Ciclo 6 – Encontro 3

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Nível 3
PO: Márcio Reis
11° Programa de Iniciação Científica Jr.

A aritmética dos restos

- Apostila 8 do PIC da OBMEP “Uma Introdução às Construções Geométricas”, Eduardo Wagner.

  Capítulo 3: Expressões Algébricas.

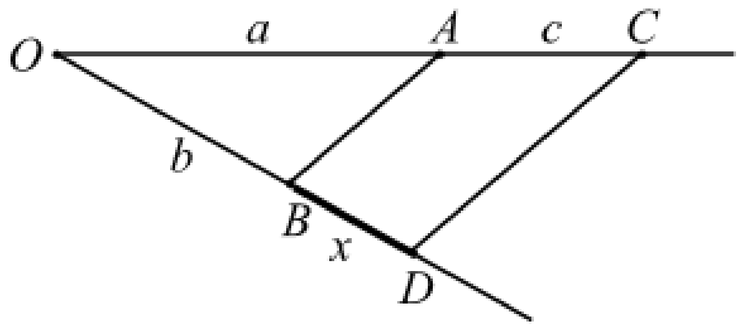
  - 3.1 A 4ª proporcional
  - 3.2 $\sqrt{a^2 \pm b^2}$
  - 3.3 $\boldsymbol{a\sqrt{n},\ n}$ **natural**
  - 3.4 A média geométrica
  - 3.5 A equação do segundo grau
  - 3.6 Expressões homogêneas.
  - 3.7 Construções com Segmento Unitário

A 4ª proporcional

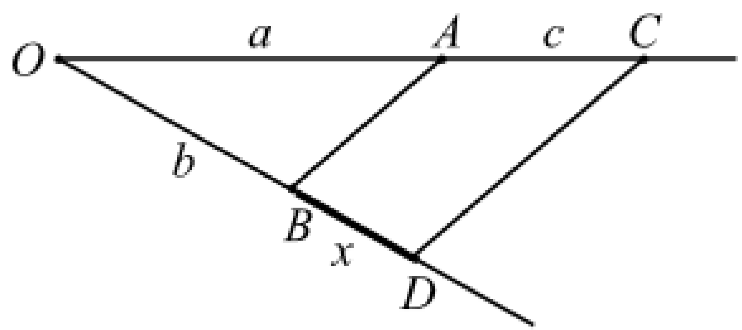
Dados os segmentos a, b e c dizemos que o segmento x é *quarta proporcional* desses segmentos quando:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Esta relação de proporcionalidade já aparece no século 5 $a.C.$ e sua construção é feita com o argumento do teorema de Tales.



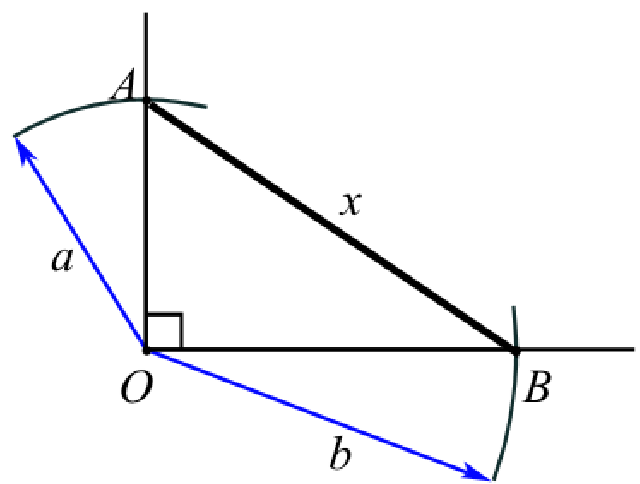
A 4ª proporcional



Sobre um ângulo qualquer de vértice O tomemos sobre um lado os segmentos $OA = a$ e $AC = c$ e, sobre o outro lado, $OB = b$. Traçando por C uma paralela à reta AB determinamos D na semirreta OB. O segmento $BD = x$ é a solução da equação.

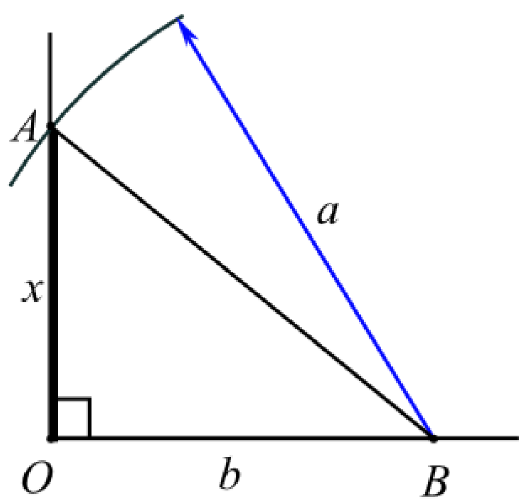
$\sqrt{a^2+b^2}$

Sejam a e b segmentos dados. Se $x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$ então x é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são a e b. Basta então construir duas semirretas perpendiculares (você pode usar os esquadros) e assinalar os segmentos $OA = a$ e $OB = b$. A hipotenusa $AB = x$ é a solução da equação.



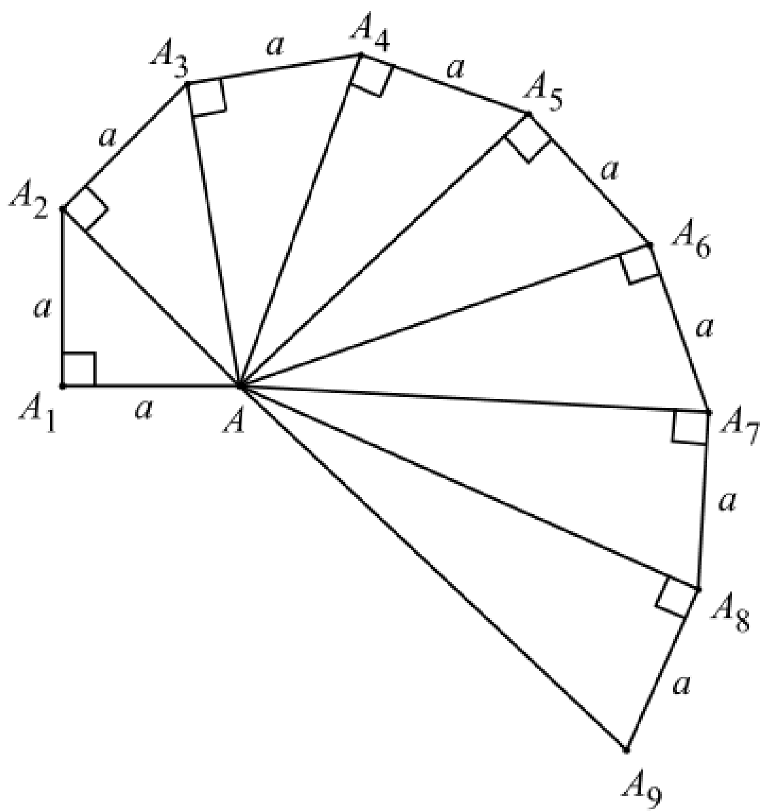
$\sqrt{a^2+b^2}$

No outro caso, se a e b são os segmentos dados e $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ então x é um cateto de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é a, sendo b o outro cateto. Para construir devemos desenhar duas semirretas perpendiculares assinalar o segmento $OB = b$ sobre uma delas e, com centro em B, desenhar um arco de raio a cortando a outra perpendicular em A. O cateto $OA = x$ é a solução da equação.



$a\sqrt{n}$, n natual

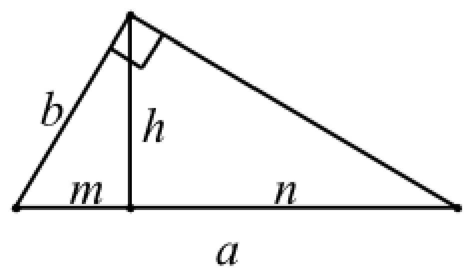
Dado um segmento a, podemos construir todos os elementos da sequência $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$, $a\sqrt{4}$, ... pela construção abaixo que é fácil de entender.



A média geométrica

Dados dois segmentos a e b, definimos a sua *média aritmética* por $m = \dfrac{a+b}{2}$ e sua *média geométrica* por $g = \sqrt{ab}$.

Para construir a média geométrica precisamos recordar duas das relações métricas no triângulo retângulo.

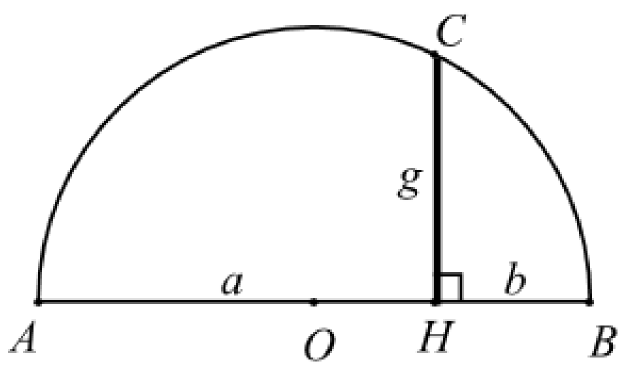


A média geométrica

As relações que utilizaremos são $h^2 = mn$ e $b^2 = am$. A primeira ($h = \sqrt{mn}$) significa que a altura relativa à hipotenusa é média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa e, a segunda ($b = \sqrt{am}$), que um cateto é média geométrica entre a hipotenusa e sua projeção sobre ela. Assim, podemos construir a média geométrica de duas formas.

A média geométrica

Construímos sobre uma reta os segmentos $AH = a$ e $HB = b$. Traçando a mediatriz de AB encontramos seu ponto médio (O) e traçamos uma semicircunferência de centro O e diâmetro AB. A perpendicular a AB traçada por H determina o ponto C na semicircunferência. Desta forma, CH é a média geométrica entre a e b, ou seja, $CH = g = \sqrt{ab}$.



Ler!

- Apostila 8 do PIC da OBMEP “Uma Introdução às Construções Geométricas”, Eduardo Wagner.

  Capítulo 3: Páginas 48 a 60

  - 3.4 A média geométrica
  - 3.5 A equação do segundo grau
  - 3.6 Expressões Homogêneas
  - 3.7 Construções com um segmento unitário

Expressões Homogêneas

Todas as expressões algébricas que apareceram até agora são homogêneas, ou seja, o resultado não depende da unidade de medida utilizada nos segmentos. Por exemplo, se a é um segmento de 3,6 cm e b é um segmento de 4,2 cm, podemos construir o segmento $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ como hipotenusa do triângulo retângulo de catetos a e b, e este segmento x é independente da unidade em que a e b foram medidos. Por outro lado, podemos perfeitamente olhar para a fórmula $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ de forma numérica, ou seja, podemos pensar que x é o resultado do cálculo $x = \sqrt{3{,}6^2 + 4{,}2^2} \simeq 5{,}53$. No exercício a seguir, dados os segmentos a e b, vamos determinar o segmento x tal que $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

Expressões Homogêneas

É claro que, se pensarmos nos segmentos a e b, esta expressão não faz o menor sentido, mas se pensarmos que a e b são os números que medem esses segmentos em alguma unidade, faz total sentido perguntar que segmento tem a medida igual a x. O curioso e, muito importante, é que esse segmento é sempre o mesmo, independente da unidade em que a e b foram medidos.

Como reconhecer expressões homogêneas?

Expressões Homogêneas

Uma expressão envolvendo segmentos a, b, c, $\ldots$ é homogênea se, quando multiplicamos cada um deles por um número $k > 0$, o resultado fica multiplicado por k.

Isto significa que o resultado é independente da escala, ou seja, com qualquer tipo de régua utilizada para medir os segmentos dados, o resultado é sempre o mesmo.

Construções com um segmento unitário

Se a é um segmento então o símbolo $\sqrt{a}$ não tem significado geométrico. Mesmo se pensarmos que a representa a medida de um segmento em certa unidade, não podemos entender, a princípio, o que significa o símbolo $\sqrt{a}$. Se em certa unidade (u) o segmento a mede 4, então $\sqrt{a}$ deve ser igual a 2. Entretanto, se outra régua estiver graduada na unidade $v = 4u$ então o segmento a mede 1 e, consequentemente, $\sqrt{a}$ deve ser também igual a 1.

Exercício 1

Dado o segmento a e o segmento unitário $u = 1$, construa $x = \sqrt[4]{a}$.

Dica: considere

$$y = \sqrt{a}$$

$$x = \sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt{y}$$

Exercício 1 - Solução

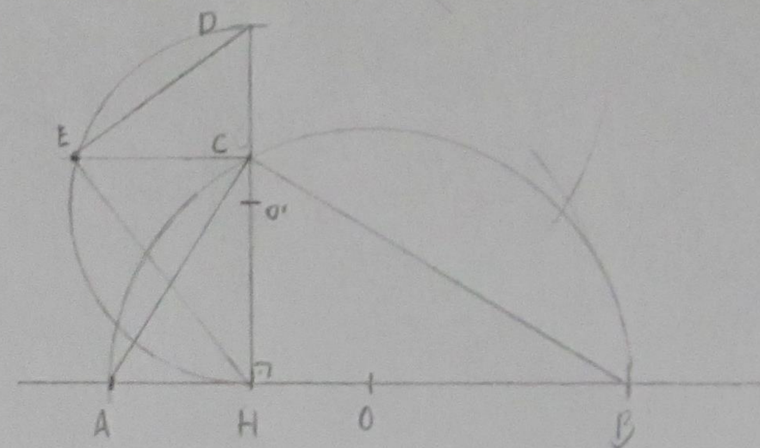
Se $y = \sqrt{a}$, então $x = \sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt{y}$. Assim, x é a média geométrica de y e u, sendo que y é a média geométrica de a e u, onde u é um segmento unitário fixado. Assim, construímos sobre uma reta os segmentos $AH = u$ e $HB = a$, com H entre A e B. Traçando a mediatriz de AB encontramos o seu ponto médio O e traçamos uma semicircunferência de centro O e diâmetro AB. A perpendicular a AB passando por H determina o ponto C na semicircunferência. Como C é um ponto da semicircunferência e AB é diâmetro da mesma, então o triângulo ABC é retângulo com ângulo reto em C e, portanto, $CH^2 = AH \cdot HB = 1 \cdot a = a$ e, logo, $CH = \sqrt{a} = y$. Sobre a reta contendo C e H construímos o segmento $CD = u$, com C entre D e H. Traçando a mediatriz de DH encontramos o seu ponto médio O' e traçamos uma semicircunferência de centro O' e diâmetro DH. A perpendicular a DH passando por C determina o ponto E na semicircunferência. Como E é um ponto da semicircunferência e DH é diâmetro da mesma, então o triângulo EDH é retângulo com ângulo reto em E e, portanto, $EC^2 = CD \cdot CH = 1 \cdot y = y$ e, logo, $EC = \sqrt{y} = x$.

Exercício 1 - Solução

$u = 1$

a

$x = \sqrt[4]{a}$



$y = \sqrt{a}$

$x = \sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt{y}$

$EC^2 = CD \cdot CH = 1 \cdot y = y \therefore EC = \sqrt{y} = x$

Exercício 2

Considere um segmento de reta AB e um ponto C interior (mais próximo de B do que de A). Dizemos que AC é o *segmento áureo* de AB quando $CB/AC = AC/AB$.

a) Desenhe um segmento de reta AB qualquer e construa o seu segmento áureo.

b) Qual é o valor da razão AC/AB?

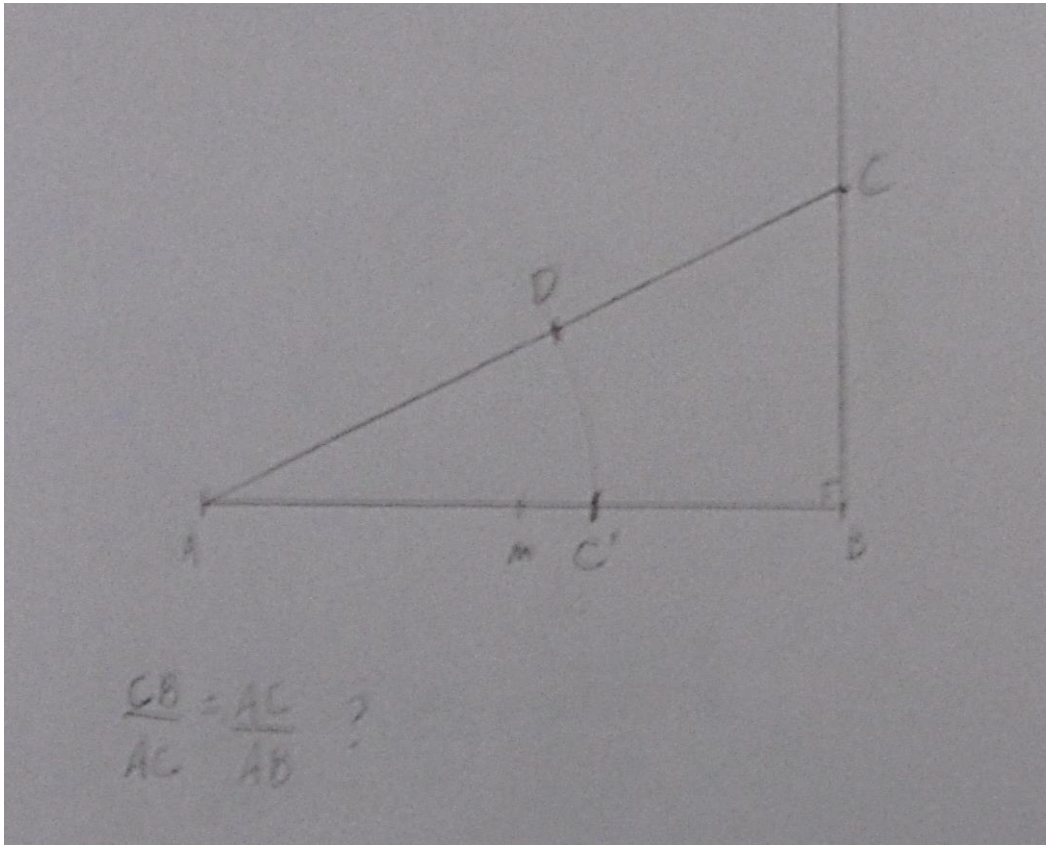
Exercício 2 - Solução

a) Desenhamos um segmento de reta $AB = a$ qualquer. Se o segmento áureo de AB é $AC = x$, então $(a-x)/x = x/a$, isto é, $x^2 + ax - a^2 = 0$ e, portanto, $x = \left(-a + \sqrt{a^2 + 4a^2}\right)/2 = \sqrt{a^2 + (a/2)^2} - a/2$. Traçando a mediatriz de AB, obtemos o ponto médio M de AB. Traçamos a perpendicular a AB passando por B e, nessa perpendicular, marcamos um ponto C tal que $BC = BM = a/2$. Como o triângulo ABC é retângulo com ângulo reto em B, então $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + (a/2)^2$ e, portanto, $AC = \sqrt{a^2 + (a/2)^2}$. Marcamos um ponto D em AC tal que $CD = BC = a/2$. Assim, $AD = AC - CD = \sqrt{a^2 + (a/2)^2} - a/2 = x$.

b) $AC/AB = x/a = \left(\left(-a + \sqrt{a^2 + 4a^2}\right)/2\right)/a = \left(\sqrt{5} - 1\right)/2$.

11º PIC Programa de Iniciação Científica da OBMEP

Exercício 2 - Solução



Exercício 3

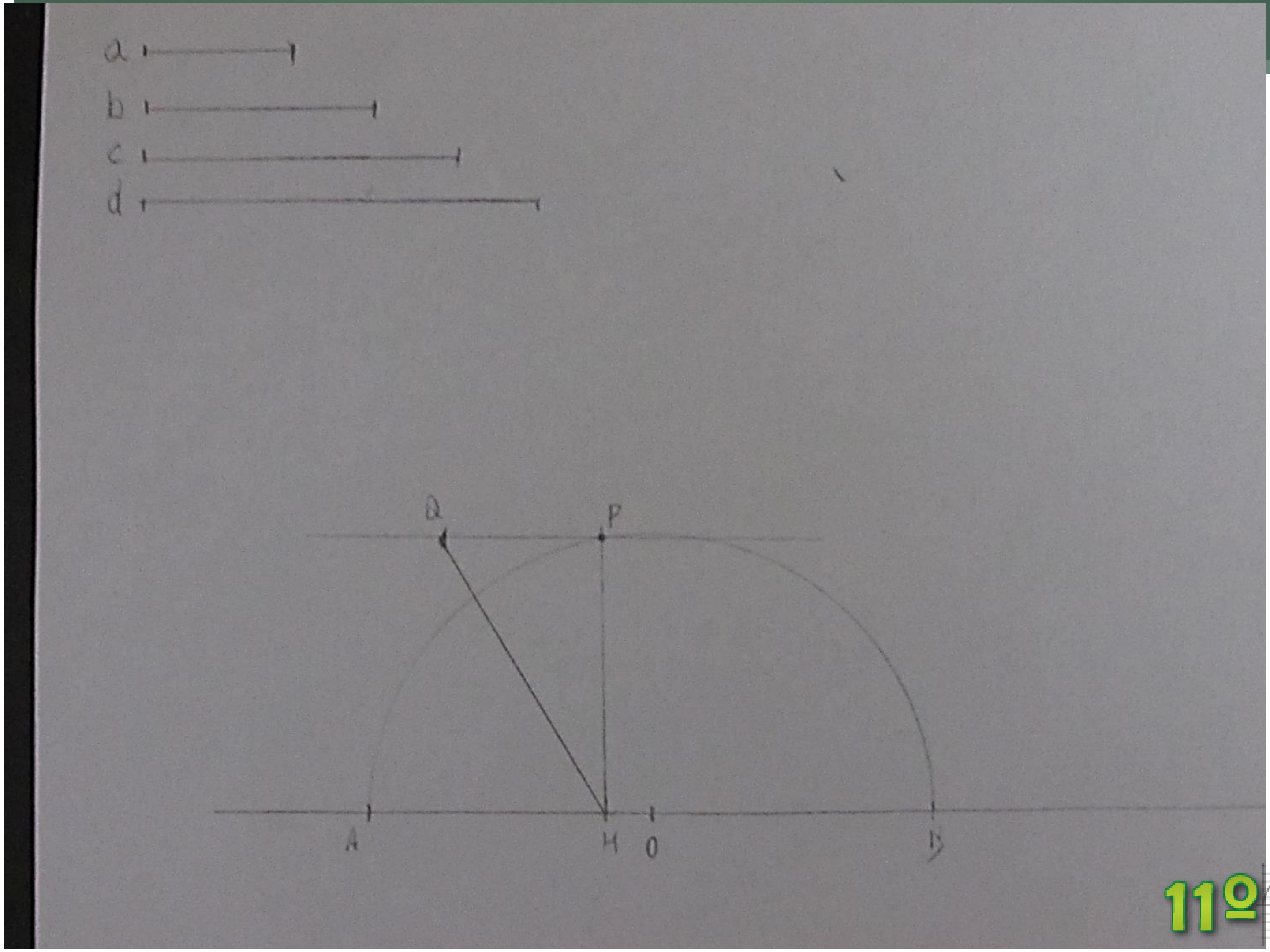
Dados os segmentos de reta a, b, c e d (à sua escolha) construa

$$x = \frac{a^2 + bc}{d}.$$

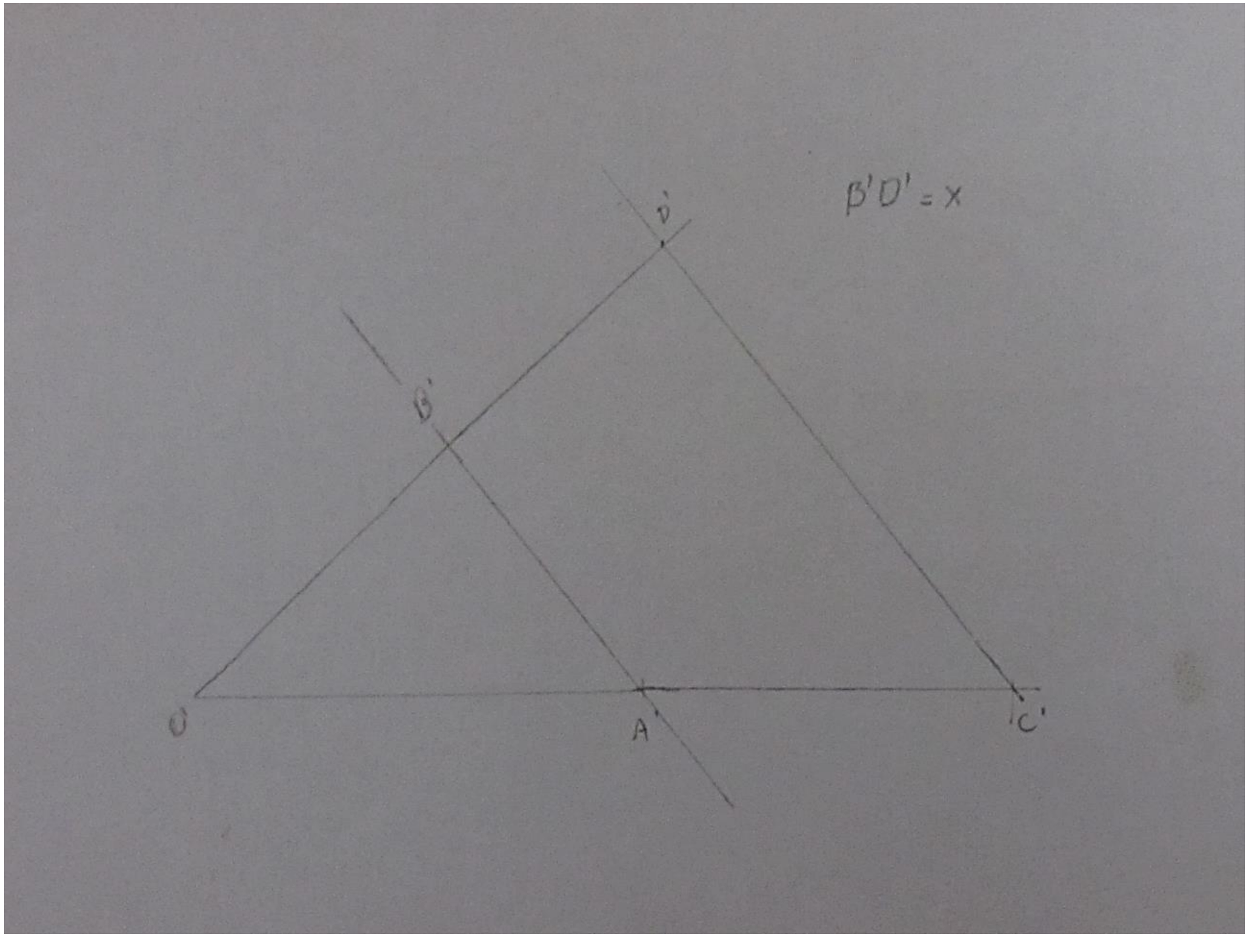
Exercício 3 - Solução

Se y é tal que $y^2 = bc$, ou seja, y é a média geométrica dos segmentos b e c, e $r = \sqrt{a^2 + y^2}$, então $x = r^2/d$, isto é, $d/r = r/x$, ou seja, x é a terceira proporcional entre os segmentos d e r. Construímos sobre uma reta os segmentos $AH = b$ e $HB = c$, com H entre A e B. Traçando a mediatriz de AB encontramos seu ponto médio O e traçamos uma semicircunferência de centro O e diâmetro AB. A perpendicular a AB passando por H intersecta a semicircunferência no ponto P. Como o triângulo ABP é retângulo com ângulo reto em P, então $HP^2 = AH \cdot HB = bc = y^2$ e, portanto, $HP = y$. Traçamos a perpendicular a HP passando por P e, sobre essa perpendicular, construímos o segmento $PQ = a$. Como o triângulo HPQ é retângulo com ângulo reto em P, então $HQ^2 = PQ^2 + HP^2$ e, como $PQ = a$ e $HP = y$, segue que $HQ^2 = a^2 + y^2 = r^2$ e, portanto, $HQ = r$. Sobre um ângulo qualquer de vértice O' tomemos sobre um dos lados $O'A' = d$ e $A'C' = r = HQ$ e, sobre o outro lado, $O'B' = r = HQ$. Traçando por C' uma paralela à reta $A'B'$, determinamos D' na semirreta $O'B'$. Pelo Teorema de Tales, $O'A'/O'B' = A'C'/B'D'$, isto é, $d/r = r/B'D'$ e, como $d/r = r/x$, segue que $B'D' = x$.

Exercício 3 - Solução



Exercício 3 - Solução



Estude!

Fiquem atentos à última avaliação online!