Módulo de Números Naturais

Números Naturais e Problemas de Contagem.

8º ano

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Números Naturais
Números Naturais e Problemas de Contagem

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Qual a quantidade de elementos do conjunto que possui todos os números naturais de 8 até 908?

Exercício 2. Quantos elementos há no conjunto $\{7, 14, 21, \ldots, 679, 686\}$?

Exercício 3. Quantos elementos há no conjunto $\{14, 19, 24, \ldots, 1004, 1009\}$?

Exercício 4. Entre n pessoas existem duas com o mesmo signo. Qual o menor valor de n que garante esse fato?

Exercício 5. Quantos números escrevemos ao numerarmos as páginas de um livro de 10 até 20? E quantos algarismos são usados para isso?

Exercício 6. Numa floresta há 1000 jaqueiras. É conhecido que uma jaqueira não tem mais do que 600 frutos. Prove que existem 2 jaqueiras que têm a mesma quantidade de frutos.

Exercício 7. Uma pessoa entrou num quarto escuro, sem enxergar absolutamente nada, e abriu uma gaveta na qual havia exatamente 20 meias pretas, 15 meias brancas e 10 meias marrons. Todas estavam misturados e eram indistinguíveis ao tato. Qual a quantidade mínima de meias que essa pessoa deve retirar para que tenha certeza de ter retirado:

a) um par de meias de mesma cor?

b) um par de meias brancas?

Exercício 8. Prove que:

a) a soma de dois números pares é igual a um número par.

b) a soma de dois números ímpares resulta em um número par.

c) a soma de um número par com um número ímpar resulta em um número ímpar.

d) o produto de dois números ímpares é igual a um número ímpar.

e) o produto de dois números pares é um número par.

f) o produto de um número par com um número ímpar resulta em um número par.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 9. Ao escrevermos todos os números naturais de 40 até 1200, quantos algarismos utilizamos?

Exercício 10. Qual é a soma de todos os números de três algarismos?

Exercício 11. Qual o número mínimo necessário de pessoas num grupo para que tenhamos certeza de que:

a) três delas façam aniversário no mesmo mês?

b) quatro tenham nascido no mesmo dia da semana?

Exercício 12. Numa gaveta há 10 blusas amarelas, 12 blusas beges e 8 blusas cinzas. Suponha que sejam retiradas "n" blusas, no escuro, dessa gaveta (não há como perceber as cores). Qual o valor mínimo de "n" para que tenhamos certeza de que saiam 3 de cores distintas?

Exercício 13. Discos dentados geram um tipo de sistema associado que funciona pela propulsão em um dos discos e esse proporciona o funcionamento dos demais. A figura 1 ilustra um desses sistemas e o disco "número 1" gira no sentido horário. Analise as proposições e responda o que se pede.

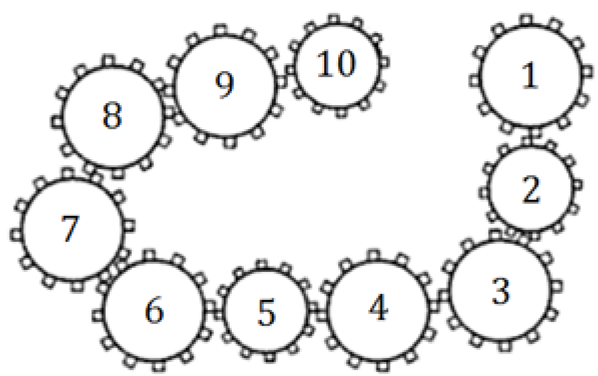

Figura 1

i) O disco 2 gira no sentido anti-horário.

ii) O disco 4 gira no sentido horário.

iii) O disco 7 gira no mesmo sentido do disco 5.

iv) O disco 10 gira no mesmo sentido do disco 3.

v) Seria possível colocar um disco 11 em contato simultâneio com os discos 1 e 10.

Quantas das proposições acima são verdadeiras?

Exercício 14. Se uma urna contém 7 bolas vermelhas, 9 pretas, 10 azuis e 8 verdes. Qual é o número mínimo de bolas que devemos retirar para que possamos ter certeza da retirada de pelo menos 4 da mesma cor?

Exercício 15. Considere o número

$$S = 1 + 2 + 3 + +4 + \cdots + 2011 + 2012 + 2013 + 2014.$$

Esse número é par ou ímpar?

Exercício 16. Escrevendo os números naturais de 1 até 10 em fila e mantendo um espaço vazio entre eles ($\square$) obtemos

$$1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \square 7 \square 8 \square 9 \square 10.$$

É possível ocupar os $\square$ com sinais de "$+$" ou "$-$" de modo que o resultado da expressão que aparecerá após a colocação dos sinais seja **zero**?

Exercício 17. Em uma urna há 32 bolas brancas, 16 bolas verdes, 7 bolas vermelhas, 3 bolas pretas e 11 bolas cinzas. Qual é o número mínimo de bolas que devemos sacar dessa urna para termos certeza de que obteremos pelo menos 13 bolas da mesma cor?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 18. Se n é um número inteiro qualquer, qual das expressões abaixo resulta num número ímpar?

a) $n^2 - n + 2$ c) $n^2 + n + 5$ e) $n^3 + 5$

b) $n^2 + n + 2$ d) $n^2 + 5$

Exercício 19. Qual a paridade do algarismo das unidades do número

$$2010^{2010} + 2011^{2011} + 2012^{2012} + \cdots + 2015^{2015} + 2016^{2016}?$$

Exercício 20. Qual o menor número de pessoas num grupo para garantir que pelo menos 4 nasceram no mesmo mês?

Exercício 21. Uma máquina contém pequenas bolas de borracha de 10 cores distintas, sendo 10 bolas de cada cor. Ao inserir uma moeda, uma bola é expelida ao acaso. Para garantir a retirada de 4 bolas da mesma cor, qual o menor número de moedas inseridas na máquina?

Exercício 22. Observe a sequência de algarismos

$$123456789101213141516 17\ldots.$$

Qual será o 1002° algarismo usado nela?

Exercício 23. Depois de d lançamentos de um dado de 6 faces temos certeza que uma das faces saiu mais de 5 vezes. Qual o valor de d?

Exercício 24. Qual a soma dos múltiplos de 3 entre 1 e 301?

Exercício 25. Quais são os pares de números[1] inteiros (x, y) tais que $\dfrac{xy}{x+y} = 144$?

Exercício 26. Quantos números inteiros e positivos satisfazem a dupla inequação $2000 < \sqrt{n \cdot (n-1)} < 2005$?

a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5.

Exercício 27. Observe que

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

daí poderíamos calcular

$$\begin{aligned}
2^3 &= (1+1)^3 &= 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1^2 + 1^3 \\
3^3 &= (2+1)^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 + 1^3 \\
4^3 &= (3+1)^3 &= 3^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 1^2 + 1^3 \\
5^3 &= (4+1)^3 &= 4^3 + 3 \cdot 4^2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 1^2 + 1^3
\end{aligned}$$

A partir da análise dos exemplos acima, desenvolva uma fórmula para o cálculo de

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

Exercício 28. A figura 2 é o composta por 100 quadrados colocados lado a lado, na qual tem-se indicadas as medidas dos lados de cada quadrado.

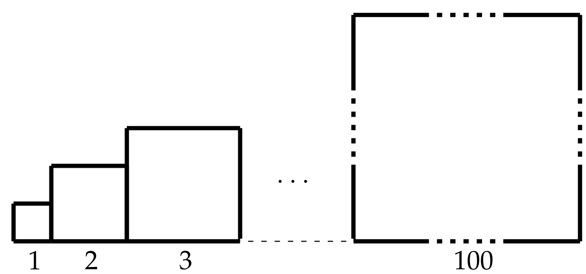

Figura 2

Qual o valor da área total dessa figura?

Exercício 29. Uma rede de computadores é formada por seis computadores. Cada computador é conectado diretamente a pelo menos um dos outros computadores. Mostre que há pelo menos dois computadores na rede que estão diretamente conectados ao mesmo número de outros computadores.

[1] "**Pares de números**" que dizer que a resposta sempre será por dois números em ordem, um represnetando o de x e outro o valor de y. Isso não tem necessarimanete relação com números pares.

Respostas e Soluções.

1. (Extraído da Vídeo Aula)
Observe que se tivéssemos começado a contar pelo número 1, não haveria dúvidas quanto a quantidade de elementos do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 908\}$. Como começamos sete unidades a mais que o 1, a resposta automática seria $908 - 8 = 900$. Este é um excelente ponto para lembrar que subtração não indica quantidade e sim “distância” entre dois números. Ao calcularmos a distância do 908 (ou de m) até o 8 (ou de n) estamos contando apenas o espaço entre eles, sendo assim, após a subtração devemos adicionar uma unidade para calcular a exata quantidade. Por fim, a quantidade será

$$908 - 8 + 1 = 901 \text{ números.}$$

De modo geral, a quantidade de números inteiros de m até n, sendo $m > n$, é $m - n + 1$.

Outra solução: Uma outra estratégia é fazermos um ajuste na contagem deslocando cada valor até o ponto inicial, o 1, e depois simplesmente olhar onde terminou. Como $8 - 7 = 1$ e $908 - 7 = 901$, a quantidade de elementos do conjunto $\{8, 9, 10, \ldots, 908\}$ é mesma que a do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 901\}$, isto é, 901 elementos.

2. Perceba que poderíamos dividir todos os elementos do conjunto por 7 para começarmos a contar do 1 ficando com $\{1, 2, 3, \ldots, 97, 98\}$. Portanto, há 98 elementos no conjunto inicial.

3. Perceba que podemos subtrair 9 de cada elemento do conjunto inicial e ficaremos com o conjunto $\{5, 10, 15, \ldots, 995, 1000\}$. Agora, dividindo todos os elementos do novo conjunto por 5 ficamos com $\{1, 2, 3, \ldots, 199, 200\}$. Portanto, há 200 elementos no conjunto inicial.

4. Como há 12 signos do zodíaco, basta $n = 13$ para que duas pessoas tenham o mesmo signo. A ideia é pensar nos Signos como as casas e nas pessoas como os pombos.

$\bullet$
Pombo sem casa, o 13° elemento.

$\boxed{\bullet}$ Casa 1 $\boxed{\bullet}$ Casa 2 $\boxed{\bullet}$ Casa 3 $\cdots$ $\boxed{\bullet}$ Casa 12

Logo, há 12 casas, e para garantir que alguma das casas tenha dois pombos, basta ter $n = 12 + 1$ pombos.

5. (Extraído da Vídeo Aula)
Observe que os números usados são

$$\{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}.$$

São $20 - 10 + 1 = 11$ números, cada um com dois algarismos, logo foram usados $11 \times 2 = 22$ algarismos.

6. Vamos pensar na quantidade de frutos como as casas e nas jaqueiras como os pombos ($\bullet$)

$$0, 1, 2, \cdots, 600$$

$\boxed{\bullet}$ 0 fruto $\boxed{\bullet}$ 1 fruto $\boxed{\bullet}$ 2 frutos $\cdots$ $\boxed{\bullet}$ 600 frutos

Agora coloquemos as jaqueiras (que serão os pombos) nas respectivas casas que representam suas quantidades de frutos.

$\bullet \searrow$
Caso ocupemos todas as casas, ainda haverá
399 jaqueiras a serem distribuídas.

$\boxed{\bullet}$ 0 fruto $\boxed{\bullet}$ 1 fruto $\boxed{\bullet}$ 2 frutos $\cdots$ $\boxed{\bullet}$ 600 frutos

Como $1000 > 601$, o PCP garante que alguma casa terá dois pombos.

7. Considere as três cores como sendo as casas e as meias retiradas como os pombos.

a) Pelo Princípio da Casa dos Pombos, se retirarmos 4 meias, pelo menos duas delas terão a mesma cor. Para ver que esse é o número mínimo, note que é possível pegarmos uma meia de cada cor nas três primeiras retiradas e não formarmos um par.

$\bullet$
4^a meia.

$\boxed{\bullet}$ Meias Pretas $\boxed{\bullet}$ Meias Brancas $\boxed{\bullet}$ Meias Marrons

Resposta: 4 meias.

b) Observe que o cenário mais difícil para o objetivo é retirar todas as meias de cor preta, todas as meias de cor marrom e depois o par de cor branca. Assim, deveremos retirar $20 + 10 + 2 = 32$ meias para garantir o par de cor branca.

$\bullet$
32^a meia

$\boxed{\text{20 meias}}$ Meias Pretas $\boxed{\bullet}$ Meias Brancas $\boxed{\text{10 meias}}$ Meias Marrons

Resposta: 32 meias.

8. Sejam x e y números inteiros pares, então podemos escrevê-los como $x = 2a$ e $y = 2b$, para a e b inteiros. Analogamente, se w e z são números inteiros ímpares, podemos escrever $w = 2c + 1$ e $z = 2d + 1$, com c e d inteiros.

a)

$$\begin{aligned} x + y &= 2a + 2b \\ &= 2(a + b), \end{aligned}$$

é par.

b)

$$\begin{aligned} w + z &= 2c + 1 + 2d + 1 \\ &= 2(c + d + 1), \end{aligned}$$

é par.

c)

$$\begin{aligned} x + w &= 2a + 2c + 1 \\ &= 2(a + c) + 1, \end{aligned}$$

é ímpar.

d)

$$\begin{aligned} w \cdot z &= (2c + 1)(2d + 1) \\ &= 2(2cd + c + d) + 1, \end{aligned}$$

é ímpar.

e)

$$\begin{aligned} x \cdot y &= 2a \cdot 2b \\ &= 2 \cdot 2ab, \end{aligned}$$

é par.

f)

$$\begin{aligned} x \cdot w &= 2a \cdot (2c + 1) \\ &= 2(2ac + a), \end{aligned}$$

é par.

9. (Extraído da Vídeo Aula)
Observe que de 40 até 99 há $99 - 40 + 1 = 60$ números de dois algarismos cada, logo foram utilizados $60 \times 2 = 120$ algarismos. Agora, de 100 até 999 há $999 - 100 + 1 = 900$ números de três algarismos, o que totaliza $900 \times 3 = 2700$ algarismos. Seguindo de 1000 até 1200 são $1200 - 1000 + 1 = 201$ números com quatro algarismos, ou seja, $201 \times 4 = 804$. Por fim, teremos

$$120 + 2700 + 804 = 3624 \text{ algarismos utilizados.}$$

10. A soma pedida é

$$\begin{aligned} S &= 100 + 101 + 102 + \cdots + 999 \\ &= \frac{900 \cdot (100 + 999)}{2} \\ &= 494550. \end{aligned}$$

11. (Extraído da Vídeo Aula)

a) Como são 12 meses, com 24 pessoas no grupo não é possível garantir que três delas façam aniversário no mesmo mês, afinal poderíamos ter exatamente 2 em cada mês. Agora, com 25 pessoas teremos certeza pois, se cada mês receber no máximo dois aniversariantes, a 25^a pessoa ficará sem data de aniversário possível. Logo, é preciso, no mínimo, 25 pessoas.

b) Como são 7 dias na semana, não basta termos 21 pessoas, pois poderíamos ter 3 pessoas nascidas em cada dia. Com a 22^a pessoa, com certeza, haverá um dia no qual 4 pessoas nasceram. Portanto, no mínimo, deveremos ter 22 pessoas.

12. (Extraído da Vídeo Aula)
Se tirarmos 8 blusas, podem ser todas cinzas; tirando 10 blusas, podem ser todas amarelas; e sendo 12, podemos ser todas beges. No caso de 18 poderiam ser as cinzas e as amarelos; para 20, as beges e as cinzas; e para 22 as amarelas e as beges. Mas, com certeza, se forem 23 teremos uma de cada cor.

13. (Adaptado do livro Círculos Matemáticos)
Observe que cada disco dentado gira no sentido inverso que o dos seus vizinhos. Como o disco 1 gira no sentido horário, o 2 ficará no anti-horário, o 3 no horário, e assim por diante. O que conclui que os ímpares ficaram no sentido horário e os pares no anti-horário. Portanto, as proposições verdadeiras são as *i* e *iii*. Serão apenas 2 proposições corretas.

14. Como são 4 cores, poderemos dar o "azar" de em várias retiradas sempre chegarmos em 3 bolas de cada cor, sem antes obtermos na 4^a bola de cor repetida. Tirar 3 bolas de cada cor pode ser obtido após $4 \times 3 = 12$ retiradas. Daí, com certeza, a 13^a bola repetirá pela quarta vez alguma cor. Portanto, temos que retirar, no mínimo, 13 bolas.

15. (Extraído da Vídeo Aula)
Observe que se escrevermos a soma pedida no sentido inverso obteremos

$$S = 2014 + 2013 + 2012 + 2011 + \cdots + 4 + 3 + 2 + 1$$

e, somando a forma original com sua escrita invertida, também obteremos

$$\begin{array}{rclcrclcrcr} S & = & 1 & + & 2 & + \cdots + & 2013 & + & 2014 \\ S & = & 2014 & + & 2013 & + \cdots + & 2 & + & 1 \\ 2S & = & 2015 & + & 2015 & + \cdots + & 2015 & + & 2015 \\ 2S & = & 2014 & \times & 2015 & & & & \\ S & = & 1007 & \times & 2015, & & & & \end{array}$$

que é o produto de números ímpares. Logo a soma dada é ímpar.

Observação: Veja que

$$2S = \underbrace{2015 + 2015 + \cdots + 2015 + 2015}_{\text{2014 parcelas iguas a 2015.}}$$

pode ser facilmente transformada em uma multiplicação em função da igualdade das parcelas, resultando em

$$2S = 2014 \times 2015.$$

Essa ideia pode ser aplicada na soma

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n.$$

Repetindo o método chegaremos a

$$\begin{array}{ccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & +\cdots+ & (n-1) & + & n \\ S & = & n & + & (n-1) & +\cdots+ & 2 & + & 1 \\ 2S & = & (n+1) & + & (n+1) & +\cdots+ & (n+1) & + & (n+1) \\ 2S & = & n & \times & (n+1) & & & & \end{array}$$

que produz a fórmula para a soma S dos naturais de 1 até n:

$$S = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

16. (Adaptado da Vídeo Aula)
Observe que se isso for possível, poderemos separar os números de 1 até 10 em dois conjuntos de modo que a soma S dos elementos do primeiro seja igual a soma dos elementos do segundo. Como esses conjuntos têm todos os números citados, então

$$\begin{aligned} S + S &= 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 10 \\ 2S &= \frac{10 \cdot (1+10)}{2} \\ 2S &= 55. \end{aligned}$$

Mas $2S$ é um número par e 55 é um número ímpar, então essa equação não tem solução inteira, daí, não tem como cumprir o que o problema perguntou.

17. Primeiro observe que não poderemos ter qualquer cor com 13 bolas, apenas conseguiremos isso com as brancas e as verdes. Sendo assim, por "azar", poderíamos ter tirado todas as cores que não resolvem o problema, totalizando $7 + 3 + 11 = 21$ bolas. Agora restam apenas duas cores e como queremos treze bolas de cor repetida devemos tirar ao menos mais $12 + 12 + 1 = 25$. O que resulta em

$$21 + 25 = 46.$$

18. (Adaptado da OBMEP)
Observe que se n é ímpar, então n^2 é ímpar, como está provado no exercício 8. Assim, $n^2 \pm n$ será par. Como deseja-se um número ímpar, basta somarmos um ímpar. A resposta está na letra **c**.

19. Observe que 2010^{2010} possui unidade par, pois é o produto de números pares, já 2011^{2011} ficará com unidade ímpar, 2012^{2012} terá unidade par e essa alternância continuará. Por fim, a paridade resultante será

$$\text{par} + \text{ímpar} + \text{par} + \text{ímpar} + \text{par} + \text{ímpar} + \text{par} = \text{ímpar}.$$

20. (Extraído do Vestibular da PUC/RJ)
Tome os 12 meses como as casas e as n pessoas como os pombos. Se houver uma distribuição de 3 pessoas em cada mês, não se chegará ao objetivo do problema e já teríamos $12 \times 3 = 36$ pessoas no grupo. Agora basta que mais uma pessoa seja colocada em qualquer uma das casas para concluir o problema. Portanto, 37 pessoas num grupo garantem que ao menos 4 nasceram no mesmo mês.

21. (Extraído do Vestibular da UERJ/RJ - 2011)
Se retirarmos 30 bolas, é possível que existam 3 bolas de cada cor e o objetivo não será cumprido. Com 31 bolas, pelo menos uma cor terá 4 representantes.

22. (Adaptado da Vídeo Aula)

i) de 1 até 9 são $9 - 1 + 1 = 9$ dígitos.

ii) de 10 até 99 são $(99 - 10 + 1) \times 2 = 180$ dígitos.

iii) de 100 até 999 são $(999 - 100 + 1) \times 3 = 2700$ dígitos.

COmo 9 e 180 são divisíveis por 3 e $9 + 180 < 1002 < 9 + 180 + 2700$, o 1002° será o último dígito de um número de três dígitos. Observe que de 100 até um número de três algarismos n, temos $100 - n + 1$ números de 3 algarismos, logo, são $(n - 100 + 1) \times 3$ dígitos nessa sequência. Queremos encontrar n tal que:

$$\begin{aligned} 9 + 180 + 3 \cdot (n - 99) &= 1002 \\ 3 \cdot (n - 99) &= 1002 - 189 \\ 3 \cdot (n - 99) &= 813 \\ 3n - 297 &= 813 \\ 3n &= 813 + 297 \\ 3n &= 1110 \\ n &= \frac{1110}{3}. \\ n &= 370. \end{aligned}$$

Então, ao escrevermos o número 370, teremos 1002 termos na sequência, logo o 1002° termo será o 0.

23. Como há 6 faces, para ter certeza que ao menos um delas saiu:

i) 2 vezes, deveremos ter ao menos $7 = 1 \cdot 6 + 1$ lançamentos;

ii) 3 vezes, deveremos ter ao menos $13 = 2 \cdot 6 + 1$ lançamentos;

iii) 4 vezes, deveremos ter ao menos $19 = 3 \cdot 6 + 1$ lançamentos;

iv) 5 vezes, deveremos ter ao menos $26 = 4 \cdot 6 + 1$ lançamentos; e

v) 6 vezes, deveremos ter ao menos $31 = 5 \cdot 6 + 1$ lançamentos.

A resposta é $d = 31$ lançamentos. A ideia é pensar que o número em cada face representa uma casa (6 números = 6 casas). Queremos alguma casa com mais do que d pombos (lançamentos) então deve-se distribuir os resultados dos lançamentos nas respectivas casas. Se tivermos $6d + 1$ lançamentos, não é possível que cada número tenha saído no máximo d vezes e assim teremos uma casa com pelo menos $d + 1$ pombos.

24. (Extraído da Vídeo Aula)
Os múltiplos de 3 entre 1 e 301 são

$$\{3, 6, 9, \ldots, 297, 300\}.$$

A sua soma S pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
S &= 3 + 6 + 9 + \cdots + 297 + 300 \\
S &= 3(1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100) \\
S &= 3 \cdot \left(\frac{100 \cdot (1 + 100)}{2}\right) \\
S &= 15150.
\end{aligned}$$

25. (Extraído da OBMEP)
Observe que podemos desenvolver a equação pedida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{xy}{x+y} &= 144 \\
xy &= 144x + 144y \\
xy - 144x - 144y + 144^2 &= 144^2 \\
x(y - 144) - 144(y - 144) &= 12^4 \\
(x - 144)(y - 144) &= (2^2 \cdot 3)^4 \\
(x - 144)(y - 144) &= 2^8 \cdot 3^4.
\end{aligned}$$

Como estamos trabalhando com os números inteiros, $(x - 144)$ e $(y - 144)$ dividem 144^2, ou seja, basta calcularmos o número de divisores de $144^2 = 2^8 \cdot 3^4$. Esse número possui

$$(8 + 1) \cdot (4 + 1) = 45$$

divisores inteiros positivos. Como não há restrição para os valores positivos, teremos

$$90 \text{ pares ordenados}$$

que resolvem o problema.

26. (Extraído da OBMEP)
Observe que podemos desenvolver a inequação dupla (ou simultânea) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
2000 &< \sqrt{n \cdot (n-1)} < 2005 \\
2000^2 &< \left(\sqrt{n \cdot (n-1)}\right)^2 < 2005^2 \\
2000 \cdot 2000 &< n \cdot (n-1) < 2005 \cdot 2005.
\end{aligned}$$

Então, podemos concluir que

$$n \in \{2001, 2002, 2003, 2004, 2005\},$$

totalizando 5 números inteiros e positivos. O que está na letra **e**.

27. Chame a soma pedida de S_2 e siga o que foi iniciado nos exemplos do enunciado até o $(n+1)^3$.

$$\begin{aligned}
2^3 &= 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\
3^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\
4^3 &= 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 \\
5^3 &= 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 1 \\
\vdots &= \vdots \\
(n - 1 + 1)^3 &= (n-1)^3 + 3 \cdot (n-1)^2 + 3 \cdot (n-1) + 1 \\
(n+1)^3 &= n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1
\end{aligned}$$

Agora, some todos os membros dessas equações observando que todos os termos ao cubo do lado esquerdo se anulam com os do lado direito, exceto o $(n+1)^3$ e o 1^3. Obtemos assim

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3 \cdot S_2 + 3 \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + n.$$

Por fim, chegaremos a

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

28. (Adaptado da Vídeo Aula)
Utilizaremos a fórmula desenvolvida no exercício 27, pois a área total é equivalente a soma $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2$, ou seja, é uma soma de quadrados de números inteiros. Sendo assim, obteremos

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2 &= \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} \\
&= 338350 \text{ u.a..}
\end{aligned}$$

29. Cada computador pode estar conectado a 1, 2, 3, 4 ou 5 outras máquinas. Como há 6 computadores e cinco opções de conexão, então ao menos dois computadores terão o mesmo número de conexões.

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com