Encontro 11: Resolução de exercícios da OBMEP

Exercício 1: Cada livro da biblioteca municipal de Quixajuba recebe um código formado por três das 26 letras do alfabeto. Eles são colocados em estantes em ordem alfabética: AAA, AAB, ..., AAZ, ABA, ABB, ..., ABZ, ..., AZA, AZB, ..., AZZ, BAA, BAB e assim por diante. O código do último livro é DAB. Quantos livros há na biblioteca?

(a) 676
(b) 1352
(c) 2016
(d) 2028
(e) 2030

Resolução do Exercício 1: O livro recebeu o código DAB depois de todos os demais livros, que receberam os códigos que:

(i) Iniciam com a letra A, a saber:

AAA, AAB, até AAZ, num total de 26 livros;

ABA, ABB, até ABZ, 26 livros;

...

AZA, AZB,...,AZZ, 26 livros.

Até este ponto foram codificados 26 x 26 = 676 livros.

(ii) Iniciam com a letra B, isto é, BAA, BAB,..., BAZ, BBA,..., BBZ,..,BZA, BZB,... BZZ, num total de 26 x 26 = 676 livros.

(iii) Iniciam com a letra C, de forma análoga, num total de 676 livros.

(iv) Iniciam finalmente com a letra D, totalizando somente dois livros: DAA e DAB (o último).

Portanto, o número de livros da biblioteca é 3 x 676 + 2 = 2030.

Alternativa: E

Exercício 2: Em uma Olimpíada de Matemática, foram distribuídas várias medalhas de ouro, várias de prata e várias de bronze. Cada participante premiado pôde receber uma única medalha. Aldo, Beto, Carlos, Diogo e Elvis participaram dessa olimpíada e apenas dois deles foram premiados. De quantas formas diferentes pode ter acontecido essa premiação?

(a) 20
(b) 30
(c) 60
(d) 90
(e) 120

Resolução do Exercício 2:
Chamando cada participante pela primeira letra de seu nome, as possibilidades de escolha dos 2 premiados são: AB , AC , AD , AE , BC , BD , BE , CD , CE , DE, ou seja, há 10 possibilidades. As possibilidades de escolha das duas premiações são: Ouro Ouro, Ouro Prata, Ouro Bronze, Prata Ouro, Prata Prata, Prata Bronze, Bronze Ouro, Bronze Prata e Bronze Bronze, ou seja, há 9 possibilidades. Pelo Princípio Multiplicativo, as diferentes formas de premiação são 10 x 9 = 90.

ALTERNATIVA: D

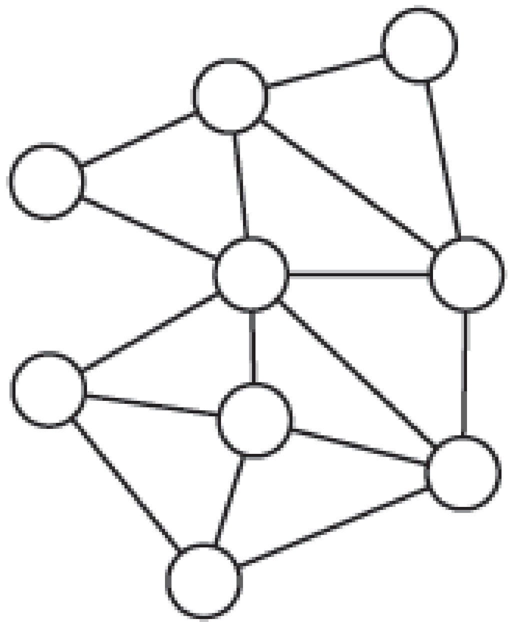
Exercício 3: Quantos são os números ímpares, de cinco algarismos, nos quais a soma dos algarismos das unidades e das dezenas é 16 e a soma de todos os algarismos é um múltiplo de 5?

(a) 90
(b) 180
(c) 216
(d) 360
(e) 532

Resolução do Exercício 3:
Como os números devem ser ímpares e como a soma dos algarismos das unidades e das dezenas deve ser igual a 16, os números devem terminar em 79 ou 97 (2 possibilidades). Na casa das dezenas de milhar temos 9 possibilidades, pois os números, tendo cinco algarismos, não podem ter 0 nesta casa. Para a casa das unidades de milhar temos 10 possibilidades (todos os algarismos de 0 a 9) e, para cada uma das escolhas anteriores. Agora, para o algarismo das centenas, devemos lembrar que o resto da divisão de um número por 5 tem que ser igual a 0, 1, 2, 3, ou 4. Assim, dado qualquer número natural, somando a ele 0, ou 1, ou 2, ou 3 ou 4 sempre encontraremos um (e só um) múltiplo de 5. Uma vez determinado qual dos algarismos 0, 1, 2, 3 ou 4 é o que produz o múltiplo de 5, basta somar 5 a ele para obter um novo algarismo (5, 6, 7, 8 ou 9) para que um novo número de cinco algarismos seja produzido, também com a propriedade de que a soma de seus algarismos seja múltiplo de 5. Portanto, independente da escolha para os algarismos da dezena e unidade de milhar, sempre haverá duas maneiras distintas de escolher os algarismos das centenas, a fim de que a soma de todos os algarismos do número seja um múltiplo de 5. Portanto, há $2\times 9 \times 10 \times 2 = 360$ possibilidades.

ALTERNATIVA: D

Exercício 4: De quantas maneiras é possível colorir cada um dos círculos da figura com uma das cores amarelo, azul e vermelho, de modo que dois círculos ligados por um segmento tenham sempre cores diferentes?

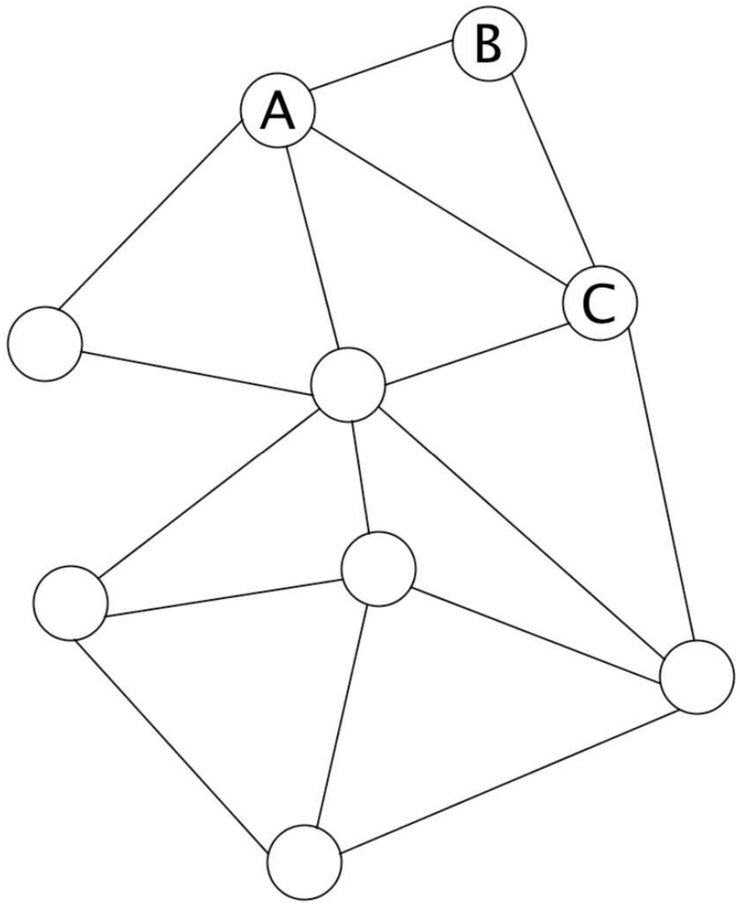


(a) 2
(b) 3
(c) 4
(d) 6
(e) 9

Resolução do Exercício 4:

Começamos a colorir a figura pelo círculo marcado com a letra A. Temos 3 opções de cores para A e, uma vez selecionada a cor de A, temos 2 possibilidades de cores para o círculo B. Para cada escolha de cores para A e B, a cor de C fica unicamente determinada pelas condições do problema. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades diferentes de colorir os círculos A, B e C. Agora notamos que, para qualquer escolha de cores para A, B e C, as cores dos círculos restantes ficam unicamente determinadas. Portanto, temos 6 maneiras diferentes de colorir os círculos da figura de acordo com as condições do enunciado.

Alternativa: D

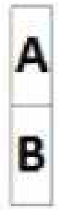


Exercício 5: Juca quer pintar os algarismos do número 2013, como na figura a seguir, de modo que cada região seja pintada com uma das cores branca, cinza ou preta e que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

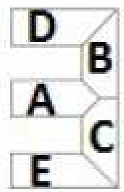
(A) Observe que Juca pode pintar o algarismo 2 de 3x2x2 maneiras diferentes. De quantas maneiras diferentes ele pode pintar o algarismo 1?
(B) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 3?
(C) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 0?
(D) Escreva uma expressão numérica que permita calcular de quantas maneiras Juca pode pintar o número 2013.

Resolução do Exercício 5:

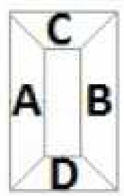
(a) O algarismo 1 é composto por dois polígonos, indicados na figura por A e B. Para pintar o polígono A, há 3 opções: branco, cinza e preto. Já para pintar o polígono B, há 2 opções, uma vez que sua cor não pode coincidir com aquela já usada para pintar A. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, o algarismo 1 pode ser pintado de $3 \times 2 = 6$ maneiras distintas.



(b) Iniciamos observando que há 3 opções para pintar o polígono A. Uma vez que A foi pintado, há duas opções para pintar o polígono B e, como o polígono C é vizinho de A e B, só há uma cor possível para C. A cor do polígono D não deve coincidir com a cor de B, logo para cada cor escolhida para B, há 2 opções para a cor de D. Analogamente, há 2 opções para a cor de E.
Assim, pelo Princípio Multiplicativo, há $3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2 = 24$ maneiras distintas para pintar o algarismo 3.



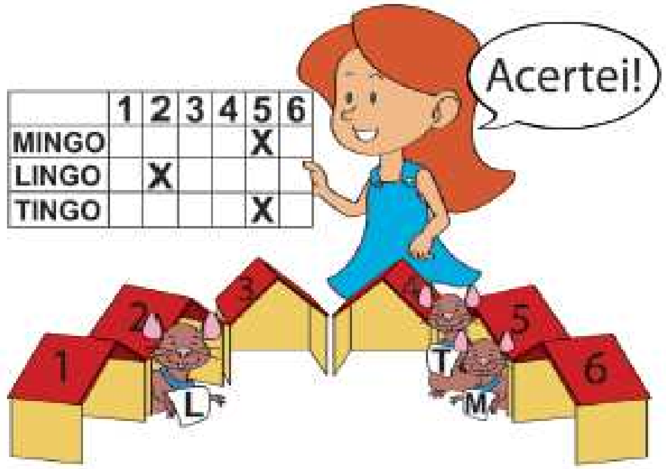
(c) Vamos distinguir os dois casos:
1º Caso: *As cores de A e B coincidem*: *n*este caso há 3 opções de cores para A e B, e restam 2 opções de cores para C e 2 para D. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o algarismo 0 pode ser pintado de
$3 \times 2 \times 2 = 12$ maneiras distintas.



2º Caso: *As cores de A e B são diferentes*: neste caso, há 3 opções de cores para pintar A e, para cada uma dessas, há 2 opções para pintar B, restando apenas 1 opção para C e também para D. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o algarismo 0 pode ser pintado de $3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$ maneiras distintas.
Segue do Princípio Aditivo que o algarismo 0 pode ser pintado de $12 + 6 = 18$ maneiras distintas.

(d) Basta pintar os algarismos 2, 0, 1 e 3; o 2 pode ser pintado de $3 \times 2 \times 2 = 12$ maneiras diferentes e o número de maneiras de pintar os outros algarismos já foi calculado nos itens anteriores. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, há
$12 \times 6 \times 24 \times 18 = 31104$maneiras distintas de pintar o número 2013.

Exercício 6: Cristina gosta de adivinhar em quais casinhas seus ratinhos Mingo, Lingo e Tingo irão se esconder, após ser aberta a gaiola em que eles moram. As casinhas são numeradas de 1 a 6 e dois ou mais ratinhos podem se esconder na mesma casinha. Ela registra suas previsões em cartões como os da figura, marcando um X em cada linha.



(A) De quantas maneiras Cristina pode preencher um cartão?
(B) De quantas maneiras ela pode preencher um cartão, supondo que os ratinhos se esconderão em três casinhas diferentes?
(C) De quantas maneiras ela pode preencher um cartão, supondo que dois ratinhos se esconderão em uma mesma casinha e o terceiro em uma casinha diferente?

Resolução do Exercício 6:
a) Cristina pode preencher cada uma das três linhas do cartão de 6 maneiras diferentes; logo o número de maneiras de preencher o cartão é $6 \times 6 \times 6 = 216$.

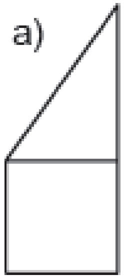
b) Se os ratinhos escolhem casinhas diferentes, então o primeiro tem 6 escolhas possíveis, o segundo tem 5 escolhas possíveis e o terceiro tem 4. Logo o número de maneiras em que Cristina pode preencher o cartão é $6 \times 5 \times 4 = 120$.

(c) Há três pares de ratinhos: ML, MT e LT. Os cartões que Cristina deve preencher correspondem a um par de ratinhos escolher uma casinha e o terceiro ratinho escolher uma casinha diferente. Logo o número de cartões deve ser $3 \times 6 \times 5 = 90$.

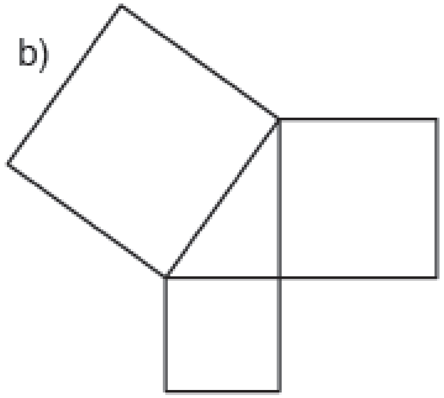
Resolução alternativa: Para preencher um cartão supondo que dois ratinhos se esconderão na mesma casinha e o terceiro em uma casinha diferente, Cristina deve colocar duas marcas “X” em uma mesma coluna e uma marca “X” em uma coluna diferente. Para colocar as duas marcas “X” ela tem 6 escolhas de coluna e, depois disso, 3 maneiras de colocar os dois “X” nessa coluna (1a e 2a linhas, 1a e 3a linhas e 2a e 3a linhas), num total de $6 \times 3 = 18$ maneiras. Isso feito, ela tem 5 escolhas para colocar o terceiro “X”, o que nos dá o total de $18 \times 5 = 90$ cartões.

Exercício 7: João vai pintar figuras compostas por quadrados e triângulos. Cada quadrado pode ser pintado de azul, vermelho ou verde e cada triângulo de azul, vermelho ou amarelo, de modo que polígonos com um lado comum não tenham a mesma cor. Determine de quantas maneiras João pode pintar cada uma das seguintes figuras.

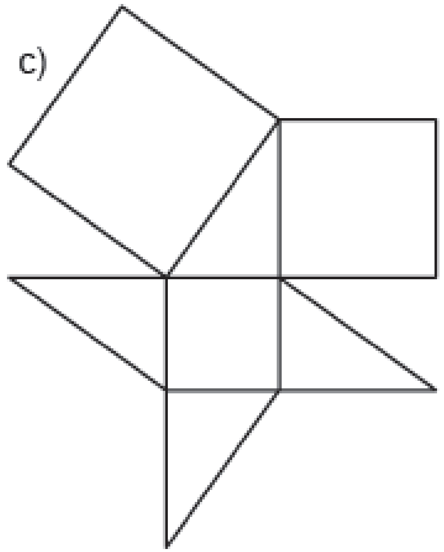
a)



b)



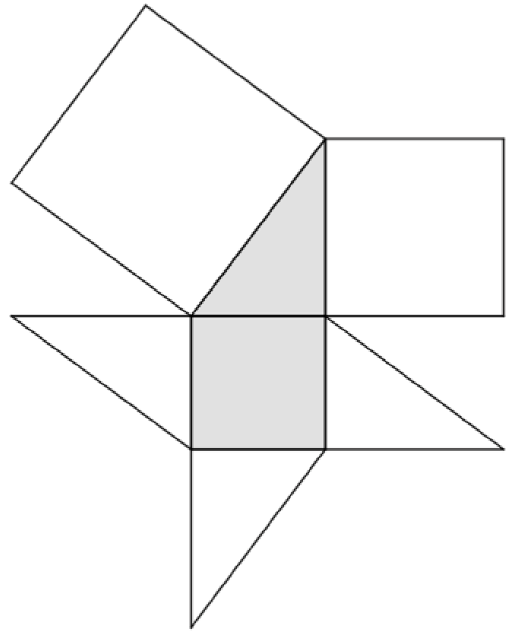
c)



Resolução do Exercício 7:
(a) Se João pintar o quadrado de azul, ele terá as escolhas vermelho e amarelo para o triângulo. Se ele pintar o quadrado de vermelho, ele terá as escolhas azul e amarelo para o triângulo. Finalmente, se ele pintar o quadrado de verde, ele terá as escolhas azul, vermelho e amarelo para o triângulo. Logo ele pode pintar a figura de
$2 + 2 + 3 = 7$ maneiras diferentes.

(b) Se João escolher azul ou vermelho para o triângulo, cada um dos quadrados poderá ser pintado de duas cores; se ele escolher amarelo para o triângulo, cada quadrado poderá ser pintado de três cores. Logo o número da maneiras diferentes de pintar essa figura é $2 \times 2 \times 2 \times 2 + 1 \times 3 \times 3 \times 3 = 43$.

(c) Se João escolher azul ou vermelho para o quadrado sombreado, os triângulos adjacentes poderão ser pintados de $2 \times 2 \times 2 \times 2$maneiras diferentes; em metade dessas maneiras o triângulo sombreado é azul ou vermelho, caso em que os quadrados adjacentes poderão ser pintados de 2×2 maneiras e na outra metade ele é amarelo, quando os quadrados adjacentes poderão ser pintados de 3×3maneiras diferentes. Nesse caso, a figura poderá ser pintada de $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times (1\times 2 \times 2 + 1\times 3 \times 3) = 208$maneiras diferentes.



Se ele escolher verde para o quadrado sombreado, os triângulos adjacentes poderão ser pintados de $3 \times 3 \times 3 \times 3$ maneiras diferentes; em dois terços dessas maneiras o triângulo sombreado é azul ou vermelho, caso em que os quadrados adjacentes poderão ser pintados de 2×2 maneiras e no terço restante ele é amarelo, quando os quadrados adjacentes poderão ser pintados de 3×3 maneiras diferentes.
Nesse caso, a figura poderá ser pintada de $3 \times 3 \times 3 \times (2 \times 2 \times 2 + 1\times 3 \times 3) = 459$ maneiras diferentes. No total, a figura poderá ser pintada de $208 + 459 = 667$maneiras diferentes.

Exercício 8: Um número natural é chamado número *circunflexo* quando:

- ele tem cinco algarismos;
- seus três primeiros algarismos a partir da esquerda estão em ordem crescente;
- seus três últimos algarismos estão em ordem decrescente.

Por exemplo, 13864 e 78952 são números circunflexos, mas 78851 e 79421 não o são.

Quantos são os números circunflexos maiores do que 77777?

(a) 30
(b) 36
(c) 42
(d) 48
(e) 54

Resolução do Exercício 8:
Não existem números circunflexos começando com 8, pois nesse caso o segundo algarismo seria 9, não sobrando nenhum algarismo maior para aparecer no centro. Por outro lado, qualquer número começando com 6 à esquerda é menor do que 77777. Assim, os circunflexos maiores do que 77777 são da forma 789**AB**, onde **A** e **B** denotam algarismos de 0 a 9. Notamos que **A** não pode ser 0, pois nesse caso não seria possível escolher um algarismo para **B**. Além disso **A** também não pode ser 9, pois os três últimos algarismos devem estar em ordem decrescente; logo **A** só pode assumir valores de 1 a 8. Se **A** for 8, **B** pode ser escolhido entre os algarismos de 0 a 7, ou seja, temos 8 escolhas para **B**. Do mesmo modo, se **A** for 7 temos 6 escolhas para **B** e assim por diante, até o caso em que **A** for 1, quando temos apenas 1 escolha para **B**. Logo o número total de números circunflexos é 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36.

Alternativa: B

Exercício 9: As peças da figura 1 são feitas de quadradinhos de cartolina cinza de um lado e branca do outro. A figura 3 mostra uma maneira de encaixar essas peças com o lado cinza para cima nos quatro quadrados da figura 2. De quantas maneiras diferentes é possível fazer isso?

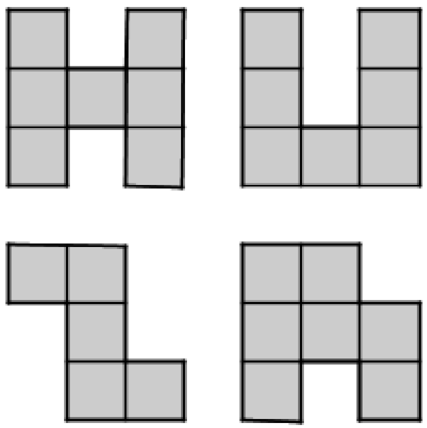


Figura 1

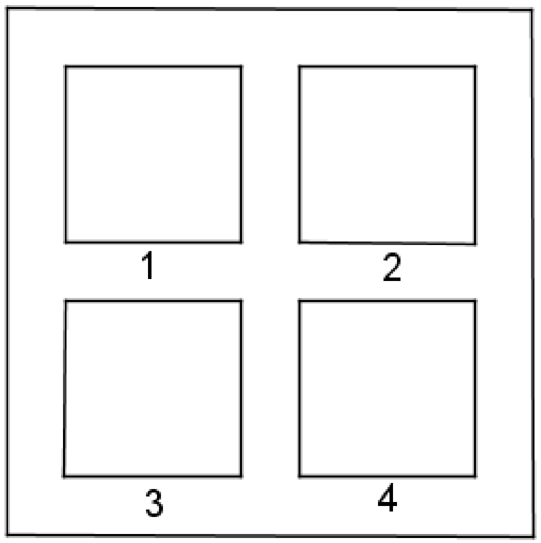


Figura 2

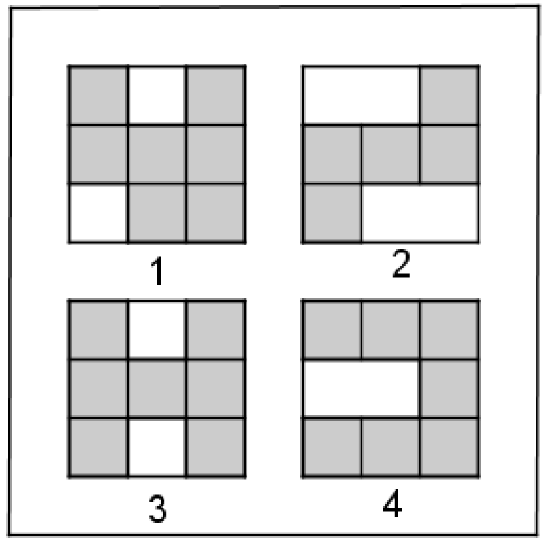


Figura 3

(a) 1024
(b) 1536
(c) 2048
(d) 3072
(e) 4096

Resolução do Exercício 9:
Vamos denotar as peças, da esquerda para a direita e de cima para baixo, de H, U, Z e R. A peça H só pode ser colocada de duas maneiras diferentes em um quadrado, a peça U de quatro maneiras diferentes, a peça Z de duas maneiras diferentes e a peça R de quatro maneiras diferentes. Uma vez fixada a posição em que as peças vão entrar nos quadrados, elas podem ser distribuídas de $4\times 3\times 2\times 1= 24$ maneiras diferentes. Logo o número de maneiras diferentes de colocar as peças nos quadrados é $2\times 4\times 2\times 4\times 24 = 1536$.

Alternativa: B

Exercício 10: Manuela quer pintar as quatro paredes de seu quarto usando as cores azul, rosa, verde e branco, cada parede de uma cor diferente. O quarto é quadrado e ela não quer que as paredes azul e rosa fiquem de frente uma para a outra. De quantas maneiras diferentes ela pode pintar seu quarto?

(a) 8
(b) 16
(c) 18
(d) 20
(e) 24

Resolução do Exercício 10:
Manuela pode começar pintando uma das 4 paredes de azul. Depois disso, sobram 2 escolhas de cor para a parede oposta (verde ou branco). Para acabar, ela pode pintar uma das paredes ainda não pintadas com uma das 2 cores não usadas, e então pintar a última parede com a cor que falta. O número de maneiras diferentes de efetuar esse procedimento é $4 \times 2 \times 2 = 16$.

Alternativa: B

Exercício 11: Dois casais estão sentados em um banco de um parque, posando para uma fotografia. De quantas maneiras diferentes essas quatro pessoas podem se sentar de modo que cada marido apareça ao lado de sua esposa na fotografia?

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4
(e) 8

Resolução do Exercício 11:

Os casais 1 e 2 podem se sentar de duas maneiras distintas:

$$\underbrace{\text{casal 1}}_{\text{esquerda}}\ \underbrace{\text{casal 2}}_{\text{direita}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\text{casal 2}}_{\text{esquerda}}\ \underbrace{\text{casal 1}}_{\text{direita}}$$

No primeiro caso, as quatro pessoas podem se sentar em 4 ordens:

$$\underbrace{\text{casal 1}}_{\text{esquerda}}\ \underbrace{\text{casal 2}}_{\text{direita}} \begin{cases} \underbrace{\text{homem 1, mulher 1}}_{\text{casal 1}},\ \underbrace{\text{homem 2, mulher 2}}_{\text{casal 1}} \\ \underbrace{\text{homem 1, mulher 1}}_{\text{casal 1}},\ \underbrace{\text{mulher 2, homem 2}}_{\text{casal 1}} \\ \underbrace{\text{mulher 1, homem 1}}_{\text{casal 1}},\ \underbrace{\text{homem 2, mulher 2}}_{\text{casal 1}} \\ \underbrace{\text{mulher 1, homem 1}}_{\text{casal 1}},\ \underbrace{\text{mulher 2, homem 2}}_{\text{casal 1}} \end{cases}$$

No segundo caso, obtemos da mesma maneira outras 4 ordens. Logo os casais podem se sentar no banco de 4 + 4 = 8 maneiras distintas.

Alternativa: E.

Exercício 12: De quantas maneiras três casais podem se sentar em um banco de modo que cada marido fique sempre ao lado de sua mulher?

(a) 6
(b) 12
(c) 44
(d) 46
(e) 48

Resolução do Exercício 12:
Os casais 1, 2 e 3 podem sentar-se em seis ordens distintas: 123, 132, 213, 231, 312 e 321. Cada casal pode sentar-se de duas maneiras distintas: com o namorado à direita ou à esquerda de sua namorada. Logo, em cada uma das 6 ordens possíveis para os casais, temos $2 \times 2 \times 2 = 8$ possibilidades. Logo o número de ordens distintas em que as seis pessoas podem sentar-se é $6 \times 8 = 48$.

Alternativa: E

Exercício 13: O Campeonato Brasileiro de Futebol de 2005 foi disputado por 22 times. Cada time enfrenta cada um dos outros duas vezes, uma vez em seu campo e outra no campo do adversário. Quantas partidas serão disputadas por cada time?

(a) 40
(b) 41
(c) 42
(d) 43
(e) 44

Resolução do Exercício 13:

ALTERNATIVA A

		9	18
			7
0			13
4	18	16	

3		9	18
1			7
0			13
4	18	16	

Devemos completar as oito casas vazias na figura à direita escolhendo números entre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, e 8, de modo que não apareçam números repetidos. Começaremos pela coluna da esquerda, escolhendo dois números diferentes com soma igual a 4; a única escolha possível é 1 e 3. Se o 3 aparecesse na casa acima do 0, os outros dois números da linha central deveriam ser escolhidos entre 2, 4, 5, 6, 7 e 8 e ter soma igual a 4, o que é impossível. Logo na casa acima do 0 deve aparecer o 1 e o 3 aparece acima do 1. Obtemos então a figura à esquerda.

Passamos agora para a linha superior. Como 3 e 9 ocupam duas casas dessa linha e $3+9=12$, na casa entre o 3 e 9 deve aparecer o 6, ou seja, temos a figura à direita. Notamos que a essa altura só podemos escolher números entre 2, 4, 5, 7 e 8.

3	6	9	18
1			7
0			13
4	18	16	

Finalmente passamos para a linha do meio. Os números das casas que faltam na linha do meio devem somar 6, ou sejam, devem ser 2 e 4. Se o 2 estiver na casa central, teremos na coluna do meio $6+2=8$; como a soma dos números dessa coluna é 18, isso não pode acontecer, pois $18-8=10$. Logo o número que aparece na casa central é o 4.

3	6	9	18
1	4	2	7
0	8	5	13
4	18	16	

A figura à esquerda mostra o quadrado completamente preenchido.

Exercício 14: Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1000 a 9999. Marcelo comprou todos os bilhetes nos quais o algarismo sete aparece exatamente três vezes e o zero não aparece. Quantos bilhetes Marcelo comprou?

(a) 32
(b) 36
(c) 45
(d) 46
(e) 48

Resolução do Exercício 14:

Os números nos bilhetes comprados por Marcelo são da forma *777X*, *77X7,7X77* ou *X777*, onde *X* representa algum dos oito algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 9. Em cada um desses casos, há 8 possibilidades para os números dos bilhetes. Por exemplo, no primeiro caso, temos os seguintes oito números: 7771, 7772, 7773, 7774, 7775, 7776, 7778 e 7779. Portanto, o número de bilhetes comprados por Marcelo é 4 x 8 = 32.

Alternativa: A