(b) $2^3 \cdot 3^2$

(c) $2 \cdot 6^2$

(d) $2 \cdot 3 \cdot 5^2$

(e) $71^2 \cdot 113$

No Portal da Matemática, no 6º ano do Ensino Fundamental, no módulo de "Divisibilidade" existem 3 videoaulas sobre "conjunto e quantidade de divisores". Estas aulas são um excelente recurso para ajudar no entendimento do que foi estudado nesta seção.

2.6 Critérios de divisibilidade

O objetivo desta seção é apresentar os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 9 e 10. Antes disso gostaríamos de observar que em muitos casos o uso de um critério de divisibilidade só faz sentido para números "grandes". Para números "pequenos", o problema de decidir se um dado número é divisível ou não por outro pode ser resolvido através do uso da tabuada ou de uma simples divisão. Além disso, como "ser divisível por" e "ser múltiplo de" significam exatamente a mesma coisa, é importante ter em mente que um critério de divisibilidade também é um critério de multiplicidade.

No Portal da Matemática, no 6º ano do Ensino Fundamental, no módulo "Divisibilidade", existem 4 videoaulas que explicam os principais critérios de divisibilidade apresentados nesta apostila. Além disso, existem mais 5 videoaulas com resoluções de exercícios envolvendo critérios de divisibilidade. Recomendamos que estes vídeos sejam estudados e que as dúvidas sejam apresentadas no Fórum Hotel de Hilbert.

No que segue os critérios de divisibilidade serão apresentados por meio de exemplos numéricos resolvidos que apresentam as ideias de como as explicações poderiam ser generalizadas para quaisquer números.

Exemplo 37: [critério de divisibilidade por 3] Um número é divisível por 3 se a soma dos seus algarismos é divisível por 3 (veja o vídeo 8). Para entender este critério de divisibilidade, primeiramente precisamos observar que todas as potências de 10 deixam resto 1 quando divididas por 3:

$$10 = 3 \cdot 3 + 1.$$

$$100 = 3 \cdot 33 + 1.$$

$$1000 = 3 \cdot 333 + 1.$$

Desta observação, vamos verificar, sem efetuar a divisão, se o número 457 é ou não é divisível por 3. O número 457 pode ser escrito como $457 = 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7$ ou ainda, $457 = 4(3 \cdot 33 + 1) + 5(3 \cdot 3 + 1) + 7$. Colocando o fator 3 em evidência, vemos que $457 = 3(4 \cdot 33 + 5 \cdot 3) + (4 + 5 + 7)$. Como o número $3(4 \cdot 33 + 5 \cdot 3)$ é divisível por 3, precisamos somente verificar se $4 + 5 + 7 = 16$ é divisível por 3. Como este número não é divisível por 3, concluímos que 457 também não é divisível por 3. Mais ainda, como 16 deixa resto 1 quando dividido por 3, podemos até concluir que 457 também deixa resto 1 quando dividido por 3.

Exemplo 38: [critério de divisibilidade por 9] Um número é divisível por 9 se a soma dos seus algarismos é divisível por 9. Como no caso da divisibilidade por 3, primeiramente observe que todas as potências de 10 deixam resto 1 quando divididas por 9:

$$10 = 9 \cdot 1 + 1.$$

$$100 = 9 \cdot 11 + 1.$$

$$1000 = 9 \cdot 111 + 1.$$

Vejamos, sem efetuar a divisão, se o número 2345 é ou não é divisível por 9. Podemos escrever $2345 = 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5$, ou ainda, $2345 = 2(9 \cdot 111 + 1) + 3(9 \cdot 11 + 1) + 4(9 + 1) + 5$. Colocando o fator 9 em evidência, $2345 = 9(2 \cdot 111 + 3 \cdot 11 + 4) + (2 + 3 + 4 + 5)$. Como o número $9(2 \cdot 111 + 3 \cdot 11 + 4)$ é divisível por 9, precisamos somente verificar se o número $2 + 3 + 4 + 5 = 14$ é divisível por 9. Como este número não é divisível por 9, podemos concluir que 2345 também não é divisível por 9. Mais ainda, como 14 deixa resto 5 quando dividido por 9, concluímos que 2345 também deixa resto 5 quando dividido por 9.

Exemplo 39: [critério de divisibilidade por 4] Um número natural é divisível por 4 quando o número formado pelos seus dois últimos algarismos é divisível por 4. Vamos explorar este critério escrevendo, por exemplo, o número 23562 do seguinte modo: $23562 = 235 \cdot 100 + 62$. E como $100 = 4 \cdot 25$, $23562 = 235 \cdot 4 \cdot 25 + 62 = 4(235 \cdot 25) + 62$. Como $4(235 \cdot 25)$ é divisível por 4, é suficiente analisar o número 62. Como $62 = 4 \cdot 15 + 2$ vemos que 62 e, portanto, $23562 = 4(235 \cdot 25) + 62$ não são divisívies por 4. Além disso, estes números deixam resto 2 quando divididos por 4.

Agora vamos relembrar os critérios mais fáceis. Um número é divisível por 2 quando é par e um número é divisível por 6 quando é divisível, ao mesmo tempo, por 2 e por 3. Um número é divisível por 5 quanto termina em 0 ou em 5, e um número é divisível por 10 quando termina em zero. Utilize os critérios de divisibilidade para resolver os seguintes problemas.

Exercício 40: Verifique se cada um dos números é divisível por 2, 3, 4, 5, 6, 9 ou 10.

(a) 1260.

(b) 1746.

(c) 2210505.

Exercício 41: (Banco de Questões 2007, nível 1, lista 1, problema 1)

(a) Qual é o menor múltiplo positivo de 9 que é escrito apenas com os algarismos 0 e 1?

(b) Qual é o menor múltiplo positivo de 9 que é escrito apenas com os algarismos 1 e 2?

Solução.

(a) Um número é divisível por 9 se a soma dos seus algarismos é um múltiplo de 9. Logo, o número deve ter 9 algarismos iguais a 1. Assim, o menor número é: 111 111 111. Se alguém entender que o algarismo 0 deve obrigatoriamente figurar no número procurado, então a resposta é: 1 011 111 111.

(b) Devemos usar o maior número possível de algarismos iguais a 2, que devem ficar nas casas mais à direita. Assim, o menor número é: 12 222.

Exercício 42: Encontre um número que quando multiplicado por 9 resulta em um número formado somente por algarismos iguais a 1.

Solução. Assista o vídeo 6 e apresente uma solução diferente utilizando o critério de divisibilidade por 9.

Exercício 43: (Banco de Questões 2011, nível 1, problema 1) Encontre o menor múltiplo de 9 que não possui algarismos ímpares.

Solução. Como o número deve ser divisível por 9, a soma dos algarismos deve ser divisível por 9. Por outro lado, como todos os algarismos são pares, a soma dos algarismos também é par. Assim, a soma dos algarismos é no mínimo 18. O menor múltiplo de 9 com a soma dos algarismos igual a 18 é 99, mas seus algarismos são ímpares. Isto implica que o número deve ter três ou mais algarismos. Se queremos o menor número com 3 algarismos, o primeiro algarismo deve ser no mínimo 2. Neste caso, a soma dos outros dois algarismos é igual a 16 e como são pares, a única possibilidade é 288. Portanto, $288 = 9 \times 32$ é o menor múltiplo de 9 com todos os algarismos pares.

Exercício 44: (Banco de Questões 2010, nível 1, problema 136) No número $6a78b$, a denota o algarismo da unidade de milhar e b denota o algarismo da unidade. Se $x = 6a78b$ for divisível por 45, então quais são os possíveis valores de x?

Solução. Como o número x é múltiplo de $45 = 5 \times 9$, ele também é um múltiplo de 5 e de 9. Todos os múltiplos de 5 terminam em 0 ou em 5. Daí o número procurado tem a forma $x = 6a780$ ou a forma $x = 6a785$. Agora vamos achar o algarismo a, sabendo que para ser múltiplo de 9 a soma dos algarismos de x deve ser um múltiplo de 9.

- Se $x = 6a780$ então $6+a+7+8+0 = 21+a$ deve ser um múltiplo de 9. A única possibilidade é $21+a = 27$ donde $a = 6$ e $x = 66780$.
- Se $x = 6a785$ então $6+a+7+8+5 = 26+a$ deve ser um múltiplo de 9. A única possibilidade é $26+a = 27$ donde $a = 1$ e $x = 61785$.

Portanto o número procurado é $x = 66780$ ou $x = 61785$.

Exercício 45: (Banco de Questões 2010, nível 1, problema 169) Qual é o menor número de cinco algarismos divisível por 4 que se pode formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 9?

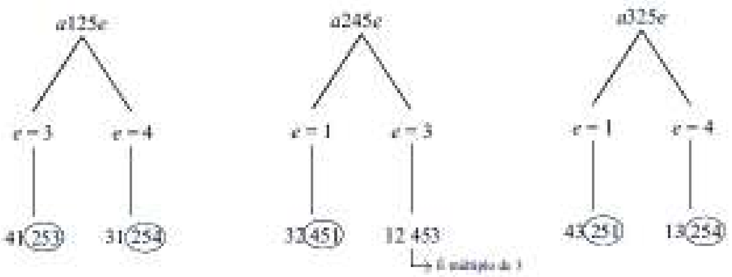
Solução. Um número é divisível por 4 se o número formado pelos seus dois últimos algarismos for divisível por 4. Assim, usando apenas os algarismos 1, 2, 3, 4 e 9, as únicas possibilidades para os dois últimos algarismos do número procurado são 12, 24, 32 ou 92. Como 9 é o maior algarismo, devemos colocá-lo "o mais à direita possível", de modo que 9 deve ser o algarismo da casa das dezenas, ou seja, nosso número termina com 92. Os outros algarismos 1, 3 e 4, devem aparecer em ordem crescente à esquerda de 92, ou seja, os três primeiros algarismos do número devem ser 134. Portanto, o número procurado é 13492.

Exercício 46: (Banco de Questões 2010, nível 1, problema 187) Os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 foram usados, cada um uma única vez, para escrever um certo número $abcde$ de cinco algarismos tal que abc é divisível por 4, bcd é divisível por 5 e cde é divisível por 3. Encontre este número.

Solução. Para que abc seja divisível por 4, seus dois últimos algarismos devem formar um número divisível por 4. Como os algarismos são 1, 2, 3, 4 e 5, as únicas possibilidades são $bc = 12$, $bc = 24$, $bc = 32$ e $bc = 52$. Por outro lado, os números divisíveis por 5 terminam em 0 ou 5. Como 0 não está incluído, segue que $d = 5$, pois bcd é divisível por 5. Isto exclui a possibilidade $bc = 52$, porque não podemos repetir o 5. Até agora temos três possibilidades, a saber:

$$a125e, \ a245e \text{ e } a325e.$$

Examinemos estes três casos para escolher os algarismos a e e, lembrando que não pode haver repetição.



Após analisar todas as possibilidades, na figura acima todos os números circulados *cde* não são múltiplos de 3, com exceção de *cde* = 453. Portanto, vemos que apenas o 12453 atende a todas as hipóteses do problema.

Exercício 47: (Banco de Questões 2010, nível 1, problema 224) O dobro de um número, quando dividido por 5, deixa resto 1. Qual é o resto da divisão deste número por 5?

Solução 1. O dobro do número procurado é um múltiplo de 5 acrescido de 1. Como os múltiplos de 5 terminam em 0 ou 5, o dobro termina em 1 ou 6. Mas o dobro é um número par, logo termina em 6. Assim, o número termina em 3 ou 8 e, portanto, dividido por 5, deixa resto 3.

Solução 2. Sabemos que o número inteiro n procurado satisfaz $2n = 5m+1$, para algum inteiro m. Então o produto $5m = 2n-1$ de 5 por m é ímpar, o que implica que m é ímpar. Assim, $m = 2k+1$, para algum inteiro k e, portanto,

$$2n = 5m + 1 = 5(2k + 1) + 1 = 10k + 6 = 2(5k + 3),$$

ou seja, $n = 5k + 3$ deixa resto 3 na divisão por 5.

Exercício 48. O vídeo 40 e o vídeo 41 apresentam, respectivamente, critérios de divisibilidade por 11 e por 7. Estude estes vídeos e em seguida aplique estes critérios para, sem efetuar a divisão, determinar se

"verfinal"
2015/3/16
page 62
Estilo OBMEP

cada um dos números a seguir é divisível por 7 ou por 11.

(a) 145 659.

(b) 4 754 542.

(c) 240 394.

(d) 2 436.