2.1 Divisão Euclidiana

Um dos principais objetivos deste encontro é desenvolver nos alunos a habilidade de utilizar corretamente o Algoritmo da Divisão de Euclides e de utilizá-lo na resolução de problemas. Ao ser efetuada uma divisão, por exemplo a divisão indicada abaixo de 478 por 7, obtemos quociente 68 e resto 2.

$$\begin{array}{rr|l} & 478 & 7 \\ \cline{3-3} - & 476 & 68 \\ \cline{2-2} & 2 & \end{array}$$

Isto significa que $478 = 68 \times 7 + 2$. Esta igualdade também pode ser pensada do seguinte modo. Suponhamos que você tenha 478 bolinhas e deseje separá-las em grupos de 7. Agrupando de 7 em 7 é possível organizar estas bolinhas em 68 grupos de 7 bolinhas, totalizando $68 \times 7 = 476$ bolinhas, sobrando 2 bolinhas que não podem formar um novo grupo de 7.

A partir deste exemplo, e de outros se for o caso, podemos generalizar para concluir que no Algoritmo de Euclides da divisão de a por b, encontramos um quociente q e um resto r tal que $a = q \cdot b + r$ com $0 \leq r \leq b - 1$.

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

Exercício 1: Em cada caso calcule o quociente q e o resto r da divisão de a por b. Em seguida tire a prova, verificando a igualdade $a = q \cdot b + r$.

- $a = 307$ e $b = 4$.
- $a = 1933$ e $b = 6$.
- $a = 879$ e $b = 7$.

- $a = 1045$ e $b = 11$.
- $a = 2351$ e $b = 12$.

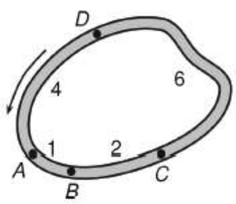
No Portal da Matemática, no 8º ano do Ensino Fundamental, no módulo "Números naturais: contagem, divisibilidade e Teorema da Divisão Euclidiana" o vídeo "Teorema da Divisão Euclidiana" apresenta o algoritmo da divisão de Euclides de uma maneira bastante interessante. Assista este vídeo e confira as suas soluções dos próximos dois exercícios.

Exercício 2: Encontre o número natural que ao ser dividido por 7 resulta um quociente 4 e resto o maior possível.

Exercício 3: Encontre os números naturais que, quando divididos por 8 deixam o resto igual ao dobro do quociente.

Observamos também que o algoritmo da divisão Euclidiana está detalhadamente explicado no vídeo 32 do canal picobmep no YouTube. Em comparação ao vídeo apresentado no Portal da Matemática, este outro é mais detalhado e mais formal. Estude este vídeo e poste suas dúvidas no Fórum Hotel de Hilbert.

Exercício 4: (OBMEP 2006 - N1Q6 - 2ª fase) A figura abaixo representa o traçado de uma pista de corrida.



Os postos A, B, C e D são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha. Por exemplo, uma corrida de 17 quilômetros pode ser realizada com partida em D e chegada em A.

(a) Quais são os postos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?

(b) E para uma corrida de 100 quilômetros, quais são estes postos?

(c) Mostre que é possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.

Solução.

(a) Uma volta completa em torno de uma pista tem extensão $1km + 2km + 6km + 4km = 13km$. Por isto, para percorrer $14km$ é preciso dar uma volta completa e percorrer mais $1km$. A única forma de percorrer $1km$ respeitando-se o sentido da corrida é começando em A e terminando em B. Portanto a corrida deve começar em A, dar uma volta completa e terminar em B.

(b) Como $100 = 7 \times 13 + 9$, uma corrida de $100km$ corresponde a dar 7 voltas completas na pista e percorrer mais $9km$. A única forma de percorrer $9km$ respeitando-se o sentido da corrida é começando em A e terminando em D. Portanto a corrida deve começar em A, dar 7 voltas completas e terminar em D.

(c) Como sugerido nos itens anteriores, a solução do problema está baseada na ideia de "dar uma certa quantidade de voltas" sem exceder o comprimento da corrida e depois localizar trechos convenientes para percorrer a "distância restante". Do ponto de vista matemático, este procedimento corresponde a efetuar o algoritmo de divisão com divisor igual a 13. Por uma inspeção direta, pode-se verificar que é possível executar qualquer corrida com comprimento igual a 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ou $12km$. Se a corrida tem comprimento um múltiplo qualquer de $13km$, podemos começar num ponto, dar um certo número de voltas, e voltar para o mesmo ponto de partida. E se a corrida tem um comprimento maior que 13, efetuamos a divisão deste número por 13. O quociente corresponde ao número de voltas e o resto é um pedaço de uma volta de comprimento de $1km$ até $12km$, que sempre pode ser percorrido, como comentamos anteriormente.

Por exemplo, se a extensão da corrida é $109 = 8 \times 13 + 5$, ela deve começar no posto D, dá 8 voltas completas, retornando então a D, e depois percorre o trecho de D a B, que tem $5km$.

Exercício 5: Na divisão de dois números inteiros, o quociente é 16 e o resto é o maior possível. Se a soma do dividendo e do divisor é 125, determine o resto.

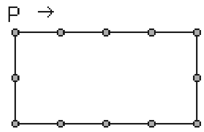
Solução. Vamos representar por a o dividendo e por b o divisor. Como o resto é o maior possível, então ele deve ser igual a $b-1$, que é o maior número permitido para o resto de uma divisão por b. Daí obtemos $a = 16b + (b-1)$, ou seja, $a = 17b - 1$. Como a soma $a + b = 125$ obtemos $(17b-1) + b = 125 \Rightarrow 18b = 126 \Rightarrow b = \dfrac{126}{18} = 7$. Portando o divisor é $b = 7$, o dividendo é $a = 17b - 1 = 118$, o quociente é 16 e o resto é 6.

2.2 Fenômenos periódicos

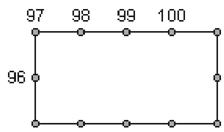
Nos próximos exercícios ilustramos como o resto de uma divisão pode ser utilizado na resolução de problemas que envolvem fenômenos periódicos.

"verfinal"
2015/3/16
page 32
Estilo OBMEP

Exercício 6: Pedro caminha ao redor de uma praça retangular onde estão dispostas 12 árvores, brincando de tocar cada árvore durante seu passeio. Se no início ele toca a árvore indicada na figura, e se ele anda no sentido da seta, indique que árvore ele estará tocando ao encostar em uma árvore pela centésima vez.



Solução. Na figura, próximo de cada árvore escreva os números 1, 2, 3, ..., correspondentes aos números de árvores tocadas por Pedro (a árvore indicada pela letra P recebe o número 1, a próxima o número 2, e assim por diante). Como existem 12 árvores na praça, na árvore indicada pela letra P estarão escritos os número 1, 13, 25, ... que são todos os números que deixam resto 1 quando divididos por 12. Dividindo 100 por 12, obtemos quociente 8 e resto 4, isto é, $100 = 8 \times 12 + 4$. Daí vemos que na centésima vez, Pedro estará tocando a árvore que está 3 posições à frente daquela indicada pela letra P.



Exercício 7: Considere a seguinte sequência de números:

1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5 ...

formada alternadamente pelos algarismos (1, 2, 3, 4, 5) e pelos algarismos (5, 4, 3, 2, 1). Qual algarismo aparece na posição 2015 nesta sequência?

Solução. Na sequência dada é importante observar que o bloco de algarismos

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2$$

fica se repetindo indefinidamente, como está ilustrado na figura a seguir:

$$\boxed{1,2,3,4,5,4,3,2}\ \boxed{1,2,3,4,5,4,3,2}\ \boxed{1,2,3,4,5,4,3,2}\ \cdots$$

Dividindo 2015 por 8 (que é a quantidade de algarismos do bloco que fica se repetindo), obtemos $2015 = 251 \times 8 + 7$. Daí, para se chegar até o algarismo da posição 2015, deve-se escrever 251 blocos de oito algarismos cada, e depois mais sete algarismos. Portanto o número que está na posição 2015 é o número da sétima posição dentro do bloco, ou seja, o número 3.

Exercício 8: Qual é o algarismo da unidade de 2^{2015} ?

Solução. Calculando as primeiras potências de 2 obtemos:

$$2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32,\ 2^6 = 64,$$

$$2^7 = 128,\ 2^8 = 256,\ 2^9 = 512$$

Observando esses números, vemos que os últimos algarismos formam uma sequência periódica: 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2 etc., em que os quatro números 2, 4, 8, 6 ficam se repetindo infinitamente. Dividindo 2015 por 4 obtemos quociente 503 e resto 3, de modo que $2015 = 503 \times 4 + 3$. Na sequência acima, os expoentes que deixam resto 3 quando divididos por 4 definem potências de 2 com último algarismo 8 ($2^3 = 8$, $2^7 = 128$ etc.). Daí o algarismo da unidade de 2^{2015} é 8.

Exercício 9: João decidiu nadar de três em três dias. O primeiro dia que ele nadou foi um sábado, o segundo dia foi uma terça-feira, o terceiro dia foi uma sexta-feira, e assim por diante. Em qual dia da semana João estará nadando pela centésima vez?

Solução. Na tabela a seguir, listamos os dias da semana que João está nadando pelas primeiras 21 vezes.

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
6	4	2	7	5	3	1
13	11	9	14	12	10	8
20	18	16	21	19	17	15

Analisando a tabela vemos, por exemplo, que os múltiplos de 7 sempre estão na quarta-feira, que os números que deixam resto 1 quando divididos por 7 estão no sábado e que os números que deixam resto 2 quando divididos por 7 estão na terça-feira. Dividindo 100 por 7 obtemos quociente 14 e resto 2 ($100 = 14 \times 7 + 2$). Daí concluímos que na centésima vez, João estará nadando em uma terça-feira.

Exercício 10: O ano de 2014 começou em uma quarta-feira. Em que dia da semana cairá o último dia deste ano?

Solução. É claro que se você olhar para uma agenda você vai encontrar rapidamente a resposta do problema. Não é isso o que se pretende, é claro. Tente resolver sozinho. Assistindo o vídeo 37 do canal picobmep no YouTube você poderá ver uma solução matemática para este problema além de poder aprender algumas propriedades muito, mas muito interessantes do nosso calendário. VALE A PENA ASSISTIR!!!

Exercício 11: (Fomin, capítulo 3, problema 28) Encontre o último algarismo do número 1989^{1989}.

Solução. Para começar, note que o último algarismo do número 1989^{1989} é igual ao último algarismo do número 9^{1989}. Escrevendo as primeiras potências de 9 obtemos: $9^1 = 9$, $9^2 = 81$, $9^3 = 729$ etc. Daí observamos que os últimos algarismos destes números formam a sequência 9, 1, 9, 1 etc. Assim o último algarismo de 9^n é 9 se n é ímpar e o último algarismo de 9^n é 1 se n é par.

Observamos que para resolver este tipo de problema, não é necessário calcular as potências de 9. Basta calcular o último algarismo das potências de 9. Para fazer isso, começamos por $9^1 = 9$. Multiplicando por 9, obtemos $9 \times 9 = 81$. Para calcular o último algarismo de 9^3, multiplicamos o último algarismo de 9^2 por 9, obtendo $1 \times 9 = 9$. Então o último algarismo de 9^3 é 9. E assim, por diante, vamos olhando sempre para o último algarismo dos produtos, e efetuado o produto, consideramos somente o seu último algarismo para fazer a próxima multiplicação.

Exercício 12: (Fomin, capítulo 3, problema 30) Encontre o último algarismo do número 777^{777}.

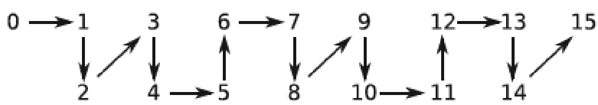
Solução. Para começar, note que o último algarismo do número 777^{777} é igual ao último algarismo do número 7^{777}. Procedendo como explicado no exercício anterior, podemos calcular o último algarismo das primeiras potências de 7.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
último algarismo de 7^n	7	9	3	1	7	9	3	1	7

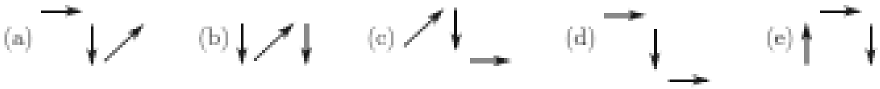
Daí vemos que o ciclo 7, 9, 3, 1 se repete infinitamente. Dividindo 777 por 4 (que é o tamanho do ciclo), obtemos quociente 194 e resto 1. Daí o último algarismo de 7^{777} é igual ao último algarismo de 7^1, que é 7.

Exercício 13: Qual é o resto da divisão de 2^{56} por 7? E por 11? (Veja a solução no vídeo 39.)

Exercício 14: (Banco de Questões 2010, nível 1, problema 86) Os números de 0 a 2000 foram ligados por flechas. A figura dada mostra o começo do processo.

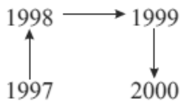


Qual é a sucessão de flechas que liga o número 1997 ao número 2000?

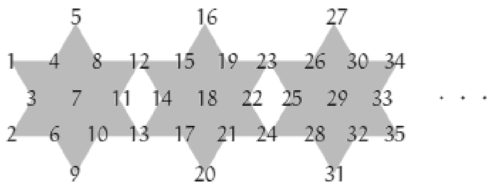


Solução. A alternativa correta é a (e). Observe que o seguinte caminho, formado por seis flechas, é um padrão que se repete na figura dada.

Este caminho-padrão sempre começa nos múltiplos de 6, ou seja, em 0, 6, 12 etc. Vamos averiguar qual é a posição de 1997 em relação ao múltiplo de 6 mais próximo. Dividindo 1997 por 6, obtemos $1997 = 6 \times 332 + 5$, correspondendo a 332 caminhos-padrão mais o resto de 5 flechas. Portanto, 1998 é múltiplo de 6 mais próximo de 1997, ocupando a primeira posição no caminho-padrão. Assim, a figura seguinte ilustra as flechas que ligam 1997 a 2000.

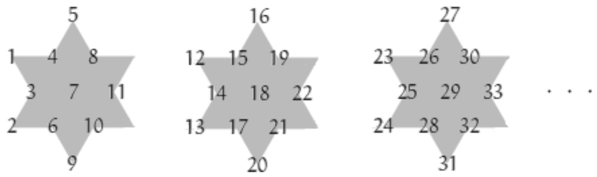


Exercício 15: (Banco de Questões 2011, nível 1, problema 10) Estrelix, um habitante de Geometrix, decidiu colocar os inteiros positivos seguindo a disposição indicada na figura.

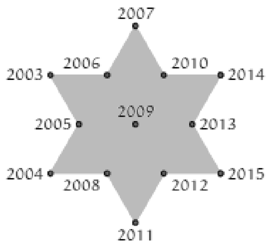


Em quais estrelas aparece o número 2011? Posicione todos os números que aparecem nas referidas estrelas?

Solução. Separe as estrelas deixando os números compartilhados sempre na estrela à direita. Fazendo isto, como indicado na figura a seguir, vemos que em cada estrela ficam escritos 11 números.



Dividindo 2011 por 11, obtemos quociente 182 e resto 9. Assim, o número 2011 é o nono número da 183^a estrela, que está representada na figura ao lado.



2.3 Aritmética dos restos

Na seção anterior estudamos o Algoritmo da Divisão Euclidiana. Na divisão de dois números naturais a por b existe um quociente q e um resto r tal que $a = bq + r$ sendo que obrigatoriamente $0 \leq r \leq b - 1$. Por exemplo, na igualdade $1649 = 7 \times 235 + 4$ identificamos imediatamente o número 4 como o resto da divisão de 1649 por 7. Por outro lado, na igualdade $415 = 7 \times 58 + 9$, o número 9 não é o resto da divisão de 58 por 7, pois na divisão por 7 o resto deve ser um número natural menor que 7. Observe que a igualdade $415 = 7 \times 58 + 9$ significa que se temos 415 unidades, estas podem ser organizadas em 58 grupos de 7 unidades cada e em um grupo de 9 unidades. Este último grupo pode ainda ser dividido em um grupo de 7 unidades e em um grupo de 2 unidades, de modo que as 415 unidades ficam organizadas em 59 grupos de 7 unidades cada e em um grupo de 2 unidades, que não pode ser dividido em grupos de 7. Isto significa que $415 = 7 \times 59 + 2$.

Nesta igualdade, identificamos o número 2 como o resto da divisão de 415 por 7.

Nesta seção veremos como calcular o resto da divisão de uma soma, uma diferença ou um produto de dois números, sem ter que efetuar as operações com os números dados. Para começar, vamos ver alguns exercícios já resolvidos.

Exemplo 16: Nas divisões de 163 e 360 por 7 obtemos, respectivamente, restos 2 e 3.

$$163 = 7 \times 23 + 2 \quad \text{e} \quad 360 = 7 \times 51 + 3.$$

Qual é o resto da divisão de $163 + 360$ por 7?

Solução. É evidente que você pode calcular o valor da soma $163 + 360$ e em seguida dividir este resultado por 7 para obter a resposta desejada. Mas não é isto o que se pretende fazer. Queremos achar a resposta sem calcular a soma $163 + 360$. Para fazer isto, neste primeiro exercício, vamos pensar de um modo bastante concreto. Imagine que você tenha 163 bolinhas. O fato do resto da divisão de 163 por 7 ser igual a 2 implica que estas bolinhas podem ser organizadas em grupos de 7 bolinhas mais um grupo menor de 2 bolinhas. Como o resto da divisão de 360 por 7 é igual a 3, então 360 bolinhas podem ser organizadas em grupos de 7 bolinhas mais um grupo menor de 3 bolinhas. Agora juntando todas as bolinhas, obtemos $163 + 360$ bolinhas que estão organizadas em vários grupos de 7, um grupo de 2 e um grupo de 3 bolinhas, sendo que estes dois últimos grupos podem ser unidos em um único grupo de 5 bolinhas. Portanto todas as $163+360$ bolinhas estão organizadas em vários grupos de 7 e em um grupo de 5 bolinhas. Como 5 é um número menor que 7, o que foi feito significa que o resto da divisão de $163 + 360$ por 7 é igual a $5 = 2 + 3$.

De outro modo, podemos chegar nesta mesma conclusão utilizando a propriedade distributiva:

$$a(b + c) \;=\; ab \;+\; ac$$

Acompanhe o seguinte desenvolvimento:

$$163+360 = (7\cdot 23+2) \;+\; (7\cdot 51+3) = 7\cdot(23+51)+(2+3) = 7\cdot 74+5.$$

Nesta igualdade identificamos imediatamente o número 5 como o resto da divisão de $163+360$ por 7. Portanto, neste exemplo, vimos que para calcular o resto da divisão da soma $163 + 360$ por 7 bastou somar os restos das divisões dos números 163 e 360 por 7.

Exemplo 17: Nas divisões de 106 e 197 por 6 obtemos, respectivamente, restos 4 e 5:

$$106 = 6 \times 17 + 4 \qquad \text{e} \qquad 197 = 6 \times 32 + 5.$$

Qual é o resto da divisão de $106 + 197$ por 6?

Solução. Para calcular o resto da divisão do número $106 + 197$ por 6 podemos imaginar que temos esta quantidade de bolinhas e queremos dividi-las em grupos de 6. Aquela quantidade $r < 6$ que não puder ser agrupada para formar um novo grupo de 6 é o resto da divisão.

Do enunciado sabemos que 106 bolinhas podem ser agrupadas em 17 grupos de 6 mais um grupo menor com 4 bolinhas. E que 197 bolinhas podem ser agrupadas em 32 grupos de 6 mais um grupo menor com 5 bolinhas. Juntando todas as bolinhas, vemos que as $106 + 197$ bolinhas podem ser agrupadas em $17 + 32 = 49$ grupos de 6 bolinhas, um grupo com 4 e um grupo com 5, sendo que estes dois últimos grupos podem ser unidos em um grupo com 9 bolinhas. Agora este grupo de 9 bolinhas pode ser dividido em um grupo com 6 bolinhas e um outro grupo com 3 bolinhas. Deste modo, vemos que as $106 + 197$ bolinhas podem ser organizadas em $49 + 1 = 50$ grupos de 6 bolinhas mais um grupo menor com 3 bolinhas. Como $3 < 6$ identificamos este número 3 como o resto da divisão de $106 + 197$ por 6.

Utilizando a propriedade distributiva poderíamos reescrever esta solução do seguinte modo:

$$\begin{aligned} 106 + 197 &= (6 \cdot 17 + 4) \ + \ (6 \cdot 32 + 5) = 6 \cdot (17 + 32) + (4 + 5) \\ &= 6 \cdot 49 + 9 = 6 \cdot 49 + (6 + 3) = 6 \cdot 50 + 3. \end{aligned}$$

Nesta igualdade $106 + 197 = 6 \cdot 50 + 3$ identificamos 3 como o resto da divisão de $106 + 197$ por 6. Portanto, como no exemplo anterior, para calcular o resto da divisão da soma $106 + 197$ por 6, somamos os restos das divisões dos números 106 e 197 por 6. Neste caso obtemos $4 + 5 = 9$. Como este número é maior que 6, ele ainda pode ser dividido por 6, resultando um resto igual a 3.

Procedendo como nestes exemplos podemos concluir o seguinte resultado.

> Para calcular o resto da divisão de uma soma por um divisor, basta somar os restos das divisões de cada uma das parcelas pelo mesmo divisor. Se a soma dos restos passa do divisor, calcule o resto da divisão pelo divisor dessa soma de restos.

Exemplo 18:

- Se os restos das divisões de a e b por 7 são respectivamente 2 e 3, então $a + b$ deixa resto $2 + 3 = 5$ quando dividido por 7.

- Se os restos das divisões de a e b por 9 são respectivamente 8 e 5, para calcular o resto da divisão de $a + b$ por 9 some $8 + 5 = 13$. Como este número passou do divisor, devemos dividir 13 por 9. Neste caso obtemos resto 4.

- Se os restos das divisões de a, b e c por 8 são respectivamente 4, 7 e 6, para calcular o resto da divisão de $a + b + c$ por 8 some os restos $4 + 7 + 6 = 17$. Como passou do divisor, divida 17 por 8, obtendo resto 1.

Como uma multiplicação de números naturais é uma soma de parcelas iguais, o resultado obtido para o cálculo do resto da divisão de uma soma implica um resultado análogo para o cálculo do resto da divisão do resultado de uma multiplicação.

> Para calcular o resto da divisão do resultado de uma multiplicação por um divisor, basta multiplicar os restos das divisões de cada uma das parcelas pelo mesmo divisor. Se o produto dos restos passa do divisor, calcule o resto da divisão pelo divisor desse produto de restos.

Exemplo 19:

- Os números 723 e 451 deixam resto 2 e 3 ao serem divididos por 7. O número 723×451 deixa resto $2 \times 3 = 6$ ao ser dividido por 7.
- Os números 275 e 562 deixam resto 5 e 4 ao serem divididos por 6. Para calcular o resto da divisão do produto 275×562 por 6 multiplique os restos $5 \times 4 = 20$. Como este número é maior que o divisor, divida 20 por 6 obtendo resto 2. Portanto o resto da divisão de 275×562 por 6 é igual a 2.
- Os números 73, 112 e 245 deixam restos 1, 4 e 2 ao serem divididos por 9. O produto $73 \times 112 \times 245$ deixa resto $1 \times 4 \times 2 = 8$ ao ser dividido por 9.

No exemplo anterior é mais fácil fazer a conta como ela foi explicada ou é mais fácil multiplicar os números $73 \times 112 \times 245$ e depois dividir o resultado deste produto por 9 para obter o resto desejado? Em qual dos dois casos você manipula com números menores?

O vídeo 35 do canal picobmep no YouTube apresenta vários exemplos que explicam as propriedades operatórias do resto de uma divisão. Observamos que para formalizar as propriedades apresentadas nesta seção é necessário utilizar as propriedades associativa e distributiva. Estas propriedades estão explicadas no vídeo 5.

Exercício 20:

1. A soma de dois múltiplos de 7 é um múltiplo de 7?
2. Qual é o resto da divisão de $7 \times 82 + 3$ por 7?
3. E qual é o resto da divisão de $7 \times 29 + 10$ por 7?
4. E qual é o resto da divisão de $7 \times 41 + 93$ por 7?
5. E qual é o resto da divisão de $7 \times 18 - 2$ por 7?
6. Determine os restos das divisões de $7 \times 81 + 8$ por 7 e por 9.
7. Se $a = 7 \times 53 + 1$ e $b = 7 \times 15 + 3$, qual é o resto da divisão de $a + b$ por 7?
8. Se $m = 7 \times 22 + 5$ e $n = 7 \times 38 + 6$, qual é o resto da divisão de $m + n$ por 7?

Solução.

1. Sim, pois $7n + 7m = 7(n + m)$.
2. Sempre que escrevemos um número na forma $7q + r$, sendo r um número de 0 até 6, este r é o resto da divisão do número dado por 7. Isto é a definição do resto de uma divisão.
3. Neste item não queremos fazer a conta $7 \times 29 + 10$ para determinar o resto da divisão deste número por 7. Como $10 = 7 + 3$, o número dado é a soma de dois múltiplos de 7 com 3. Portanto o resto da divisão deste número por 7 é 3.
4. Dividindo 93 por 7 obtemos quociente 13 e resto 2. Daí o número $7 \times 41 + 93$ é igual a soma de dois múltiplos de 7 com 2. E, portanto, o resto da divisão deste número por 7 é igual a 2.

5. Este item pode ser mais difícil. Acompanhe o seguinte desenvolvimento:

$$7 \times 18 - 2 = 7 \times (17 + 1) - 2 = 7 \times 17 + 7 - 2 = 7 \times 17 + 5.$$

   Portanto o resto é igual a 5.

6. O número 7×81 é múltiplo de 7 e de 9. Então precisamos somente analisar os restos das divisões de 8 por 7 e por 9. Estes restos são respectivamente 1 e 8.

7. O resto é $1 + 3 = 4$.

8. O resto é 4, pois $5 + 6 = 11$, que deixa resto 4 quando dividido por 7.

Exercício 21: Sabe-se que 503 e 418 deixam restos 7 e 2 quando divididos por 8, respectivamente. Quais são os restos das divisões de $503+418$ e 503×418 por 8? Qual é o resto da divisão de $503 - 418$ por 8?

Exercício 22: Sabe-se que 2811 e 1744 deixam restos 3 e 7 quando divididos por 9, respectivamente. Quais são os restos das divisões de $2811 + 1744$, de $2811 - 1744$ e de 2811×1744 por 9?

Exercício 23: Calcule o resto da divisão de 2011 por 7. Em seguida calcule o resto da divisão de $2011 + 2012 + 2013 + 2014 + 2015$ por 7. Qual é o resto da divisão de $2011 \cdot 2012 \cdot 2013 \cdot 2014 \cdot 2015$ por 7?

Exercício 24:

1. Se o resto da divisão de a por 7 é igual a 3, então qual é o resto da divisão de 5a por 7?

2. Se a deixa resto 6 quando dividido por 8 e se b deixa resto 5 quando dividido por 8, qual é o resto da divisão de $a + b$ e de $a - b$ por 8?

Solução.

1. Podemos escrever $a = 7q + 3$. Daí $5a = 5(7q + 3) = 7 \times (5q) + 15$. Dividindo 15 por 7 obtemos resto 1. Daí $5a$ é a soma de um múltiplo de 7 com 1 e, portanto, o resto da divisão de $5a$ por 7 é igual a 1.

2. Podemos escrever $a = 8n + 6$ e $b = 8m + 5$. Daí $a + b = (8n + 6) + (8m + 5) = (8n + 8m) + 11$ e $a - b = (8n + 6) - (8m + 5) = (8n - 8m) + 1$. Como 11 deixa resto 3 quando dividido por 8, vemos que $a + b$ deixa resto 3 quando dividido por 8. De $a - b = (8n - 8m) + 1$, segue que $a - b$ deixa resto 1 quando dividido por 8.

Exercício 25: Quais são os restos das divisões de 1991^3 e $1989 \cdot 1990 \cdot 1991 + 1992^2$ por 7? Após tentar resolver este exercício, compare a sua solução com a que está apresentada no vídeo 35 do canal picobmep no YouTube.

2.4 Múltiplos e divisores

Multiplicando o número 3 por qualquer número natural obtém-se os múltiplos positivos de 3. Assim, os múltiplos positivos de 3 são: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ... Todos estes números formam o conjunto dos múltiplos positivos de 3, que pode ser representado do seguinte modo:

$$M(3) \;=\; \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \ldots\}.$$

Generalizando, considerando somente números positivos, dado um número natural a, o conjunto dos múltiplos de a é o conjunto

$$M(a) \;=\; \{a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a, 7a, 8a, \ldots\}.$$

Deste modo, dado dois números naturais a e b, dizemos que b é um múltiplo de a se existir um número natural n tal que $b = an$. De modo equivalente, b é múltiplo de a quando o resto da divisão de b por a for igual a zero.

Assim, se m e n são dois números naturais, o produto $p = mn$ é um múltiplo tanto de m quanto de n. Neste caso, também dizemos que m e n são fatores de p. Por exemplo, na multiplicação $24 = 3 \times 8$ podemos dizer que:

- 24 é um múltiplo de 3.
- 24 é um múltiplo de 8.
- 3 é um fator de 24.
- 8 é um fator de 24.

Neste contexto, a palavra fator é um sinônimo da palavra divisor. Ou seja, na multiplicação $24 = 3 \times 8$ também podemos dizer que:

- 24 é divisível por 3.
- 24 é divisível 8.
- 3 é um divisor de 24.
- 8 é um divisor de 24.

Evidentemente, dado um número natural a, se d é um divisor positivo de a então $1 \leq d \leq a$. Assim, todo número natural possui uma quantidade finita de divisores positivos, enquanto possui uma quantidade infinita de múltiplos. Vejam alguns exemplos de conjuntos de divisores. Observamos que nesta apostila somente vamos considerar múltiplos e divisores positivos.

$$\begin{aligned}
D(7) &= \{1, 7\} \\
D(12) &= \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \\
D(14) &= \{1, 2, 7, 14\} \\
D(72) &= \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}
\end{aligned}$$

Olhando para o resto de uma divisão, observe que, por exemplo, na divisão de 14 por um número d, o resto desta divisão é zero somente quando d é um divisor de 14, isto é, somente quando $d \in D(14) = \{1, 2, 7, 14\}$. Qualquer número $d \notin D(14)$ faz com que a divisão de 14 por d tenha um resto diferente de zero.

No Portal da Matemática, no 6º ano do Ensino Fundamental, no módulo "Divisibilidade" você pode assistir a videoaula "múltiplos e divisores" sobre as definições apresentadas nesta seção.

Exercício 26: (Banco de Questões 2006, nível 1, lista 4, problema 1) Da igualdade $9174532 \times 13 = 119268916$ pode-se concluir que um dos números abaixo é divisível por 13. Qual é este número?
(a) 119268903 (b) 119268907 (c) 119268911
(d) 119268913 (e) 119268923.

Solução. Como 119268916 é divisível por 13, podemos concluir que os números divisíveis por 13 são aqueles obtidos somando-se ou subtraindo-se múltiplos de 13 ao número 119268916. Dentre os números apresentados, o número $119268916 - 13 = 119268903$ é o único divisível por 13.

Quando perguntamos se um dado número b é divisível por um número a, podemos pensar que estamos perguntando se o resto da divisão de b por a é igual a zero. Utilizando as propriedades aritméticas do resto de uma divisão discutidas na seção anterior, podemos concluir algumas propriedades interessantes a respeito da divisibilidade. Por exemplo, o número $b = 7 \cdot 13 + 9$ é divisível por 7? Aqui este número b é a soma de um múltiplo de 7, $7 \cdot 13$, que deixa resto zero quando dividido por 7 com o número 9, que não é múltiplo de 7, pois deixa resto 2 quando dividido por 7. Daí o resto da divisão de $b = 7 \cdot 13 + 9$ por 7 é igual a 2 e, portanto, o número b não é divisível por 7.

Considerando somente números inteiros positivos, um número da forma $a \cdot q + r$ é um múltiplo de a somente quando r é um múltiplo de a.

Exercício 27: Considerando somente números inteiros positivos,

1. O número $7 \cdot 38 + 5$ é divisível por 7?
2. O número $7 \cdot 241 + 84$ é um múltiplo de 7?
3. O número $7 \cdot 81 + 54$ é divisível por 7 e por 9?
4. Existe um número a que torna o número $7a + 6$ um múltiplo de 7?
5. O número $7a + 100$ pode ser divisível por 7?
6. Para quais condições sobre b, o número $7a + b$ é um múltiplo de 7?
7. Sabendo que o número $7a + b$ é divisível por 7, o que podemos afirmar sobre o número b?

Exercício 28: (OBMEP 2011 - N2Q3 - 2ª fase) O *múltiplo irado* de um número natural é o menor múltiplo do número formado apenas pelos algarismos 0 e 1. Por exemplo, o múltiplo irado de 2, bem como de 5, é 10; já o múltiplo irado de 3 é 111 e o de 110 é ele mesmo.

(a) Qual é o múltiplo irado de 20?

(b) Qual é o múltiplo irado de 9?

(c) Qual é o múltiplo irado de 45?

(d) Qual é o menor número natural cujo múltiplo irado é 1110?

Exercício 29: Extrapolando o exercício anterior, tente resolver o seguinte **desafio**. Mostre que todo número natural possui um múltiplo que se escreve apenas com os algarismos zero e um.

Solução. Para resolver este desafio você vai precisar utilizar várias propriedades apresentadas neste encontro. Tente resolver e compare a sua solução com a que está apresentada no vídeo 36. Vale a pena assistir este vídeo, pois além de ele apresentar uma solução para o desafio, ele também explica muito bem as propriedades estudadas neste encontro.

Para terminar esta seção vamos deixar dois exercícios que estão resolvidos no Portal da Matemática, no 8º ano do Ensino Fundamental, no módulo "Números Naturais: Contagem, Divisibilidade e Teorema da Divisão Euclidiana" na videoaula "Divisibilidade: Resolução de Exercícios − Parte 3". Antes de assistir as soluções no vídeo, é claro que você deve tentar resolver estes exercícios sozinho.

Exercício 30: Sabendo-se que o número

$$12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \ + \ 14$$

é divisível por 13, qual é o resto da divisão do número

$$13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

por 169?

Exercício 31: Se a e b são números naturais e $2a+b$ é divisível por 13, então qual dos seguintes números é um múltiplo de 13?

(A) $91a + b$

(B) $92a + b$

(C) $93a + b$

(D) $94a + b$

(E) $95a + b$

2.5 Fatoração

Um número natural maior que 1 é **primo** quando ele é divisível apenas por 1 e por ele mesmo. Por exemplo, 7 é primo, pois os únicos divisores de 7 são 1 e 7. Já o número 12 não é primo, pois ele possui mais divisores, como por exemplo o 2. Quando um número não é primo, ele é chamado de **composto**. Os primeiros números primos estão listados a seguir:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ \ldots$$

Pela própria definição de número composto, vemos que um número composto é um produto de dois números diferentes de 1. Por exemplo, vimos que 12 é composto, pois 2 é um divisor de 12 e isto significa que $12 = 2 \cdot 6$. Repetindo o mesmo raciocínio para cada uma das parcelas deste produto, observamos que 2 é primo e que ele não pode ser escrito como um produto de fatores diferentes de 1. Já o número 6 é composto e pode ser escrito como $6 = 2 \cdot 3$. Substituindo esta igualdade em $12 = 2 \cdot 6$, podemos escrever $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$. Agora, neste produto cada uma das parcelas é um número primo que não pode ser escrito como um produto de números menores. Quando chegamos neste ponto dizemos que $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ está fatorado como um produto de números primos, ou que $2 \cdot 2 \cdot 3$ é uma fatoração do número 12 em números primos.

Afirmamos que este procedimento pode ser generalizado para qualquer número natural e chamamos esta propriedade de **Teorema Fundamental da Aritmética**: todo número natural maior que 1 pode ser escrito como um produto de números primos.

Exercício 32: Escreva o número 1820 como um produto de números primos.

Solução. Podemos fazer isto escrevendo o número 1820 ao lado de uma barra vertical. Do lado direito desta barra vamos escrevendo os divisores primos de 1820 e do lado esquerdo vamos escrevendo os resultados das divisões sucessivas por estes fatores primos, como está indicado a seguir:

$$\begin{array}{r|l} 1820 & 2 \\ 910 & 2 \\ 455 & 5 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Multiplicando os números do lado direito da barra vertical obtemos a fatoração de 1820 como um produto de números primos: $1820 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$.

Exercício 33: Dê a fatoração em números primos de 378, 638 e 1800.

O vídeo 10 do canal picobmep do YouTube apresenta, de modo bem claro, o conceito de número primo, o Crivo de Eratóstenes e o Teorema Fundamental da Aritmética. Assista este vídeo para entender melhor os conceitos introduzidos nesta aula.

Agora vamos ver uma outra propriedade muito importante dos números naturais que é obtida por meio da sua fatoração em números primos. Quando vamos fatorar um número como um produto de primos, como nos exercícios anteriores, o que fazemos, de fato, é ir testando quais números primos dividem o número dado. Por exemplo, quando determinamos a fatoração $1820 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ verificamos que apenas os números primos 2, 5, 7 e 13 dividem 1820 e que, portanto, nenhum outro número primo divide 1820. Portanto, quando vemos um número fatorado como produto de números primos, somente os primos que aparecem nesta fatoração são divisores do número dado. Formalizando:

> Um número primo p divide um certo número natural a somente quando p é um dos fatores primos que aparece na fatoração de a.

Por exemplo, da fatoração $a = 2 \cdot 7^3 \cdot 13^5$, vemos que apenas 2, 7 e 13 são os divisores primos de a. Além disso, por exemplo, os números primos 3, 5 e 11 não são divisores de a, pois eles não aparecem na fatoração de a.

Neste contexto, utilizando fatoração, é interessante explorar os exercícios de 1 a 11 do parágrafo 1 do capítulo 3 do livro do Fomin:

Exercício 34: (Fomin, páginas 22-23)

1. O número $2^9 \cdot 3$ é divisível por 2?
2. O número $2^9 \cdot 3$ é divisível por 5?
3. O número $2^9 \cdot 3$ é divisível por 8?
4. O número $2^9 \cdot 3$ é divisível por 9?

5. O número $2^9 \cdot 3$ é divisível por 6?
6. É verdade que, se um número natural for divisível por 4 e por 3, então ele tem que ser divisível por $4 \cdot 3 = 12$?
7. É verdade que, se um número natural for divisível por 4 e por 6, então ele tem que ser divisível por $4 \cdot 6 = 24$?
8. O número a não é divisível por 3. É possível que o número $2a$ seja divisível por 3?
9. O número a é par. É verdade que $3a$ tem que ser divisível por 6?
10. O número $5a$ é divisível por 3. É verdade que a tem que ser divisível por 3?
11. O número $15a$ é divisível por 6. É verdade que a tem que ser divisível por 6?

Para finalizar esta seção, observamos que sempre que um número natural está fatorado como um produto de números primos, existe uma maneira bastante rápida para calcular a sua quantidade de divisores e também existe uma maneira organizada para listar o seu conjunto de divisores. Vejamos um exemplo.

Exemplo 35: Liste todos os divisores positivos de $a = 2^3 \cdot 5^2$.

Solução. Se d é um divisor de a, então os únicos fatores primos de d são 2 e 5. Deste modo $d = 2^x \cdot 5^y$. Mais ainda, como a é um múltiplo de d, podemos escrever $a = dn$, e isto implica que as potências x e y dos números 2 e 5 na fatoração de d devem ser menores do que ou iguais as potências dos números 2 e 5 na fatoração de a. Logo $x \leq 3$ e $y \leq 2$. Portanto, $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $y \in \{0, 1, 2\}$. Fazendo todas as possibilidades, listamos todos os divisores de a, que são:

$$
\begin{aligned}
x = 0 \text{ e } y = 0 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^0\, 5^0 = 1.\\
x = 0 \text{ e } y = 1 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^0\, 5^1 = 5.\\
x = 0 \text{ e } y = 2 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^0\, 5^2 = 25.\\
x = 1 \text{ e } y = 0 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^1\, 5^0 = 2.\\
x = 1 \text{ e } y = 1 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^1\, 5^1 = 10.\\
x = 1 \text{ e } y = 2 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^1\, 5^2 = 50.\\
x = 2 \text{ e } y = 0 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^2\, 5^0 = 4.\\
x = 2 \text{ e } y = 1 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^2\, 5^1 = 20.\\
x = 2 \text{ e } y = 2 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^2\, 5^2 = 100.\\
x = 3 \text{ e } y = 0 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^3\, 5^0 = 8.\\
x = 3 \text{ e } y = 1 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^3\, 5^1 = 40.\\
x = 3 \text{ e } y = 2 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^3\, 5^2 = 200.
\end{aligned}
$$

Observe que como existem 4 possibilidades para x e existem 3 possibilidades para y, o número a possui $4 \cdot 3 = 12$ divisores.

Observamos que o vídeo 10 do canal picobmep no YouTube apresenta explicações bastante detalhadas sobre o exercício anterior, isto é, sobre como podemos listar de modo organizado o conjunto de divisores de um número natural dado e como podemos determinar rapidamente a sua quantidade de divisores. Com certeza este vídeo irá ajudar na solução do próximo exercício.

Exercício 36: Em cada caso determine a quantidade de divisores e liste todos os divisores dos números dados.

(a) $3 \cdot 7^2$

(b) $2^3 \cdot 3^2$

(c) $2 \cdot 6^2$

(d) $2 \cdot 3 \cdot 5^2$

(e) $71^2 \cdot 113$

No Portal da Matemática, no 6º ano do Ensino Fundamental, no módulo de "Divisibilidade" existem 3 videoaulas sobre "conjunto e quantidade de divisores". Estas aulas são um excelente recurso para ajudar no entendimento do que foi estudado nesta seção.

2.6 Critérios de divisibilidade

O objetivo desta seção é apresentar os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 9 e 10. Antes disso gostaríamos de observar que em muitos casos o uso de um critério de divisibilidade só faz sentido para números "grandes". Para números "pequenos", o problema de decidir se um dado número é divisível ou não por outro pode ser resolvido através do uso da tabuada ou de uma simples divisão. Além disso, como "ser divisível por" e "ser múltiplo de" significam exatamente a mesma coisa, é importante ter em mente que um critério de divisibilidade também é um critério de multiplicidade.

No Portal da Matemática, no 6º ano do Ensino Fundamental, no módulo "Divisibilidade", existem 4 videoaulas que explicam os principais critérios de divisibilidade apresentados nesta apostila. Além disso, existem mais 5 videoaulas com resoluções de exercícios envolvendo critérios de divisibilidade. Recomendamos que estes vídeos sejam estudados e que as dúvidas sejam apresentadas no Fórum Hotel de Hilbert.