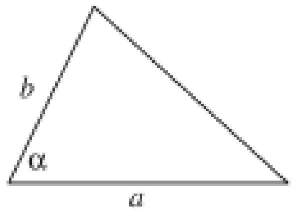
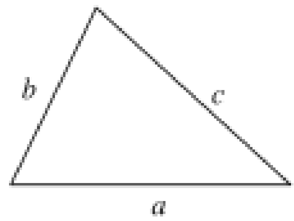
$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \text{sen}\alpha$$



3. Quando os três lados são conhecidos, calcular a altura ou um dos ângulos dá algum trabalho. Nesse momento, a fórmula de Heron é ótima (não daremos aqui a demonstração dela).

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

onde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$



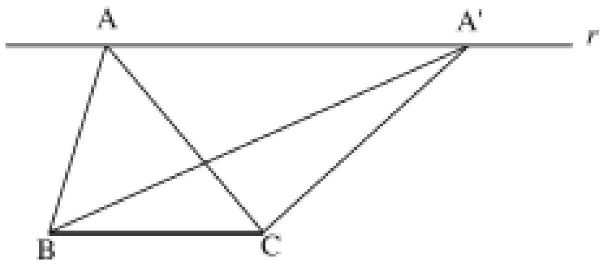
Vamos tratar agora do mais importante: as propriedades.

2.1 Propriedades Importantes

Propriedade 1

A área de um triângulo não se altera quando sua base permanece fixa e o terceiro vértice percorre uma reta paralela à base.

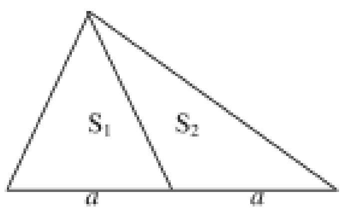
"principal"
2010/4/19
page 26
Estilo OBME



Na figura acima, a reta r é paralela a BC. Os triângulos ABC e $A'BC$ têm mesma área, pois possuem mesma base e mesma altura.

Propriedade 2

Em um triângulo, uma mediana divide sua área em partes iguais.



$S_1 = S_2$

De fato, os dois triângulos interiores possuem mesma base e mesma altura. Logo, possuem mesma área.

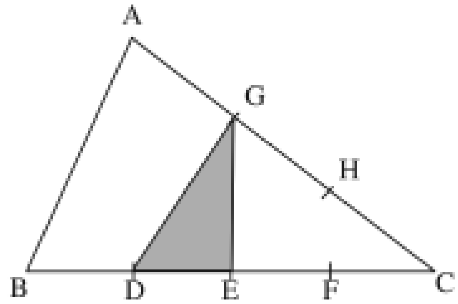
Quando duas figuras possuem mesma área, dizemos que elas são equivalentes. Portanto, o enunciado desta propriedade pode ser: "Uma mediana divide o triângulo em dois outros equivalentes."

Antes de prosseguir com as propriedades, vamos resolver dois exercícios cujos enunciados não são comuns nos livros didáticos atuais.

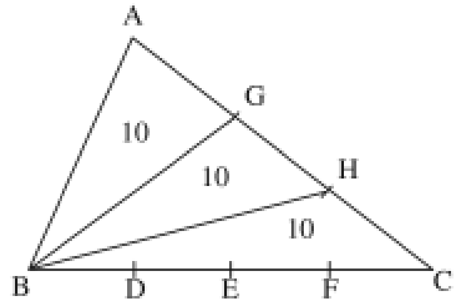
"principal"
2010/4/19
page 27
Estilo OBMEP

Exercício 1

O triângulo ABC da figura abaixo tem área igual a 30. O lado BC está dividido em quatro partes iguais, pelos pontos D, E e F, e o lado AC está dividido em três partes iguais pelos pontos G e H. Qual é a área do triângulo GDE?

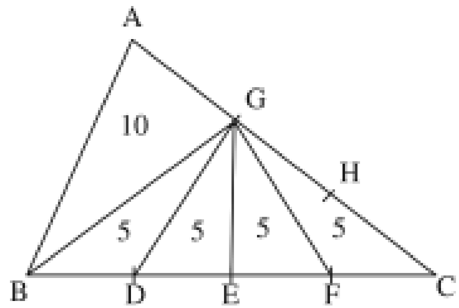


Solução: Observe o triângulo ABC com as cevianas BG e BH.



Pela propriedade 2 os triângulos BAG, BGH e BHC têm mesma área. Cada um tem, portanto, área igual a 10 e o triângulo BGC tem área igual a 20.

Observe agora o triângulo BGC com as cevianas GD, GE e GF.

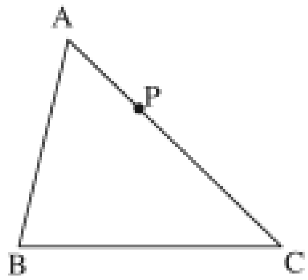


Pela mesma propriedade, os triângulos GBD, GDE, GEF e GFC têm mesma área. Logo, cada um deles tem área 5. A área do triângulo GDE é igual a 5.

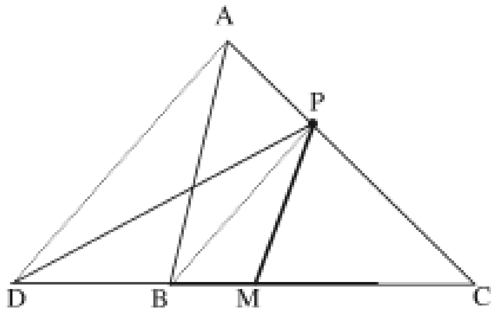
Repare que a solução do problema não necessitou de fórmulas. Uma propriedade simples e convenientemente aplicada resolveu a questão. Vamos ver outro problema.

Exercício 2

É dado um triângulo ABC e um ponto P do lado AC mais próximo de A que de C. Traçar uma reta por P que divida o triângulo ABC em duas partes de mesma área.



Solução: Façamos o seguinte. Trace BP e uma paralela a BP por A que encontra a reta BC em D.

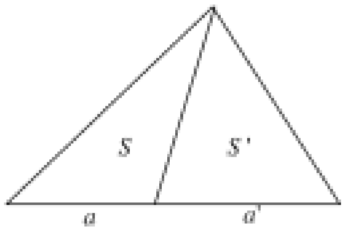


Os triângulos ABP e DBP têm áreas iguais pela propriedade 1. Assim, o triângulo PDC tem mesma área que o triângulo ABC. Mas, tomando o ponto médio M de DC, a reta PM divide PDC em duas partes de mesma área (propriedade 2). Logo, PM divide também ABC em duas partes de mesma área.

Vamos continuar com mais duas propriedades importantes.

Propriedade 3

Se dois triângulos têm mesma altura, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases. A afirmação acima tem comprovação imediata a partir da fórmula que calcula a área do triângulo.

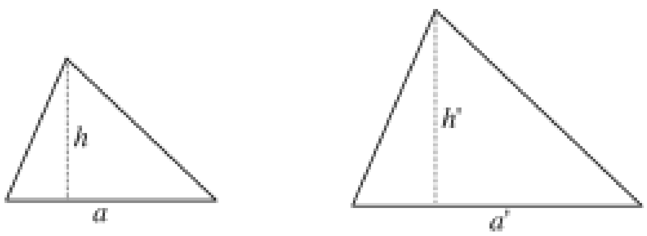


$$\frac{S}{S'} = \frac{a}{a'}$$

Propriedade 4

A razão entre as áreas de triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Observe, na figura a seguir, dois triângulos semelhantes com bases a e a' e alturas h e h'.



Como são semelhantes, a razão entre as bases é a mesma razão entre as alturas. Esse número é a razão de semelhança das duas figuras:

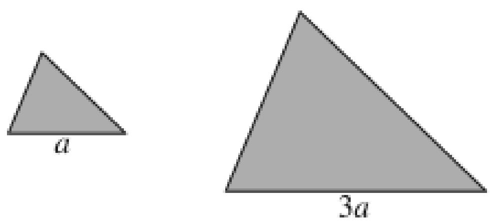
$$k = \frac{a}{a'} = \frac{h}{h'}.$$

Porém, se S e S' são as áreas dos dois triângulos temos:

$$\frac{S}{S'} = \frac{ah/2}{a'h'/2} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{h}{h'} = k \cdot k = k^2.$$

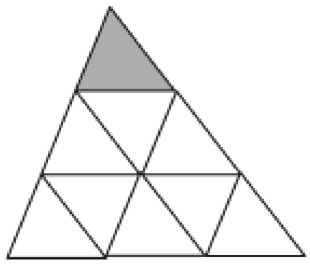
Vejamos um exemplo simples.

Os dois triângulos da figura abaixo são semelhantes. Se a área do menor é igual a 8, qual é a área do maior?



Para esta pergunta, alunos têm uma tendência irresistível de responder rapidamente que a área do triângulo maior é 24. Porém, isto não é verdade. A razão de semelhança dos dois triângulos é $k = 1/3$ e, portanto, a razão entre suas áreas é $1/9$. Daí, se a área do menor é igual a 8, a área do maior é 72.

Você pode ver esta relação na figura a seguir. Realmente, o triângulo pequeno cabe 9 vezes dentro do grande.



A propriedade 4, que mostramos para triângulos, vale naturalmente para polígonos, pois estes podem ser divididos em triângulos. Mas, é importante saber que esta propriedade vale para quaisquer figuras semelhantes.

A razão entre as áreas de figuras semelhantes quaisquer é igual ao quadrado da razão de semelhança.

O exercício a seguir, caiu em um vestibular da FGV-RJ.

Exercício 3

Em algum momento, na primeira metade do século passado, uma pessoa chamada Afrânio tinha um valioso terreno desocupado, perto do centro da cidade do Rio de Janeiro. Com a urbanização da cidade, ruas novas foram abertas e o terreno de Afrânio ficou reduzido a um triângulo ABC, retângulo em B, ainda de grande valor, pois o lado AB media 156 metros. Pois bem, Afrânio morreu e em seu testamento os advogados encontraram as instruções para dividir o terreno "igualmente" entre seus dois filhos. Era assim: "um muro deve ser construído perpendicularmente ao lado AB, de forma que os dois terrenos resultantes da divisão tenham mesmo valor; o que

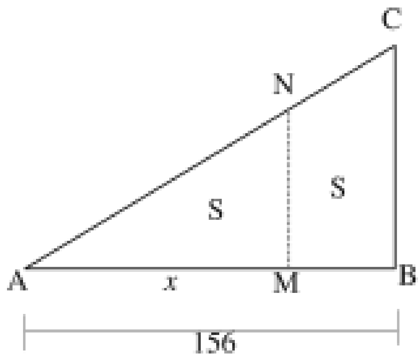
"principal"
2010/4/19
page 33
Estilo OBME

tem a forma de um trapézio será do meu filho mais velho e o outro será do mais novo".

Os advogados concluíram que os terrenos deviam ter mesma área, pois o testamento dizia que deveriam ter mesmo valor. Mas não foram capazes de decidir em que posição deveria ficar o muro. Conta meu avô que o episódio ganhou as páginas dos jornais por vários dias, com leitores opinando de diversas maneiras sobre a posição correta do muro. Ele falava e se divertia muito com as opiniões absurdas mas, ao mesmo tempo, me instigava a resolver o problema. E o problema retorna para vocês.

Em que posição, relativamente ao lado AB do terreno, o muro deve ser construído?

Solução:



Na figura acima, MN é o muro que deve ser construído perpendicularmente ao lado AB. Seja $AM = x$, de forma que o triângulo AMN e o trapézio $MBCN$ tenham mesma área S. Os triângulos AMN e ABC são semelhantes e a razão de semelhança entre eles é $x/156$.

Como a razão entre suas áreas é o quadrado da razão de semelhança devemos ter:

$$\frac{S}{2S} = \left(\frac{x}{156}\right)^2.$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados ficamos com

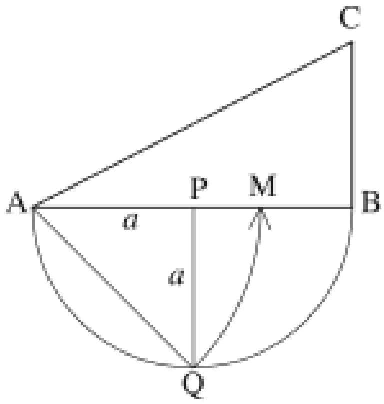
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{156}$$

o que dá $x = 78\sqrt{2} \cong 110$. Temos a solução. O muro deve ser construído a 110 metros de A. As áreas dos dois terrenos serão iguais e Afrânio ficará feliz em ver sua vontade atendida.

A construção geométrica do exercício 3

Acabamos de resolver o problema da divisão do terreno em duas partes de mesma área. Mas como poderemos fazer isto utilizando apenas a régua e o compasso? Imagine que o engenheiro tem a planta do terreno e deseja desenhar o muro na posição exata, sem contas, sem aproximações. Vamos ver como se faz isto.

Resolva o problema novamente considerando AB$= 2a$. Você vai encontrar $AM = a\sqrt{2}$. Faça então o seguinte. Pelo ponto P, médio de AB trace uma perpendicular PQ a AB de comprimento a como na figura seguinte:

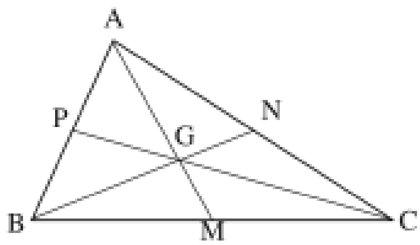


Como $AQ = a\sqrt{2}$, transfira com o compasso essa medida para a reta AB, encontrando a posição exata de M.

Exercício 4

As medianas de um triângulo dividem esse triângulo em 6 outros triângulos. Mostre que todos têm mesma área.

Solução: Representemos por (ABC) a área de um triângulo ABC.



Seja $(ABC) = S$. O ponto de interseção das medianas é G, o baricentro. Sabemos que $BG = 2/3 \cdot BN$. Logo,

$$(ABC) = \frac{2}{3}(ABN) = \frac{2}{3} \cdot \frac{S}{2} = \frac{S}{3}.$$

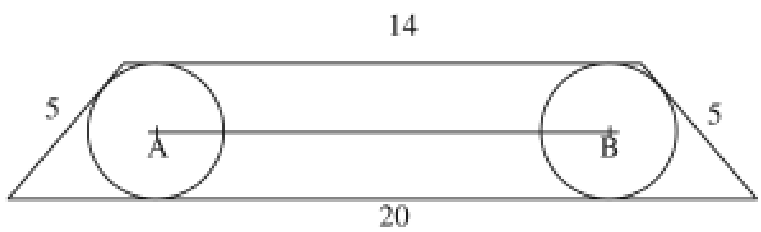
Analogamente, $(BCG) = (CAG) = S/3$. Mas GP é mediana no triângulo ABG. Daí, $(APG) = (BPG) = S/6$. Assim, os seis triângulos têm área $S/6$.

Usando Áreas

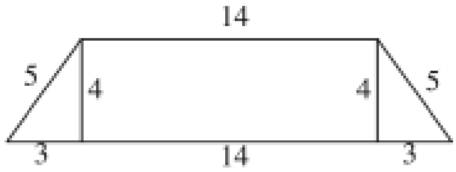
O estudante pensa, em geral, que um problema sobre áreas significa sempre calcular a área de alguma figura. Na verdade não é só isso. A ferramenta "área" pode ser usada na solução de diversos problemas de geometria plana de aparência algo complicada. Veja um exemplo.

Exercício 5

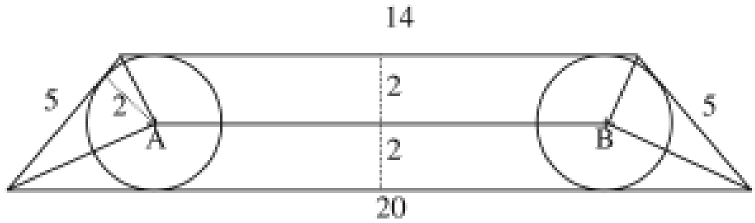
A figura a seguir mostra um trapézio com bases medindo 20 cm e 14 cm e com os outros dois lados medindo 5 cm cada um. Duas circunferências com centros A e B são tangentes às bases, uma ao lado esquerdo e outra ao lado direito. Pergunta-se qual é o comprimento do segmento AB.



Solução: Vamos inicialmente calcular a altura do trapézio, que é o diâmetro de cada circunferência. Dividindo o trapézio em um retângulo e dois triângulos retângulos iguais, temos a evidente situação seguinte:



A altura do trapézio mede 4 cm e o raio de cada circunferência mede 2 cm. Vamos agora ligar os dois vértices da esquerda ao ponto A e os dois vértices da direita ao ponto B. Vemos agora o trapézio original dividido em dois outros trapézios e dois triângulos iguais.



Lembrando que a área do trapézio é o produto da base média pela altura e observando que os dois triângulos de vértices A e B têm base igual a 5 e altura igual a 2, vamos escrever a equação que diz que a soma das áreas dessas quatro figuras é igual à área do trapézio original. Fazendo $AB = x$, temos:

$$\frac{(20+x)\cdot 2}{2} + \frac{(14+x)\cdot 2}{2} + 2\cdot\frac{5\cdot 2}{2} = \frac{(20+14)\cdot 4}{2}.$$

Isto dá $x = 12$, resolvendo nosso problema.

É claro que outra forma de resolver pode ser conseguida com outros meios. O que desejamos enfatizar é que a ferramenta "área" muitas vezes é útil para resolver problemas diversos. Nesse caso, ela propiciou uma solução limpa e elegante.

2.2 Número π

O número π é a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. Esta razão dá sempre o mesmo valor, ou seja, independe da circunferência, porque duas circunferências quaisquer são semelhantes. Todas as circunferências são semelhantes entre si. Se C é o comprimento da circunferência de raio R, então por definição:

$$\frac{C}{2R} = \pi.$$

Mas, o que é o comprimento de uma circunferência? Nós sabemos o que é o comprimento de um segmento, mas temos apenas uma ideia intuitiva do que seja o comprimento de uma circunferência. Podemos pensar em passar um barbante bem fino em volta da circunferência, esticá-lo e medir seu comprimento com uma régua. Isto dá uma boa ideia do que seja o comprimento da circunferência, mas este método experimental permite apenas avaliar (com pouca precisão) essa medida. Vamos tornar mais preciso este conceito.

O comprimento da circunferência é, por definição, o número real cujas aproximações por falta são os perímetros dos polígonos regu-