Módulo de Métodos Sofisticados de Contagens

Permutação Circular

Segundo ano

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Dois colares de pérolas serão considerados iguais se um deles puder ser obtido através de uma rotação do outro, como ilustra a figura 1.

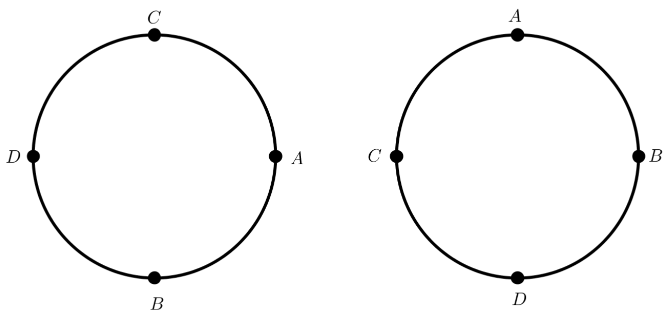

Figura 1: Colares Iguais.

De quantas formas 4 pérolas distintas (A, B, C e D) podem ser usadas para formar um colar circular?

Exercício 2. Um grupo de 6 pessoas, incluindo Nilton e Lucimar, decide jogar cartas com rodadas circulares. Após a vez de um jogador, o próximo a jogar é aquele que está à sua direita.

a) Por questões estratégicas, Nilton decide se posicionar sempre imediatamente à direita de Lucimar. De quantas formas esses 6 jogadores podem sentar ao redor da mesa?

b) Suponha que agora Nilton deseja ficar em qualquer um dos dois lado de Lucimar. A resposta anterior muda?

Comentário para professores:. Esse é um bom momento para sugestionar em sala que identificar as seguintes estruturas pode simplificar os problemas:

i) Bloco Rígido: agrupamento de símbolos sem permutação entre as respectivas posições.

ii) Bloco: agrupamento de símbolos com permutação entre as respectivas posições.

Exercício 3. De quantas maneiras 6 pessoas podem se sentar em torno de uma mesa circular?

Exercício 4. Um grupo 6 crianças decide brincar de ciranda dando as mãos e fazendo uma roda. Dentre elas estão Aline, Bianca e Carla que são muito amigas e querem sempre ficar juntas. Nessa condição, qual o número de rodas distintas que podem ser formadas?

Exercício 5. De quantos modos podemos formar uma roda com 7 crianças de modo que duas determinadas dessas crianças não fiquem juntas?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. De quantos modos 7 crianças, entre elas João e Maria, podem brincar de roda, ficando João sempre ao lado de Maria?

Exercício 7. Em uma brincadeira em um programa de TV, 6 casais devem se sentar em bancos arrumados de modo circular com a seguinte restrição: homens e mulheres devem se sentar de modo alternado, cada homem ao lado apenas de mulheres e vice-versa. De quantas maneiras esses casais podem se arrumar para a brincadeira?

Exercício 8. Fábio, Denise e Ledo vão brincar de roda, juntamente com outras 5 pessoas. De quantas formas essa roda poderá ser formada, de modo que os três fiquem juntos, mas com Denise entre Fábio e Ledo?

Exercício 9. Um grupo constituído por 4 casais se sentará em torno de uma mesa com 8 cadeiras. As pessoas sentarão de modo alternado divididas pelo seu gênero e, além disso, João e Maria estão brigados e não querem sentar-se lado a lado. Quantas arrumações diferentes poderão ser feitas com essas pessoas sentando-se nos lugares disponíveis?

Exercício 10. De quantos modos 5 meninos e 5 meninas podem formar um roda com as crianças dos mesmo sexo todas juntas?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 11. De quantas maneiras podemos dispor 5 casais e uma roda de modo que:

a) cada mulher esteja ao lado do seu marido?

b) cada mulher esteja ao lado do seu marido e pessoas do mesmo sexo não possam ficar juntas?

Exercício 12. De quantos modos 12 crianças podem ocupar seis bancos, com dois lugares cada, em uma roda gigante?

Exercício 13. Uma pirâmide pentagonal regular deve ser colorida, cada face com uma única cor, usando 6 cores distintas. De quantos modos isso pode ser feito?

Exercício 14. Quantos dados diferentes existem com a soma das faces opostas igual a 7?

Exercício 15. Uma pulseira deve ser cravejada com um rubi, uma esmeralda, um topázio, uma água-marinha, uma turmalina e uma ametista. De quantos modos isso pode ser feito supondo:

a) que a pulseira tem fecho e um relógio engastado no fecho?

b) que a pulseira tem fecho?

c) que a pulseira não tem fecho e o braço só pode entrar na pulseira em um sentido?

d) que a pulseira não tem fecho e o braço pode entrar na pulseira nos dois sentidos?

Exercício 16. As 8 faces de um prisma hexagonal regular devem ser pintadas, usando oito cores distintas, sem que haja repetição. De quantos modos isso pode ser feito?

Exercício 17. Dos 12 estudantes da uma turma, seis serão escolhidos para participar de um debate em uma mesa circular. José, Cléber, Márcia e Luíza só irão se forem juntos; de tal forma que Márcia e Luíza vão sentar lado a lado e o José e o Cléber nunca irão sentar lado a lado à mesa. De quantas maneiras distintas podem se sentar?

Respostas e Soluções

1 Exercícios Introdutórios

1. Cada distribuição das pérolas pode ser associada a uma palavra envolvendo as quatro letras A, B, C e D como indica a figura 1.

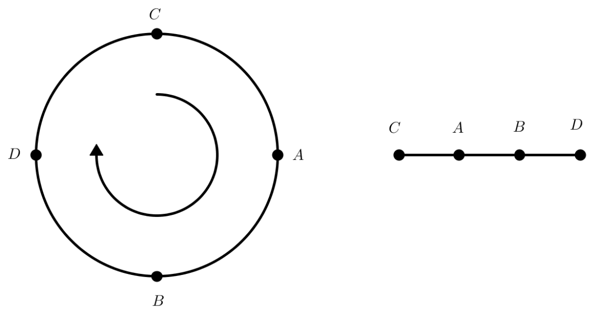

Figura 1: Associando colares e palavras.

Algumas palavras devem ser consideradas iguais pois podemos rodar o colar. Por exemplo:

$$ABCD = BCDA = CDAB = DABC.$$

Veja que cada palavra é igual à exatamente outras três palavras pois podemos rodar o colar três vezes antes de voltarmos à posição inicial e que as rotações correspondem a transposições da letra inicial para o final da palavra. Assim, uma maneira para contarmos as distribuições distintas é contarmos a quantidade total de palavras e depois as agruparmos em grupos de 4 palavras correspondendo à colares iguais entre si. Como existem $4! = 24$ palavras obtidas pelas permutações das letras A, B, C e D, o total de colares é

$$\frac{4!}{4} = 3! = 6.$$

Em geral, se tivéssemos n pérolas distintas, cada palavra teria n letras e seria igual à exatamente n outras palavras. Consequentemente, o total de colares distintos seria:

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!.$$

Usaremos a notação $PC_n = (n-1)!$ para designar o número de permutações circulares distintas de n objetos distintos em um círculo.

2. O grupo inicial de 6 pessoas pode ser representado pelas letras: A, B, C, D, L(de Lucimar) e N (de Nilton).

a) Por conta da preferência de Nilton, podemos pensar em NL como se fosse uma única letra (bloco) e em cada distribuição como a permutação circular dos símbolos: A, B, C, D e NL, como ilustra a figura 2. Portanto, a resposta para este item é $PC_5 = 4! = 24$.

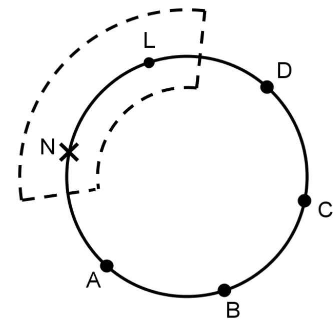

Figura 2: Nilton à direita de Lucimar.

b) Sim, a reposta muda. Assim como no item anterior, podemos usar NL para representar apenas o local onde Lucimar e Nilton estarão posicionados, conforme a figura 3.

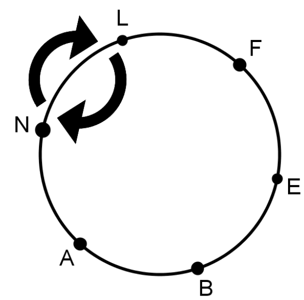

Figura 3: Nilton e Lucimar permutando...

Usaremos a contagem obtida no item anterior, pois uma vez escolhido o lugar em que eles ficarão, teremos duas opções de posicioná-los: Nilton à esquerda ou à direita de Lucimar. Portanto, pelo princípio multiplicativo, o total buscado é $2 \cdot PC_5 = 48$ disposições.

Comentário para professores:. Esse é um bom momento para sugestionar em sala que identificar as seguintes estruturas pode simplificar os problemas:

i) Bloco Rígido: agrupamento de símbolos sem permutação entre as respectivas posições.

ii) Bloco: agrupamento de símbolos com permutação entre as respectivas posições.

3. Serão $PC_6 = 5! = 120$ maneiras.

4. O grupo inicial de 6 pessoas pode ser representado pelas seguintes letras: A (de Aline), B (de Bianca), C (de Carla), D, E e F. Como as três letras A, B e C devem aparecer juntas em alguma ordem, podemos considerar o Bloco ABC, isto é, teremos apenas as 4 “pessoas”: D, E, F e ABC; distribuídas no círculo (figura 4). Portanto, inicialmente calculamos a permutação circular

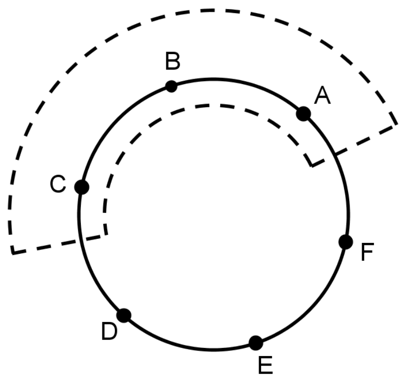

Figura 4: ABC juntas.

de 4 objetos: $PC_4 = 3! = 6$ e, em seguida, multiplicamos tal quantidade pelo número de maneiras de permutarmos as amigas que devem ficar juntas. Como as três letras A, B e C podem formar 3! permutações distintas, quantidade de distribuições distintas dessas crianças é

$$3! \cdot PC_4 = 6 \cdot 6 = 36.$$

5. Sejam A e B as crianças que não podem ficar juntas.
Uma solução:
Pode-se formar $PC_5 = 4! = 24$ rodas com as outras cinco crianças, representadas na figura 5 pelo $\bullet$.

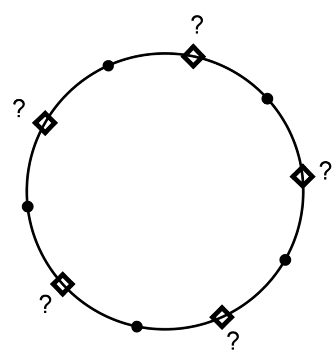

Figura 5: "?" são espaços que podem ser ocupados.

Uma vez fixada a posição das outras cinco crianças, temos 5 espaços possíveis (representados por "?") para colocar a criança A e, em seguida, apenas apenas 4 espaços possíveis para a criança B. Portanto, a quantidade de distribuições das crianças em roda é

$$24 \times 5 \times 4 = 480.$$

Outra solução:
Observando os 7 lugares na roda, podemos fixar a posição da criança A, ficando com 6 lugares livres, dos quais apenas 4 podem ser ocupados pela

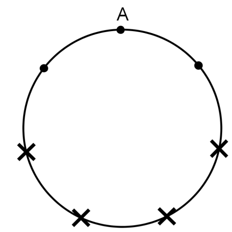

Figura 6: "$\times$" para B.

criança B (marcados com um "$\times$" na figura 6). Uma vez escolhido lugar da criança B de 4 maneiras distintas, as outras 5 crianças serem posicionais de 5! maneiras. Logo, o total de distribuições é

$$4 \times 5! = 480.$$

Mais uma solução:
Se não houvesse condição teríamos $PC_7 = 6! = 720$ maneiras de criar essa roda. Dentre essas distribuições, existem $2 \times PC_6 = 5! = 120 = 240$ distribuições em que A e B ficam juntos. Basta então calcularmos a diferença entre elas obtendo $720 - 240 = 480$ distribuições distintas.

2 Exercícios de Fixação

6. Uma solução:
Como João e Maria devem ficar juntos, JM deve ser um bloco e assim podemos permutar inicialmente 6 crianças. Dentro do bloco, podemos permutar J e M de duas formas. Portanto, o total de distribuições é $PC_6 = 5! = 120$.
Outra solução:
Observando os 7 lugares na roda, podemos fixar a posição de João, ficando com 2 lugares livres para Maria (esquerda ou direita de João), as demais crianças podem ser permutadas de $5! = 120$ maneiras. Logo, o total de maneiras é

$$2 \times 120 = 240.$$

7. Apenas como referência, primeiro organizam-se os homens na roda deixando sempre um banco vazio entre cada um deles. Isso pode ser feito de $PC_6 = 5! = 120$ maneiras. Depois, nos espaços entre os homens, devem-se arrumar as mulheres de $6! = 720$ modos. Resultando num total de $120 \times 720 = 8640$ distribuições.

8. Fábio (F), Denise (D) e Ledo (L) devem formar um bloco de modo que temos as opções de "FDL" ou "LDF". Agora devemos permutar circularmente o bloco e as outras 5 crianças. Isso pode ser feito de $PC_6 = 5! = 120$ maneiras. Finalmente, como temos duas opções de blocos, o total de distribuições será $2 \times 120 = 240$.

9. Uma solução:
Calculemos inicialmente o número de permutações em que

os homens e as mulheres estão sentados de forma alternada. Primeiro, sente os 4 homens deixando sempre uma cadeira vaga entre eles. Isso pode ser feito de $PC_4 = 3! = 6$ modos. Uma vez fixada a forma como os homens estarão dispostos, bastará arrumarmos as mulheres nas 4 cadeiras restantes. O que pode ser feito de $4! = 24$ maneiras. Assim, o total de formações possíveis é

$$6 \times 24 = 144.$$

Contemos agora o número de permutações em que João e Maria ficam juntos. Fixando João, temos dois lugares possíveis para Maria (à direita ou à esquerda). Depois disso, há $3! = 6$ maneiras de dispor os homens em cadeiras alternadas e $3! = 6$ modos para posicionar as mulheres nos espaços entre eles. Sendo assim, existem

$$2 \times 6 \times 6 = 72$$

formações que não desejamos. Consequentemente o total de distribuições em que João e Maria não estão juntos é $144 - 72 = 72$.

Outra solução:

Primeiro fixemos João como referência, logo, dos 4 espaços reservados para as mulheres, apenas 2 poderão ser ocupados por Maria (os dois mais distantes de João, conforme a figura 7).

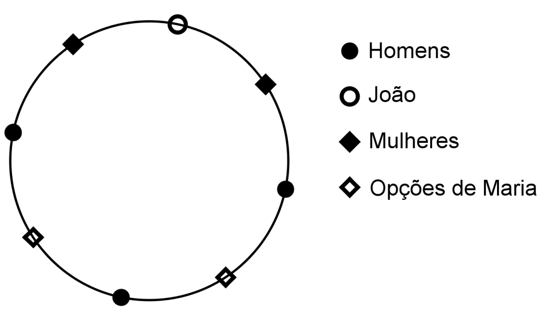

Figura 7: João e Maria.

Os homens poderão se sentar nos 3 lugares restantes de $3! = 6$ modos e as mulheres também. O que resulta em

$$2 \times 6 \times 6 = 72 \text{ arrumações possíveis.}$$

10. Só há dois blocos na questão, o dos meninos e o das meninas, o que gera apenas um tipo de roda (ou para os acostumados com fórmulas: $PC_2 = 1! = 1$). Em cada bloco há $5! = 120$ maneiras de permutar as crianças do mesmo gênero. Portanto, o número de rodas é

$$PC_2 \times 120 \times 120 = 14400.$$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

11. a) Se cada mulher deve ficar ao lado do seu marido, inicialmente permutamos os 5 blocos diferentes que representam os casais de $PC_5 = 4!$ maneiras. Dentro dos blocos, podemos ter a mulher à esquerda ou à direita do homem. Assim, o total de rodas distintas é:

$$24 \times 2^5 = 24 \times 32 = 768.$$

b) Com cada mulher ao lado do seu marido e pessoas do mesmo sexo separadas temos as mesmas $PC_5 = 4!$ formações dos blocos. Uma vez escolhida a ordem dentro de um dos bloco, todos os outros estarão determinados. Portanto, o total de rodas distintas é

$$24 \times 2 = 48$$

.

12. Uma solução:

Para escolher as possíveis duplas para ocupar os bancos, inicialmente usemos combinações simples escolhendo um par de cada vez:

$$C_{12,2} \cdot C_{10,2} \cdot C_{8,2} \cdot C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,2} = \frac{12 \times 11}{2!} \cdot \frac{10 \times 9}{2!} \cdot \frac{8 \times 7}{2!} \cdot \frac{6 \times 5}{2!} \cdot \frac{4 \times 3}{2!} \cdot \frac{2 \times 1}{2!} = \frac{12!}{2^6}$$

Nessa contagem, algumas escolhas de pares geram a mesma divisão em cinco duplas. Para corrigir isso, como cada escolha de duplas pode ser permutada de $6!$ formas gerando outras escolhas equivalentes, basta dividir o resultado anterior por tal número:

$$\frac{12!}{2^6 \cdot 6!}.$$

Com as 6 duplas formadas, podemos permutá-las circularmente de $PC_6 = 5!$ formas. Para terminar, como em um banco podemos posicionar a dupla de duas formas e são 6 bancos, devemos multiplicar o resultado anterior por 2^6. Em resumo, o número total de distribuições é

$$\frac{12! \cdot 5! \cdot 2^6}{2^6 \cdot 6!} = \frac{12 \cdot 11!}{6} = 2 \cdot 11!.$$

Outra solução:

Fixemos uma das crianças em um dos bancos. Ela tem 2 opções para escolher o seu lugar. Agora, observando essa criança como referencial, as outras 11 poderão fazer uma permutação simples dos locais restantes. Assim, o total de distribuições é

$$2 \cdot 11! = 79833600.$$

13. Primeiro, observemos que, com a base pentagonal sobre uma mesa, o giro da pirâmide apoiada não cria novas disposições, apenas novas visualizações do mesmo objeto. Sendo assim, devemos fixar uma das faces laterais ("travar o giro") para perceber as diferentes colorações possíveis. Podemos escolher a cor da base de 6 maneiras e distribuir as 5 cores restantes nas outras faces usando uma permutação circular. Portanto, existem $6 \times PC_5 = 4! = 144$ colorações possíveis.

14. Coloque o dado sobre uma mesa e fixe a face superior com o 6, portanto a face oposta (a que está em contato com a superfície) será o 1. Agora escolha alguma das faces laterais e coloque o 5, girando para ficar esse número de frente para você, então a respectiva face oposta (a que não está sendo vista) será o 2. Daí, restam apenas duas faces laterais (esquerda e direita) para encaixar o 3 e o 4, poderemos colocar o 3 na esquerda (automaticamente o 4 vai para a direitas) ou colocar o 4 na esquerda (automaticamente o 3 vai para a direitas). Portanto, existem dois dados diferentes.

15. a) Como há um relógio e ele define uma orentação de uso da pulseira, podemos usá-lo como referência e fixá-lo na contagem. Como temos 6 pedras, basta permutá-las para concluir que o total de pulseiras possíveis é $6! = 720$.

b) Usando o fecho como referência e permutando as pedras, obtem-se $6! = 720$ arrumações. Entretanto, como ver a pulseira de "frente" ou de "trás" não faz diferença, cada possível distribuição das pedras foi contada duas vezes. Portanto, existem $\dfrac{720}{2} = 360$ arrumações distintas das pedras.

c) Basta contar quantas distribuições de pedras existem vendo a pulseira de "frente". Existem então $PC_6 = 5! = 120$ arrumações neste caso.

d) Como não faz diferença ver a pullseira de "frente" ou de "trás", basta dividir o total do item anterior por 2 obtendo $\dfrac{120}{2} = 60$ arrumações diferentes.

16. Uma solução:
Inicialmente deve-se escolher as cores das faces hexagonais e isso pode ser feito de $C_{8,2} = 28$ modos. Agora, apoie uma das faces sobre uma mesa e perceba que girando as faces laterais não criamos novas formas, mas sim outras observações do mesmo objeto. Devemos fixar uma das faces laterais e executar a permutação circular com as 6 cores restantes, isto é, temos $PC_6 = 5! = 120$ distribuições. Assim, o total de pinturas é

$$28 \times 120 = 3360.$$

Outra solução:
Observe que se fosse uma bandeira com 8 listras, teríamos 8! maneiras de pintá-la com 8 cores distintas. Como giro entre as bases do prisma não cria uma nova disposição, devemos dividir esse número por 2. Ademais, as rotações das faces lateriais do prisma não criam novas pinturas e, portanto, devemos dividir o número total por 6. Consequentemente, existem $\dfrac{8!}{2 \cdot 6} = 3360$ pinturas diferente.

17. Primeiramente devemos observar quantos são as formas de escolher esses estudantes, para isso, vamos separar em casos:

i) No caso de não haver a participação de José, Cléber, Márcia e Luíza, restarão 8 estudantes dos quais escolheremos 6. Sendo assim, a quantidade de escolhas será igual a $C_{8,6} = 28$. E esses 6 estudantes podem ser permutados circularmente de $PC_6 = 5! = 120$ maneiras. Portanto, neste caso, a quantidade de distribuições é
$$28 \times 120 = 3360.$$

ii) No caso da participação de José, Cléber, Márcia e Luíza, restarão 8 estudantes dos quais escolheremos 2, digamos E_1 e E_2. Poderemos escolhê-los de $C_{8,2} = \dfrac{8 \cdot 7}{2!} = 28$ modos. Porém, após escolhidos esses estudantes, Márcia e Luíza formarão um bloco ML e José e Cléber deverão ficar separados, observe a figura 8.

Portanto, podemos posicionar ML, E_1 e E_2 no

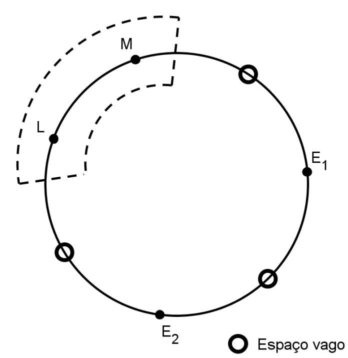

Figura 8: Márcia e Luíza, E_1 e E_2.

círculo de $2 \times PC_3 = 2! = 2$ maneiras, pois além da permutação circular entre eles dentro do bloco ML existem duas escolhas de posições. Em seguida, podemos colocar cadeiras vazias entre o bloco ML, E_1 e E_2 para receberem José e Cléber. Temos 3 opções para posicionar José e duas para posicionar Cléber. Portanto, o total de distribuições é

$$28 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 = 672$$

Somando os dois casos temos

$$3360 + 672 = 4032 \text{ arrumações.}$$

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com