Axiomas de Congruência

A partir das noções de medida de segmentos e de ângulos são introduzidos os conceitos de congruência de segmentos, ângulos e triângulos. São apresentados, também, teoremas que dão condições suficientes para a congruência de triângulos.

Axiomas sobre congruência de segmentos, ângulos e triângulos
... definem o conceito de congruência ou "igualdade" de segmentos de retas, triângulos e ângulos.

Definição. Dois segmentos são congruentes se eles têm a mesma medida.

Definição. Dois ângulos são congruentes se eles têm a mesma medida.

Observação. Usamos o termo congruentes, e não iguais, para distinguir do termo "igual", que significa, matematicamente, o "mesmo objeto matemático".

Indicamos congruência entre segmentos (ângulos) AB e CD ($\angle A$ e $\angle B$) escrevendo $AB \equiv CD$ ($\angle A \equiv \angle B$); assim, $AB \equiv CD \iff AB = CD$ ($\angle A \equiv \angle B \iff \angle A = \angle B$). E fácil ver que a relação $\equiv$ satisfaz as seguintes propriedades:

i) (reflexiva) $AB \equiv AB$.

ii) (simétrica) Se $AB \equiv CD$, então $CD \equiv AB$.

iii) (transitiva) Se $AB \equiv CD$ e $CD \equiv EF$, então $AB \equiv EF$. Assim, a relação de congruência entre segmentos é uma relação de equivalência.

Definição. Dois triângulos ABC e XYZ são congruentes se existe uma aplicação bijetora.

$$\varphi : \{A, B, C\} \longrightarrow \{X, Y, Z\}$$

com a seguinte propriedade: se $X = \varphi(A)$, $Y = \varphi(B)$ e $Z = \varphi(C)$ então

$$\angle A \equiv \angle X,\ \angle B \equiv \angle Y,\ \angle C \equiv \angle Z,$$
$$AB \equiv XY\ ,\ AC \equiv XZ,\ BC \equiv YZ.$$

A aplicaÇÃo φ é chamada de congruência.

Os vértices A e X, B e Y, C e Z são ditos correspondentes. Angulos correspondentes são aqueles cujos vértices são correspondentes, e lados correspondentes são os lados cujas extremidades são vértices correspondentes.
Se os triângulos ABC e XYZ são congruentes, escrevemos $ABC \equiv XYZ$, significando que a congruência leva A em X, B em Y e C em Z.

O axioma seguinte estabelece a existência de triângulos congruentes.

Axioma: Sejam ABC um triângulo e r' uma semirreta. Existe um triângulo $A'B'C'$, congruente ao triângulo ABC, tal que A' coincide com a origem de r', o vértice B' pertence a r' e C' é um ponto contido num dos semiplanos definidos pela reta r que contém r'.

O lema seguinte nos fala sobre a existência de segmentos congruentes.

Lema. (Transporte de segmentos) Sejam AB um segmento e r' uma semirreta. Existe um único segmento $A'B'$ contido em r' onde A' coincide com a origem de r' e tal que $A'B' \equiv AB$.

Prova: (Existência) Tome um ponto C que não pertence à reta AB (tal ponto existe?) determinando o $\triangle ABC$. Pelo axioma anterior, existe um triângulo$A'B'C'$, congruente ao triângulo ABC, tal que A' coincide com a origem de r', o vértice B' pertence à r' e C' é um ponto num dos semiplanos definidos pela reta r que contém r'. Pela definição de congruência de triângulos, $A'B' \equiv AB$.

(Unicidade) Suponhamos que, além do ponto B' obtido acima, tal que $A'B' \equiv AB$, possamos marcar outro ponto B" pertencente a r', $B" \neq B'$, tal que $A'B" \equiv AB$. Dos três pontos A', B', B", um deve estar entre os outros dois; ele não pode ser A', pois B' e B" não são separados pela origem da semirreta. Se é B' que está entre A' e B", então $A'B" = A'B' + B'B"$, e daí $B'B" = 0$ o que é impossível, pois $B" \neq B'$. Assim, B' não está entre A' e B". Conclusão análoga obteremos supondo que B" está entre A' e B'. Isto éuma contradição; logo, $B' = B"$ e, daí, temos concluída a prova da unicidade.

O lema seguinte nos fala sobre a existência de ângulos congruentes.

Lema.(Transporte de ângulos) Sejam AÔB um ângulo e r' uma semirreta. Existe um único ângulo A'Ô'B', em que o vértice O' coincide com a origem de r', um lado coincide com r' e A'Ô'B' $\equiv$ AÔB .

Axioma: Se dois triângulos ABC e XYZ são tais que $AB \equiv XY$, $\angle A \equiv \angle X$ e $AC \equiv XZ$, então $ABC \equiv XYZ$.

O axioma acima é conhecido como Primeiro Caso de Congruência de Triângulos ou simplesmente, caso LAL.

Observação. Param verificarmos a congruência de dois triângulos temos que verificar seis relações: congruência dos três pares de lados correspondentes e congruência dos três pares de ângulos correspondentes. No entanto, o axioma anterior afirma que é suficiente verificar apenas três delas, isto é:

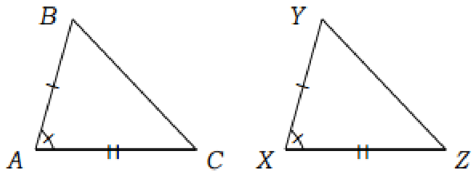


Figure 1: O Caso LAL de congruência de triângulos.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} \equiv \overline{XY}\\ \overline{AC} \equiv \overline{XZ}\\ \hat{A} \equiv \widehat{X}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\overline{AB} \equiv \overline{XY}, \overline{AC} \equiv \overline{XZ}, \overline{BC} \equiv \overline{YZ} \text{ e}\\ \hat{A} \equiv \widehat{X}, \widehat{B} \equiv \widehat{Y}, \widehat{C} \equiv \widehat{Z}.\end{array}\right.$$

Os resultados que seguem são consequências diretas, ou indiretas, do axioma anterior.

Teorema. (Segundo Caso de Congruência de Triângulos ou caso ALA) Dois triângulos ABC e XYZ são congruentes se $AB \equiv XY$, $\angle A \equiv \angle X$ e $\angle B \equiv \angle Y$.

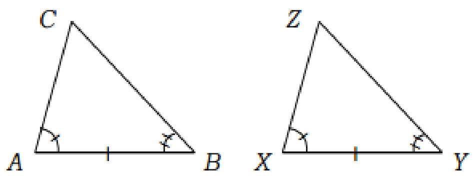


Figure 2: O Caso ALA de congruência de triângulos.

Prova: Sejam ABC e XYZ triângulos tais que $AB \equiv XY$, $\angle A \equiv \angle X$ e $\angle B \equiv \angle Y$. Seja D um ponto da semirreta AC tal que $AD \equiv XZ$ (existe este ponto?). Consideremos o triângulo ABD e comparando com o triângulo XYZ. Uma vez que $AD \equiv XZ$, $AB \equiv XY$ e $\angle A \equiv \angle X$, pelo axioma segue que $ABD \equiv XYZ$. Concluímos daí que $\angle ABD \equiv \angle Y$. Logo $\angle ABD \equiv \angle ABC$.

Decorre daí que as semiretas BD e BC coincidem. Logo, pelo teorema, os pontos C e D coincidem, e então os triângulos ABC e ABD também coincidem e, portanto, $ABC \equiv ABD$. Como $ABD \equiv XYZ$, pela transitividade da relação $\equiv$ segue que $ABC \equiv XYZ$.

A seguir, definimos alguns conceitos que serão úteis para fixar linguagem sobre triângulos.

Definição.

(a) Um triângulo que tem dois lados congruentes é dito isósceles. O vértice comum a esses dois lados é chamado vértice do triângulo isóceles, os lados congruentes são chamados laterais e o terceiro lado é chamado base. Os ângulos adjacentes à base são chamados ângulos da base.

(b) Um triângulo que tem os três lados congruentes é chamado equilátero.

(c) Um triângulo que tem um ângulo reto é chamado retângulo. Os lados que definem o ângulo reto são chamados catetos e o terceiro lado é chamado hipotenusa do triângulo.

Seja ABC um triângulo e D um ponto da reta determinada por B e C.

Definição.

(a) Se D for o ponto médio do segmento BC, o segmento AD é chamado mediana do $\triangle ABC$ relativamente ao lado BC (ao vértice A).

(b) Se D é tal que $S_{(AD)}$ divide o ângulo CAB em dois ângulos congruentes, isto é, $\angle CAD \equiv \angle DAB$, dizemos que AD é bissetriz do ângulo $\angle A$.

(c) Se D é tal que a reta determinada por A e D é perpendicular à reta determinada por B e C, dizemos que AD é altura do $\triangle ABC$ relativamente ao lado BC (ou ao vértice A).

Teorema. Em qualquer triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

Prova: Seja ABC um triângulo isósceles em que $AB \equiv AC$. Queremos provar que $\angle B \equiv \angle C$. Para isso vamos comparar o triângulo ABC com ele mesmo, definindo a seguinte lei de correspondência:

$$\varphi : \{A, B, C\} \to \{A, B, C\}$$

tal que $\varphi(A) = A$, $\varphi(B) = C$ e $\varphi(C) = B$.

Por hipótese $AB \equiv AC$ e $AC \equiv AB$. Como $\angle A \equiv \angle A$, segue, pelo axioma , que esta correspondência define uma congruência, isto é, $ABC \equiv ACB$. Logo, $\angle B \equiv \angle C$.

Teorema. Se um triângulo tem dois ângulos congruentes, então ele é isósceles.

Teorema. (Terceiro Caso de Congruência de Triângulos ou caso LLL) Dois triângulos são congruentes se eles têm os lados correspondentes congruentes.

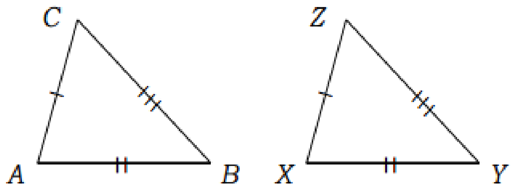


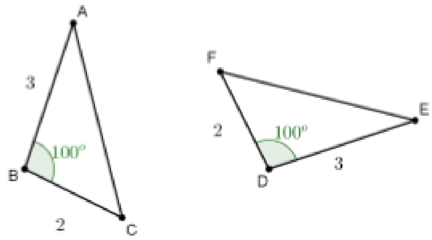
Figure 3: O Caso LLL de congruência de triângulos.

Prova: Sejam ABC e XYZ dois triângulos tais que $AB \equiv XY$, $AC \equiv XZ$ e $BC \equiv YZ$. Mostremos que $ABC \equiv XYZ$. Consideremos a semirreta $S_{(AB)}$ e escolhamos o semiplano definido pela reta determinada por A e B e oposto àquele que contém o vértice C. Construamos um ângulo com vértice A, congruente ao ângulo X, tendo por lados $S_{(AB)}$ e uma semirreta r' contida no semiplano escolhido acima. A partir de A, marquemos em r' um ponto D tal que $AD \equiv XZ$.

Como $AB \equiv XY$ (por hipótese), $AD \equiv XZ$ (por construção) e $\angle DAB \equiv \angle X$ (por construção), temos que $ADB \equiv XZY$. Consideremos o segmento CD; como $AD \equiv XZ \equiv AC$ e $DB \equiv ZY \equiv CB$, os triângulos ADC e DBC são isósceles. Segue, daí, que $\angle ADB \equiv \angle ACB$. Pelo axioma, temos que $ADB \equiv ACB$. Mas havíamos provado que $ADB \equiv XZY$ logo $ACB \equiv XZY$ ou $ABC \equiv XYZ$.

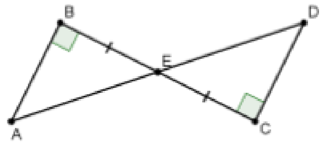
Exercícios:

1.Os triângulos abaixo são congruentes pelo caso LAL. Determine os lados homólogos e os vértices correspondentes desta congruência.

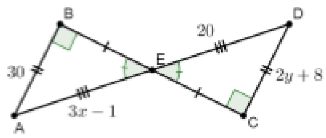


Solução: Os pares de lados homólogos são AB e DE, AC e EF, BC e DF; e os pares de vértices correspondentes são A e E, B e D, C e F.

2. Na figura, temos $AB = 30$, $DE = 20$, $AE = 3x - 1$ e $CD = 2y + 8$. Determine os valores de x e y.

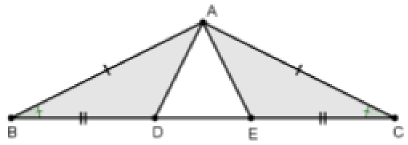


Solução: Como $\angle ABE = \angle DCE = 90°$, $BE = CE$ e $\angle BEA \equiv \angle CED$, pois são opostos pelo vértice, então $\triangle ABE \equiv \triangle DCE$, pelo caso ALA. Igualando os lados homólogos temos $2y + 8 = 30$, segue que $y = 11$, e $3x - 1 = 20$, segue que $x = 7$.

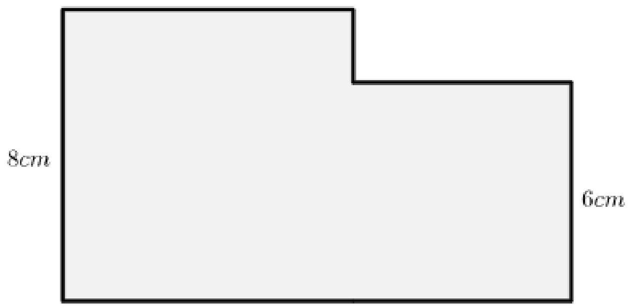


3. No triângulo isósceles $\triangle ABC$, de base BC, marcamos sobre o lado BC os pontos D e E, de maneira que $BD \equiv EC$. Mostre que $\triangle ADB \equiv \triangle AEC$.

Solução: Se $\triangle ABC$ é isósceles de base BC, então $AB \equiv AC$ e $\angle ABC \equiv \angle ACB$. Por construção, $BD = EC$. Sendo assim, pelo caso LAL, $\triangle ADB \equiv \triangle AEC$.



4. A figura a seguir mostra uma "escadinha" formada por dois quadrados, um de lado $8cm$ e um de lado $6cm$. A tarefa é cortar a figura em três pedaços e reagrupá-los para formar um quadrado sem buracos.



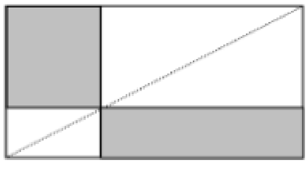
a) Qual o lado do quadrado que deverá ser formado no final? *Solução 7:* Cortando a escada para formar um quadrado

(a) Como o quadrado não deve ter buracos, a área final deve ser igual à área original. Se chamarmos de L o lado do quadrado,temos:

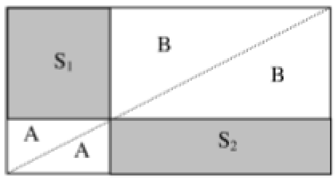
$$L^2 = 82 + 62$$
$$L^2 = 64 + 36$$
$$L^2 = 100$$
$$L = 10$$

.

5. Observe a figura a seguir. Por um ponto da diagonal do retângulo foram traçadas paralelas a seus lados. Mostre que as áreas dos retângulos sombreados são iguais.

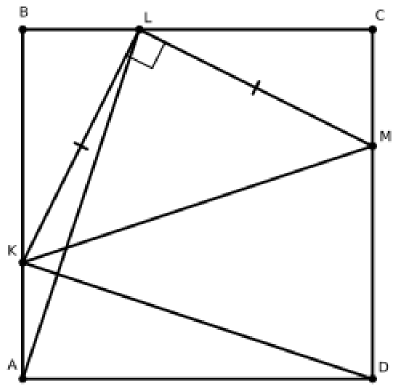


Solução 8: A diagonal de um retângulo divide esse retângulo em dois triângulos congruentes, portanto de mesma área.



Observando a figura acima e sendo S_1 e S_2 as áreas dos dois retângulos sombreados, devemos ter $S_1 + A + B = S_2 + A + B$ e, portanto, $S_1 = S_2$.

6.Na figura abaixo, $ABCD$ é um quadrado e os pontos K, L e M estão sobre os lados AB, BC e CD de modo que $\triangle KLM$ é um triângulo isósceles retângulo em L. Prove que AL e DK são perpendiculares.



Solução: Sejam $\angle MLC = \alpha$ e $\angle BAL = \beta$. Como $\angle KLM = \angle KBL = LCM = 90°$, segue que $\angle KLB = \angle LMC = 90° - \alpha$. Além disso, como $KL = LM$, os triângulos retângulos $\triangle LMC$ e $\triangle BLK$ são congruentes. De $BL = CM$ e $BK = LC$,segue que

$$AK = AB - BK = BC - LC = BL.$$

Os triângulos $\triangle KAD$ e $\triangle ABL$ são congruentes pois $AK = BL$, $AB = AD$ e $\angle ABL = \angle KAD$. Consequentemente, $\angle ADK = \beta$ e $\angle LAD = 90 \circ - \angle BAL = 90° - \beta$. Como os ângulos $\angle LAD$ e $\angle KDA$ são complementares,segue finalmenteque AL e KD são perpendiculares.