**Solução da aula 02 (5° Encontro)**

**Problemas Contagem** $–$ **C5N2** $-$ **“Permutações com Repetições Circulares”**

**Solução do exercício 01**

1. Na palavra PIC temos 3 letras, dessa forma temos 3 x 2 x 1 = 6 tipos de anagramas da palavra.
2. Na palavra ANA também temos três letras, porém observe que temos a repetição da letra A. Nesse caso temos que o total de anagramas possíveis é

$$C\_{3}^{2} ×1 = \frac{3!}{2!×\left(3-2\right)!}=\frac{6}{2}=3$$

Também podemos dividir pelas letras repetidas, que ficaria:

$$P\_{3}^{2}=\frac{3!}{2!}= \frac{6}{2}=3.$$

1. Na palavra BANANA temos 6 letras, com 3 A se repetindo e 2 N se repetindo; nesse caso o número possível de anagramas será

$$P\_{6}^{3,2}= \frac{6!}{3!×2!}=\frac{720}{12}=60$$

1. Na palavra MATEMATICA temos 10 letras, onde 3 delas são A, 2 delas são T e 2 delas são M, nesse caso o número possível de anagramas será

$$P\_{10}^{3, 2,2}= \frac{10!}{3! ×2!×2!}=151 200$$

**Solução do exercício 02**

1. Observe que é necessário escolher 5 números entre 7, sem que eles se repitam , isso é

$$C\_{7}^{5}= \frac{7!}{5!×\left(7-5\right)!}= \frac{7×6×5!}{5! ×2!}= \frac{42}{2}=21$$

1. observe que agora é necessário escolher 5 números entre 8 que não se repetem, isso é

$$C\_{8}^{5}= \frac{8!}{5!×\left(8-5\right)!}= \frac{8×7×6×5!}{5! ×3!}=56$$

**Solução do exercício 03**

Vamos dar nomes para as duplas para facilitar: AABBCC; então temos:

$$\frac{6!}{2!×2!×2!}=90 modos$$

Porém, repare que se colocarmos João e Maria na dupla A e Pedro e Janete na B, é o mesmo que colocarmos João e Maria na B e Pedro e Janete na A, desse modo temos:

$$\frac{6!}{3!×(2!×2!×2!)}=15 modos$$

**Combinação completa ou com repetição**

Para contar o número de maneiras de distribuir p objetos para n pessoas (ou seja, de calcular o número de soluções inteiras e não negativas de x1 + x2 + x3+ . . . +xn = p, ou ainda, de calcular o número $CR\_{n}^{p}$ de combinações completas de n elementos tomados p a p). Temos p objetos, que devem ser separados por n − 1 tracinhos. Ou seja, precisamos escolher p das n + p − 1 posições para os objetos.

A resposta é portanto é :

$$CR\_{n}^{p}= C\_{n+p-1}^{p}$$

**Solução do exercício 04**

Temos 5 tipos de doces e 4 tipos de refrigerantes, dentre eles temos que formar combinações de 2 doces e 3 refrigerantes. Observe que para escolhermos os doces faremos

$$CR\_{5}^{2}= C\_{5+2-1}^{2}= C\_{6}^{2}$$

$$C\_{6}^{2}= \frac{6!}{2!×\left(6-2\right)!}= \frac{6×5×4!}{2!×4!}=15$$

Para escolhermos os refrigerantes, temos:

$$CR\_{4}^{3}= C\_{4+2-1}^{3}= C\_{6}^{3}$$

$$C\_{6}^{3}= \frac{6!}{3!×\left(6-3\right)!}= \frac{6×5×4×3!}{3!×3!}=20$$

Portanto o número total de pedidos distintos que podem ser feitos é 15 x 20 = 300

**Solução do exercício 05**

Os números que podem ser inscritos em um dominó, são {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}; ao todo são 7 números, para 2 quadrados e, cada dominó. Temos então:

$$CR\_{7}^{2}= C\_{7+2-1}^{2}= C\_{8}^{2}$$

$$C\_{8}^{2}= \frac{8!}{2!×\left(8-2\right)!}= \frac{8×7×6!}{2!×6!}=\frac{56}{2}=28$$

Temos assim um total de 28 dominós.

**Solução do exercício 06**

A palavra PARAMETRIZADE contém 13 letras. Observe; para não termos 2 letras A juntas, faremos:

\_ P \_ R \_ M \_ E \_ T \_ R \_ I \_ Z \_D \_

Temos 10 espaços para ocupar com as 4 letras A, isso é

$$C\_{10}^{4}= \frac{10!}{4!\left(10-4\right)!}= \frac{10×9×8×7×6!}{4!×6!}=\frac{5040}{24}=210 modos$$

Observe também que podemos permutar as 9 letras fixadas, porém a letra R se repete; desse forma temos:

$$P\_{9}^{2}= \frac{9!}{2!}=\frac{362880}{2}=181440$$

Portanto o numero total de anagramas será 210 x 181 440 = 38 102 400

**Solução do exercício 07**

1. Nesse caso a professora tem 3 bolas para distribuir entre 5 alunos; termos então:

$$C\_{5}^{3}=\frac{5!}{3!×\left(5-3\right)!}= \frac{20}{2}=10 modos$$

1. Nesse caso teremos 3 tipos de casos;

**1° caso:** item anterior ( item (a)), onde teremos 10 modos.

**2° caso:** 3 bolas para dois alunos, onde um receberá duas bolas e o outro receberá 1 bola; nesse caso o primeiro aluno pode ser escolhido de 5 formas e o segundo de 4, assim temos : 5 x 4 = 20

**3°caso:** 1 aluno receberá as 3 bolas, nesse caso temos 5 possibilidades (total de alunos)

Portanto temos 10 + 20 +5 = 35 modos.

**Permutação circular**

O número de permutações circulares de n objetos distintos é o número de modos de colocar esses n objetos em círculo, de forma que disposições que possam coincidir por rotação sejam consideradas iguais

$$PC\_{n}=\left(n-1\right)!$$

**Solução do exercício 08**

A principio, imaginamos que para formamos uma roda contendo 4 criança, devemos escolher a ordem como nos exercícios anteriores; desse modo teríamos:

 $4!=24 modos$

Porém, as rodas ABCD, BCDA, CDAB, DABC abaixo, são iguais, estão apenas rotacionadas.



Portanto devemos dividir por 4, isso é

$$PC\_{4}= \frac{4!}{4}= \frac{4 ×3!}{4}=3!=6$$

**Solução do exercício 09**

Vamos supor que não podemos girar o colar; nesse caso existem 13! Colares diferentes, porém os arranjos de contas devem ser considerados idênticos aos 12 obtidos por rotação

$$PC\_{3}= \frac{13!}{13}= \frac{13 ×12!}{13}=12!=479001600$$

**Solução do exercício 10**

1. levando em consideração que Nilton se posicione sempre a direita de Lucimar, vamos considerar:

A, B, C, D, NL; de modo que NL seja uma só letra (bloco).

Teremos então

$$P\_{5}=\frac{5!}{5}= \frac{5×4!}{5}=4!=24$$

1. Sim, a resposta muda. Pois no item (a) consideramos NL o mesmo bloco; usaremos o resultado do item anterior, desse modo teremos duas opções de posiciona-los:

Nilton à direita ou à esquerda de Lucimar, portanto pelo princípio multiplicativo, teremos

$$2×PC\_{5}=2×4!=2×24=48$$

**Solução do exercício 11**

Consideramos os blocos ABC, D, E, F; onde ABC são as três amigas que não vão se separar

$$P\_{4}=\frac{4!}{4}= \frac{4×3!}{4}=3!=6$$

Porém, agora devemos multiplicar tal quantidade pelo número de maneiras de permutação para que as amigas fiquem juntas. O valor obtido será

$$3!×PC\_{6}=3!×3!=36 rodas$$

**Solução do exercício 12**

Analogamente aos exercícios anteriores, tomamos blocos A, B, C, D, E, JM; onde João e Maria estarão sempre juntos. Dentre o bloco, podemos permutar J e M de duas maneiras; assim temos

$$2×PC\_{6}=2×5!=2×120=240$$