

Exercício 6:

Um gafanhoto pula ao longo de uma linha. No seu primeiro pulo, ele anda 1cm , no segundo 2cm , no terceiro 3cm , e assim sucessivamente. Cada pulo o leva para a direita ou para a esquerda. Mostre que após 1985 pulos, o gafanhoto não pode retornar a sua posição inicial.

Resolução:

Em cada pulo, quando o gafanhoto andar para a direita coloquemos um sinal de $+$ na distância que ele percorreu, e quando ele andar para a esquerda coloquemos um sinal de $-$ na distância que ele percorreu. Assim, para que o gafanhoto retorne à posição inicial deve ser possível colocar sinais de $+$ e de $-$ na frente e entre os números de 1 até 1985 de modo que a expressão resulte em zero.

Pelo exercício anterior, vimos que isso só é possível se conseguirmos dividir a adição $1+2+3+\dots+1985$ em duas parcelas iguais. Entretanto, como visto no exercício 1, a soma de todos os números pares entre 1 e 1985 resulta em um número par. Ainda, entre 1 e 1985 temos uma quantidade ímpar de números ímpares (pense sobre isso). Como isso, a soma total de 1 até 1985 possui uma parcela par e uma parcela ímpar, logo resulta em um número ímpar. Portanto, é impossível que o gafanhoto retorne à posição inicial após 1985 pulos.