplo do $mdc(a, b)$.

Solução. Vamos calcular, usando uma fatoração simultânea, o $mdc(252, 980)$ e o $mmc(252, 980)$. Para isto usamos o processo prático para o cálculo do mmc, marcando com um quadradinho, em cada linha, o fator primo que divide os dois números da linha.

$$\begin{array}{rr|c}
252\ , & 980 & \boxed{2} \\
126\ , & 490 & \boxed{2} \\
63\ , & 245 & 3 \\
21\ , & 245 & 3 \\
7\ , & 245 & 5 \\
7\ , & 49 & \boxed{7} \\
1\ , & 7 & 7 \\
1\ , & 1 &
\end{array}$$

Considerando somente os números marcados obtemos $mdc(252, 980) = 2^2 \cdot 7 = 28$ e considerando todos os números obtemos $mmc(252, 980) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 = 8\,820$. Como $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 = (2^2 \cdot 7) \times (3^2 \cdot 5 \cdot 7)$, isto é, $8820 = 28 \times 315$, constatamos que, neste exemplo, o mmc é um múltiplo do mdc.

De modo geral, o mmc sempre vai ser um múltiplo do mdc. De fato, observando o cálculo exemplificado acima, para calcular o mmc multiplicamos vários números primos: todos os que aparecem à direita da barra vertical. Entre estes, aparecem aqueles que devem ser multiplicados para gerar o mdc: somente aqueles marcados com um quadradinho à direita da barra vertical. Portanto, o mmc pode ser escrito como um produto de dois números: o mdc (produto dos números dentro dos quadradinhos) e o produto dos números que não aparecem dentro dos quadradinhos. Isto significa que o *mmc* é um múltiplo do *mdc*.

De modo alternativo, podemos mostrar que o *mmc* é um múltiplo do *mdc* do seguinte modo. Lembre que se a e b estão fatorados como um produto de primos, pegamos os fatores com os maiores expoentes para formar o *mmc* e pegamos os fatores com menores expoentes para formar o *mdc*. Deste modo, se p é um fator primo do *mdc*, então o expoente de p no *mdc* é menor do que ou igual ao expoente de p no *mmc*. Isto implica que cada fator primo do *mmc* é um fator primo do *mdc*, só que no *mmc* os expoentes são maiores, implicando que o *mmc* é um múltiplo do *mdc*.

De outro modo ainda, sejam dados números a e b. Então $mdc(a,b)$ é um divisor de a, de modo que $a = x \cdot mdc(a,b)$. Como $mmc(a,b)$ é um múltiplo de a, também podemos escrever $mmc(a,b) = y \cdot a$. Daí

$$mmc(a,b) = y \cdot a = y \cdot (x \cdot mdc(a,b)) = (xy) \cdot mdc(a,b).$$

Como x e y são números inteiros, isto significa que $mmc(a,b)$ é um múltiplo do $mdc(a,b)$.

Exercício 13: Se $A = mdc(a,b)$ e $B = mmc(a,b)$, calcule $mdc(A,B)$ e $mmc(A,B)$.

Solução. No exercício anterior vimos que o *mmc* sempre é um múltiplo do *mdc*. Deste modo, B é um múltiplo de A. Usando o exercício 11, concluímos que $mdc(A,B) = A$ e $mmc(A,B) = B$.

Exercício 14:

(a) Determine números a e b tais que $mdc(a,b) = 12$ e $mmc(a,b) = 90$.

(b) Determine números a e b tais que $mdc(a,b) = 12$ e $mmc(a,b) = 168$.

Solução.

(a) Como o mmc é um múltiplo do mdc, para que existam tais a e b, obrigatoriamente $mmc(a, b) = 90$ deve ser um múltiplo de $mdc(a, b) = 12$. Como isso não ocorre para os números dados, podemos concluir que não existem números a e b tais que $mdc(a, b) = 12$ e $mmc(a, b) = 90$. Agora, olhando para as fatorações $12 = 2^2 \cdot 3$ e $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, isto também fica evidente. Por exemplo, no fator primo 2, o menor expoente deve aparecer no mdc e o maior expoente deve aparecer no mmc. Observe que isto está invertido nos números dados.

(b) Como 168 é um múltiplo de 12, podemos pegar $a = 12$ e $b = 168$, pois sendo um múltiplo do outro, pelo exercício 11, vemos que $mdc(a, b) = a = 12$ e $mmc(a, b) = b = 168$.

Será que esta é a única solução deste exercício? E se $a = 24 = 2^3 \cdot 3$ e $b = 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$? Curioso, não é?

Exercício 15:

(a) Quais são os valores possíveis para $mdc(7, b)$?

(b) E para os valores de $mdc(31, b)$?

(c) Se p é um número primo, quais são os possíveis valores de $mdc(p, b)$?

Solução. Se p é um número primo, como 7 e 31, então os únicos divisores de p são 1 e p. Como $mdc(p, b)$ é um divisor de p, concluímos que este mdc só pode ser igual a 1 ou p. Mais ainda, $mdc(p, b) = 1$ no caso de p não ser um fator primo de b, ou $mdc(p, b) = p$ no caso de p ser um fator primo de b.

Exercício 16: Se $a = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ e $b = 2^4 \cdot 5 \cdot 7^3$, liste os divisores comuns de a e de b. Em seguida determine o $mdc(a, b)$ e verifique que todos os divisores comuns de a e de b também são divisores do $mdc(a, b)$. Por fim, tente apresentar um argumento geral para este fato, mostrando que um divisor comum de a e b também é um divisor do $mdc(a, b)$. (Compare com o exercício 8 do encontro 3.)

Solução. Se d é um divisor de a, os únicos fatores primos de d são 2, 3 e 5. Se d é um divisor de b, os únicos fatores primos de d são 2, 5 e 7. Daí, se d é um divisor comum de a e b, fazendo a interseção, vemos que os únicos fatores primos de d são 2 e 5. Assim $d = 2^x \cdot 5^y$. O número x não pode ser maior que 3 e 4, que são os expoentes do fator primo 2 nas fatorações de a e de b. Logo, no máximo podemos pegar $x = 3$. De modo análogo, o número y não pode ser maior que 1 e 2, expoentes do fator primo 5 nas fatorações de a e de b e assim, no máximo podemos pegar $y = 1$. Assim, vemos que $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $y \in \{0, 1\}$. Fazendo todas as possibilidades, podemos listar os divisores comuns de a e de b.

$$x = 0 \text{ e } y = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 2^0\, 5^0 = 1.$$

$$x = 0 \text{ e } y = 1 \quad \Rightarrow \quad d = 2^0\, 5^1 = 5.$$

$$x = 1 \text{ e } y = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 2^1\, 5^0 = 2.$$

$$x = 1 \text{ e } y = 1 \quad \Rightarrow \quad d = 2^1\, 5^1 = 10.$$

$$x = 2 \text{ e } y = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 2^2\, 5^0 = 4.$$

$$x = 2 \text{ e } y = 1 \quad \Rightarrow \quad d = 2^2\, 5^1 = 20.$$

$$x = 3 \text{ e } y = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 2^3\, 5^0 = 8.$$

$$x = 3 \text{ e } y = 1 \quad \Rightarrow \quad d = 2^3\, 5^1 = 40.$$

Desta lista de divisores comuns vemos que $mdc(a, b) = 40$. Neste exercício, como no caso geral, vemos que um divisor comum de a e de b tem os mesmos fatores primos que o $mdc(a,b)$. Só que no $mdc(a,b)$ os expoentes destes fatores primos são os maiores possíveis, implicando que qualquer divisor comum de a e b também é um divisor do $mdc(a,b)$.

Exercício 17: Liste todos os divisores comuns de 1560 e 1848.

Solução. Pelo que foi visto no exercício anterior, todos os divisores comuns de 1560 e 1848 são divisores do $mdc(1560, 1848)$. Então para resolver o exercício basta calcular este mdc e em seguida basta listar todos os seus divisores.

$$\begin{array}{rr|l} 1560\ , & 1848 & 2 \\ 780\ , & 924 & 2 \\ 390\ , & 462 & 2 \\ 195\ , & 231 & 3 \\ 65\ , & 77 & \end{array}$$

Como $65 = 5 \cdot 13$ e $77 = 7 \cdot 11$ são relativamente primos, paramos o processo e concluímos que $mdc(1560, 1848) = 2^3 \cdot 3 = 24$. Portanto os divisores comuns de 1560 e 1848 são $D(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.

Exercício 18: Calcule $mdc(15 \cdot 42\ ,\ 15 \cdot 78)$.

Solução. Vamos aplicar o processo prático para o cálculo do mdc, dividindo os números dados por divisores em comum.

$$\begin{array}{rr|l} 15 \cdot 42\ , & 15 \cdot 78 & 15 \\ 42\ , & 78 & 2 \\ 21\ , & 39 & 3 \\ 7\ , & 13 & \end{array}$$

Como 7 e 13 são primos entre si, paramos o processo e concluímos que o mdc procurado é igual a $15 \times 2 \times 3 = 15 \times 6$.

Observe que, a partir da segunda linha do cálculo acima, realizamos, de fato, o cálculo do $mdc(42, 78) = 6$. Assim, podemos concluir que $mdc(15 \cdot 42\ ,\ 15 \cdot 78) = 15 \cdot mdc(42, 78)$. Generalizando, deste mesmo modo pode-se demonstrar que

$$mdc(n \cdot a, n \cdot b) = n \cdot mdc(a, b).$$

Observamos que a igualdade acima e uma igualdade análoga para o mmc estão demonstradas no vídeo 26.

Exercício 19: Se $a = 2^4 \cdot 5^2$ e $b = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^2$ calcule $mmc(a, b)$ e $mdc(a, b)$. Em seguida calcule os produtos $a \times b$ e $mmc(a, b) \times mdc(a, b)$. Comparando estes dois produtos dá para perceber alguma semelhança? É possível generalizar a sua observação?

Solução. Considerando os maiores expoentes obtemos $mmc(a, b) = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^2$, e considerando os menores expoentes obtemos $mdc(a, b) = 2^3 \cdot 5^2$. Efetuando os produtos, obtemos:

- $mmc(a, b) \times mdc(a, b) = (2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^2) \times (2^3 \cdot 5^2)$.
- $a \times b = (2^4 \cdot 5^2) \times (2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^2)$.

Percebe-se que estes produtos são iguais porque ambos são multiplicações de mesmos fatores. E de modo geral, para quaisquer a e b, $mmc(a, b) \times mdc(a, b) = a \times b$. De fato, se um número primo p aparece elevado à potência α na fatoração de a e ele aparece elevado a β na fatoração de b, então no produto $a \times b$ teremos $p^\alpha \cdot p^\beta$. Este mesmo produto também aparece em $mmc(a, b) \times mdc(a, b)$ pois a maior potência de p aparece no mmc e a menor potência de p aparece no mdc. Deste modo, para quaisquer dois números naturais a e b,

$$mmc(a, b) \times mdc(a, b) \ = \ a \times b.$$

Observamos que a igualdade acima está formalmente demonstrada no vídeo 25. Dê uma olhada. Estude esse vídeo e aprenda ainda mais sobre as propriedades do *mdc* e do *mmc*.

Exercício 20: Calcule $mmc(1271, 1302)$.

Solução. Como $1271 = 31 \cdot 41$ e $1302 = 31 \cdot 42$, se você tentar listar os múltiplos de 1271 e os múltiplos de 1302 vai demorar muito até aparecer um múltiplo comum. Nestes casos é mais fácil calcular primeiramente o *mdc* e em seguida utilizar a identidade ilustrada no exercício anterior para calcular o *mmc* desejado. Então vamos calcular $mdc(1271, 1302)$. Pelo algoritmo de Euclides, dividindo 1302 por 1271 obtemos quociente 1 e resto 31, de modo que $mdc(1271, 1302) = mdc(1271, 31)$. Dividindo 1271 por 31 obtemos quociente 41 e resto zero, de modo que $mdc(31, 1271) = mdc(31, 0) = 31$. Portanto $mdc(1271, 1302) = 31$. Usando a identidade do exemplo anterior obtemos

$$mmc(1271, 1302) = \frac{1271 \times 1302}{mdc(1271, 1302)} = \frac{1271 \times 1302}{31} = \frac{1\,654\,842}{31} = 53\,382.$$

Exercício 21: (Banco de Questões 2010, nível 1, problema 141) O produto de dois números de dois algarismos cada é 1728. Se o máximo divisor comum deles é 12, quais são estes números?

Solução. Como 12 é o *mdc* dos dois números e cada um tem dois algarismos, os únicos candidatos são os múltiplos de 12 menores do que 100, ou seja, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84 e 96. Como $1728 = 12 \cdot 12 \cdot 12 = 2^6 \cdot 3^3$, os múltiplos 60 (com fator 5) e 84 (com fator 7) não são divisores de 1728. Também $1728 \div 12 = 144$ e $1728 \div 96 = 18$, de modo que a lista reduz a 24, 36, 48 e 72, com $24 \times 72 = 36 \times 48 = 1728$. Como o *mdc* de 24 e 72 é 24, temos uma única solução, a saber, 36 e 48, cujo produto é 1728 e o *mdc* é 12.

Exercício 22: (Banco de Questões 2010, nível 1, problema 165) Quais são os seis números de dois algarismos cujo máximo divisor comum é o maior possível? Solução. Designemos por d o máximo divisor comum dos seis números. Então, estes seis números de dois algarismos são múltiplos distintos de d e podemos reformular a pergunta: queremos saber qual é o maior número d que possui seis múltiplos distintos menores do que 100. Note que d, $2d$, $3d$, $4d$, $5d$ e $6d$ são todos múltiplos de d. Logo, a melhor situação possível é quando estes seis números são os múltiplos considerados. Para isto, é preciso que $6d \leq 99$. dividindo 99 por 6, obtemos o quociente 16 e o resto 3, ou seja, $99 = 6 \cdot 16 + 3$. Logo, $d = 16$. Portanto, os seis números de dois algarismos cujo mdc é o maior possível são 16, 32, 48, 64, 80 e 96. O mdc destes seis números é 16.

Exercício 23: Determine dois números a e b tais que $mmc(a, b) = 150$ e $a + b = 80$.

Solução. Como $mmc(a, b) = 150$ é um múltiplo de a e de b, segue que a e b são divisores de 150. O conjunto dos divisores de 150 é

$$D(150) \ = \ \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150\}.$$

As únicas possibilidade de dois números deste conjunto cuja soma é 80 são $5 + 75 = 80$ e $30 + 50 = 80$. Mas $mmc(5, 75) = 75$ e $mmc(30, 50) = 150$. Portanto os números procurados são 30 e 50.

Exercício 24: Determine o inteiro positivo n tal que os restos das divisões de 4933 e 4435 por n são respectivamente 37 e 19.

Solução. Se 37 é o resto da divisão de 4933 por n, então o resto da divisão de $4933 - 37 = 4896$ por n é igual a zero. Isto significa que o número 4896 é um múltiplo de n. Analogamente, pode-se concluir que o número $4435 - 19 = 4416$ também é um múltiplo de n. Assim n é um divisor comum dos números 4896 e 4416 e, portanto, n é um divisor do $mdc(4416, 4896)$. Vamos aplicar o algoritmo de Euclides para calcular este mdc.

- Dividindo 4896 por 4416 obtemos quociente 1 e resto 480. Assim $mdc(4416, 4896) = mdc(4416, 480)$.
- Dividindo 4416 por 480 obtemos quociente 9 e resto 96 de modo que $mdc(480, 4416) = mdc(480, 96)$.
- Dividindo 480 por 96 obtemos quociente 5 e resto 0. Daí $mdc(96, 480) = mdc(96, 0) = 96$.

Os divisores de 96 são $D(96) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96\}$. Como o resto da divisão de 4933 por n é igual a 37, podemos concluir que $37 < n$. Daí, como n também é um divisor de 96, vemos que as únicas possibilidades são $n = 48$ e $n = 96$.

Referências Bibliográficas

[1] HEFEZ, Abramo, *Iniciação à Aritmética*, Apostila 1 – PIC – OBMEP.

[2] FOMIN, Dmitri e GENKIN, Sergey e ITENBERG, Ilia, *Círculos Matemáticos – a experiência russa*, IMPA, 2010.

[3] WAGNER, Eduardo, *Paridade*, Edição Especial 2006 da Revista Eureka!.

[4] DUTENHEFNER, Francisco e CADAR, Luciana, *Encontros de Geometria*, Apostila do PIC – OBMEP.

[5] FEITOSA, Samuel Barbosa e DO ASCIMENTO JÚNIOR, Einstein, *Par ou ímpar? Eis a questão*, Revista Eureka!, número 31.

[6] COUTINHO, Severino Collier, *Criptografia*, Apostila 7 – PIC – OBMEP.

[7] Provas anteriores da OBMEP.

[8] Bancos de Questões da OBMEP.