**Programa de Iniciação Científica Júnior – 2016 (PIC – 2016)**

**Encontro 4 – Aritmética 2 – Representação Decimal e Critérios de divisibilidade**

**Professor Cristiano Rodolfo Tironi**

1. **Representação Decimal**

O modo universalmente utilizado na atualidade é a representação decimal posicional. Nesse sistema, todo número natural é representado por uma sequência formada pelos algarismos

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.$$

Por serem 10 esses algarismos, o sistema é chamado de decimal. O sistema é também dito posicional, pois cada algarismo, além de seu valor intrínseco, possui um peso que lhe é atribuído em função de sua posição dentro de um número. Esse peso é uma potência de 10 e varia do seguinte modo:

O algarismo da extrema direita tem peso $10^{0}=1;$ o seguinte, sempre da direita para a esquerda, tem peso $10^{1}=10;$ o seguinte tem peso $10^{2}=100;$ o seguinte tem peso $10^{3}=1000$ etc.

Assim, o número 1458, no sistema decimal representa o número

$$1×10^{3}+4×10^{2}+5×10+8$$

Todo número inteiro possui uma única representação decimal, ou seja, um número inteiro n admite uma única representação da forma:

$$n=a\_{m}⋅10^{m}+a\_{m-1}⋅10^{m-1}+…+a\_{2}10^{2}+a\_{1}⋅10+a\_{0}$$

Onde os $a\_{i} $são tais que $0\leq a\_{i}\leq 9, i=0,1,2,3,…,m.$

Os termos $a\_{i}$ são chamados de dígitos ou algarismos.

Cada algarismo de um número possui uma ordem, contada da direita para a esquerda. Assim, no exemplo acima, o 8 é de primeira ordem, o 5 de segunda ordem, o 4 de terceira ordem e o 1 de quarta ordem.

Cada três ordens, também contadas da direita para a esquerda, constituem uma classe. As classes são usualmente separadas por um ponto. A seguir damos os nomes das primeiras classes e ordens:

$$Classe das Unidades\left\{\begin{array}{c}unidades 1ª ordem\\dezenas 2ª ordem\\centenas 3ª ordem\end{array}\right.$$

$$Classe do Milhar\left\{\begin{array}{c}unidades de milhar 4ª ordem\\dezenas de milhar 5ª ordem\\centenas de milhar 6ª ordem\end{array}\right.$$

$$Classe do Milhão\left\{\begin{array}{c}unidades de milhão 7ª ordem\\dezenas de milhão 8ª ordem\\centenas de milhão 9ª ordem\end{array}\right.$$

EXEMPLOS:

1. Representar o número 615243 na forma decimal
2. Determine a soma de todos os múltiplos de 6 que se escrevem no sistema decimal com dois algarismos.
3. Nos tempos de seus avós não existiam as calculadoras eletrônicas e por isso eram ensinadas várias regras de cálculo mental. Uma delas era a seguinte:

Seja $a$ um número natural cujo algarismo da unidade é 5, ou seja, $a=10q+5,$ com $q$ um número natural. Mostre que $a^{2}=100q\left(q+1\right)+25. $Com isto, ache uma regra para calcular mentalmente o quadrado de $a.$ Aplique a sua regra para calcular os quadrados dos números: 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95, 105 e 205.

1. Determinar o número n de 3 algarismos, tal que se for colocado o dígito 8 à direita de n e o dígito 1 à esquerda de n, temos como resultado o número $28⋅n.$
2. Seja S a soma dos dígitos de $10^{111}-111.$ Determine S.
3. Um número é formado por dois algarismos cuja soma é nove. Se invertemos a ordem dos algarismos iremos obter um novo número igual a 5/6 do original. Esse novo número obtido é:

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Achar um inteiro positivo de dois algarismos que seja igual ao quádruplo da soma dos seus algarismos.
2. Consideramos os números inteiros de 1 a 1000 inclusive. Somemos entre si todos os que tem todos os seus dígitos pares e somemos entre si todos os que tem todos seus dígitos ímpares. Qual soma é maior?
3. Determine todos os números A de dois algarismos, sendo este um número de dois algarismos que quando somado a outro número de dois algarismos possuindo os mesmos dígitos em ordem inversa, a soma é um quadrado perfeito.
4. A soma de um número de dois dígitos com outro que possui os mesmos dígitos, porém na ordem inversa, é 55. Achar o número sabendo que a diferença entre os algarismos das dezenas e das unidades é igual a 3.
5. Critérios de Divisibilidade

Por 3: Um número é divisível por 3 se a soma dos seus algarismo é divisível por 3. Para entender este critério de divisibilidade, primeiramente precisamos observar que todas as potências de 10 deixam resto 1 quando divididas por 3:

$$10=3⋅3+1$$

$$100=3⋅33+1$$

$$1000=3⋅333+1$$

Desta observação, vamos verificar, sem efetuar a divisão, se o número 457 é ou não é divisível por 3. O número 457 pode ser escrito como $457=4⋅100+5⋅10+7$ ou ainda, $457=4\left(3⋅33+1\right)+5⋅\left(3⋅3+1\right)+7.$ Colocando o fator 3 em evidência, vemos que $457=3 \left(4⋅33+5⋅3\right)+\left(4+5+7\right).$ Como o número $3\left(4⋅33+5⋅3\right)$ é divisível por 3, precisamos somente verificar se $4+5+7=16$ é divisível por 3. Como este número não é divisível por 3, concluímos que 457 também não é divisível por 3. Mais ainda, como 16 deixa resto 1 quando dividido por 3, podemos até concluir que 457 também deixa resto 1 quando dividido por 3.

Por 9: Um número é divisível por 9 se a soma dos seus algarismos é divisível por 9.

Por 4: Um número é divisível por 4 quando o número formado pelos seus dois últimos algarismos é divisível por 4.

Por 2: Quando o número é par;

Por 5: Quando termina em 0 ou 5;

Por 6: quando é divisível por 3 e por 2;

Por 7: Um número é divisível por 7 se o número que sobra subtraído pelo dobro de seu último algarismo também é, recursivamente.

EXEMPLOS:

1. Determine um número inteiro cujo produto por 9 seja um número natural composto apenas pelo algarismo 1.
2. A) Qual é o menor múltiplo positivo de 9 que é escrito apenas com os algarismos 0 e 1?

B) Qual é o menor múltiplo positivo de 9 que é escrito apenas com os algarismos 1 e 2?

1. Encontre o menor múltiplo de 9 que não possui algarismos ímpares.
2. No número $6a78b, a$ denota o algarismo da unidade de milhar e $b$ denota o algarismo da unidade. Se $x=6a78b$ for divisível por 45, então quais são os possíveis valores de x?
3. Qual é o menor número de cinco algarismos divisível por 4 que se pode formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 9?
4. Os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 foram usados, cada um uma única vez, para escrever um certo número $abcde$ de cinco algarismos tal que $abc$ é divisível por 4, $bcd$ é divisível por 5 e $cde$ é divisível por 3. Encontre este número.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. O dobro de um número, quando dividido por 5, deixa resto 1. Qual é o resto da divisão deste número por 5?
2. Determinar todos os números de quatro dígitos $n=1a7b$ que são múltiplos de 15. ($a$ e $b são dígitos necessariamente distintos).$
3. Determinar os algarismos $x e y$ de modo que o inteiro:
4. 67xy seja divisível por 5 e por 11.
5. 5x6y seja divisível por 3 e por 4.
6. 56x21y seja divisível por 9 e por 10.
7. 34xx58y seja divisível por 9 e por 11.
8. 231xy seja divisível por 5 e por 9.
9. Determinar os algarismos $x e y$ de modo que o inteiro:
10. X0Y seja divisível por 12
11. 5x2y seja divisível por 15
12. 1234xy seja divisível por 72
13. Seja um número $m=488a9b$, onde “$b"$ é o algarismo das unidades e “$a"$ é o algarismo das centenas. Sabendo-se que $m$ é divisível por 45, então $a+b$ é igual a:
14. O número $583ab$ é divisível por 9. O valor máximo da soma dos algarismos $a e b$, é:
15. O número 1234 não é divisível por 11, mas um número formado por uma permutação de seus algarismos pode ser divisível por 11. Por exemplo, 1243 é divisível por 11. Qual é o número total de permutações do número 1234 que é divisível por 11?
16. (Olimpíada da Rússia) Todos os números de dois dígitos de 19 à 80 são escritos em linha reta sem espaços. É obtido o número 192021...7980. Este número é divisível por 1980?