Ciclo 3 – Encontro 3

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS, TEOREMA DE TALES E SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Nível 3
PO: Márcio Reis
11° Programa de Iniciação Científica Jr.

Congruência de Triângulos, Teorema de Tales e semelhança de triângulos

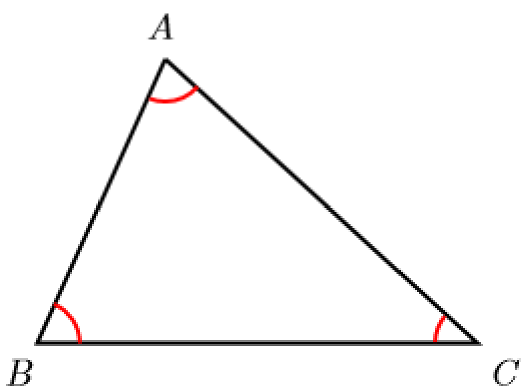
- Texto:

"Triângulos" de Ulisses Lima Parente.

"Teorema de Tales, parte I" de Marcelo Mendes de Oliveira

Introdução

Três pontos, não colineares, unidos por segmentos de reta.



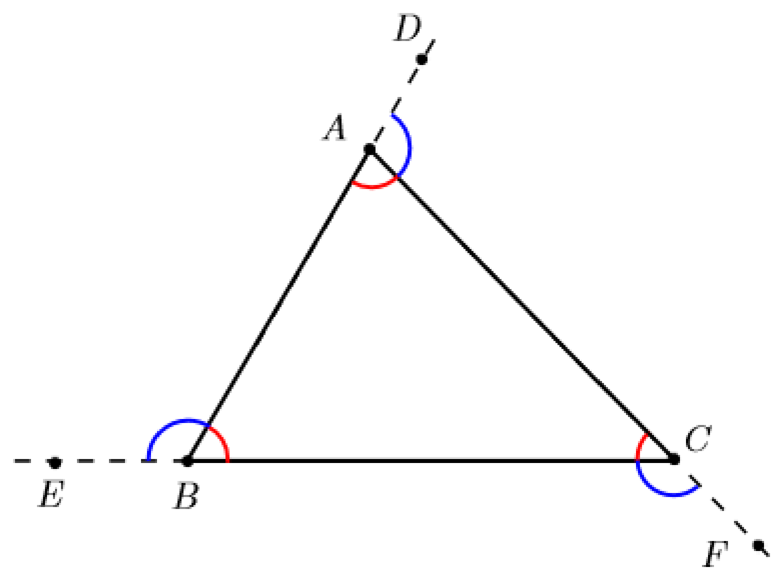
$$Segmentos\ \ \overline{AB}\ ,\ \overline{BC}\ e\ \overline{AC}$$

$$\angle BAC\ ,\ \angle ABC\ e\ \angle ACB$$

$$B\widehat{A}C = \widehat{A}\ ,\ A\widehat{B}C = \widehat{B}\ e\ A\widehat{C}B = \widehat{C}$$

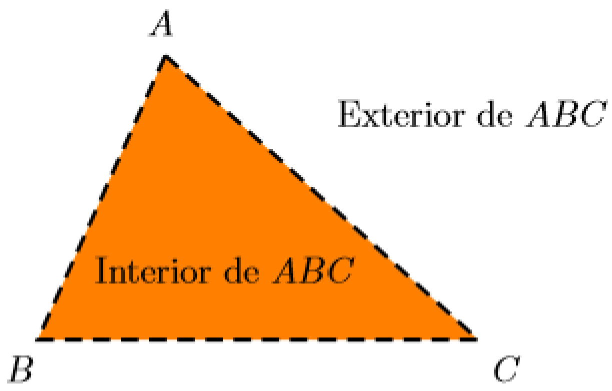
Introdução

- Ângulo externo é suplementar.



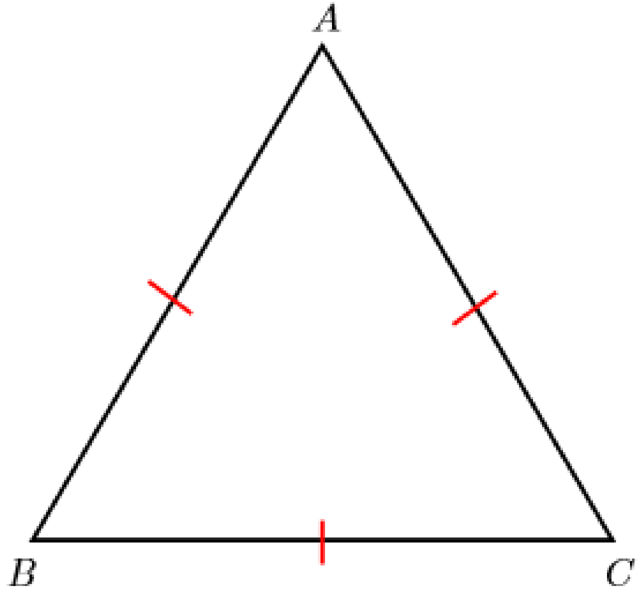
Introdução

- Interior e Exterior.



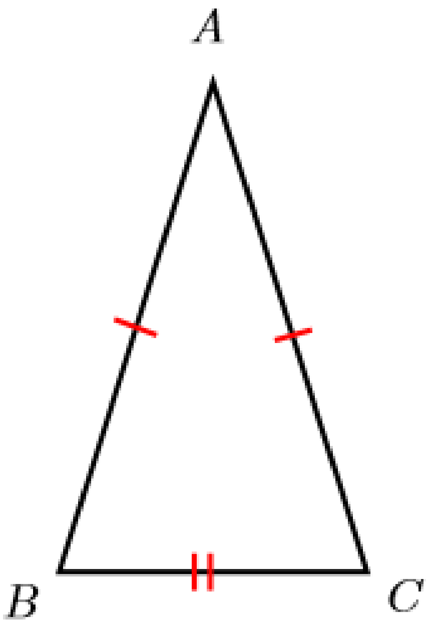
Classificação dos Triângulos

- **EQUILÁTERO:** AB = AC = BC



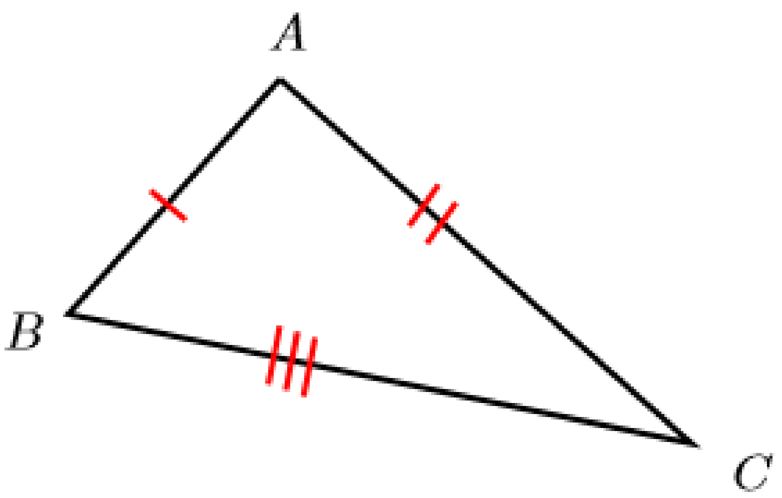
Classificação dos Triângulos

- **ISÓSCELES:** AB = AC ou AB = BC ou AC = BC



Classificação dos Triângulos

- **ESCALENO:** AB ≠ BC, AC ≠ BC e AB ≠ AC.

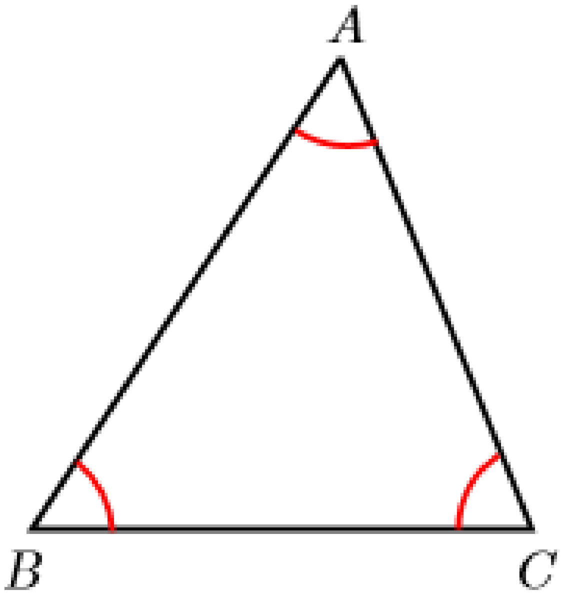


Classificação dos Triângulos

- **Todo triângulo equilátero é isósceles.**
- **A soma dos ângulos internos de todo triângulo é igual a 180°.**

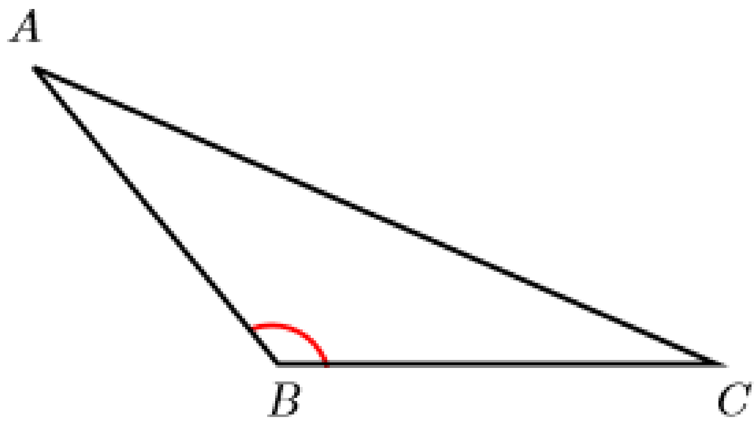
Classificação dos Triângulos

- Um triângulo é **acutângulo** se seus três ângulos internos são agudos, ou seja, se seus três ângulos internos medem menos que 90



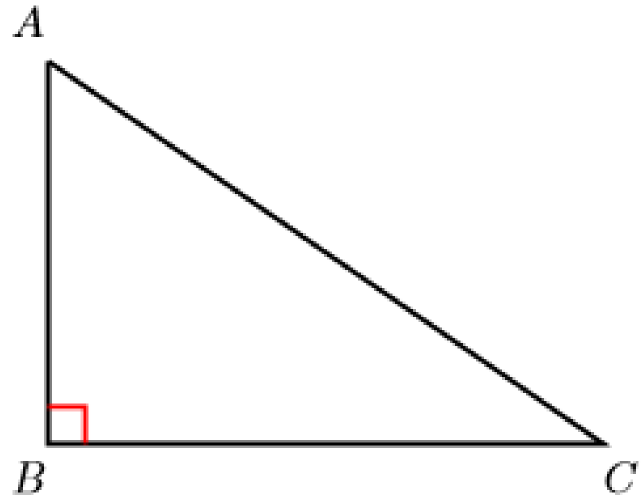
Classificação dos Triângulos

- Um triangulo é **obtusângulo** se possui um ângulo obtuso, isto é, se um de seus ângulos internos tem medida maior do que 90°.



Classificação dos Triângulos

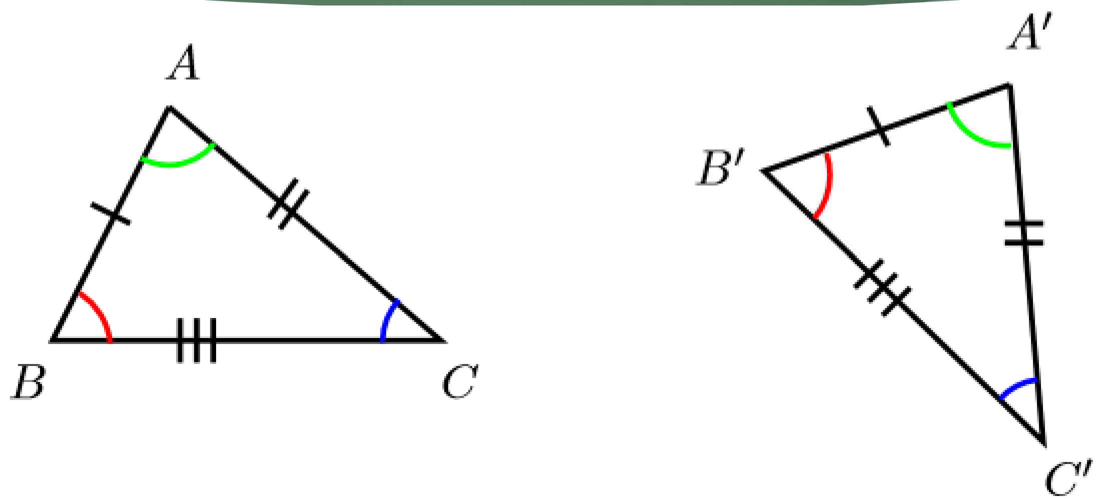
- Um triangulo é **retângulo** se possui um ângulo interno reto, ou seja, se possui um ângulo interno cuja medida é igual a 90º.



Congruência de Triângulos

- Dizemos que dois triângulos são congruentes se é possível sobrepô-los através de movimentos rígidos no espaço, sem deforma-los. Então, quando dois triângulos ABC e A′B′C′ são congruentes, é possível estabelecer uma correspondência entre os seus vértices, tal que:
- (i) os ângulos internos em vértices correspondentes tenham medidas iguais;
- (ii) os lados opostos a vértices correspondentes tenham comprimentos iguais.

Congruência de Triângulos



$$A \leftrightarrow A', \;\; B \leftrightarrow B', \;\; C \leftrightarrow C'.$$

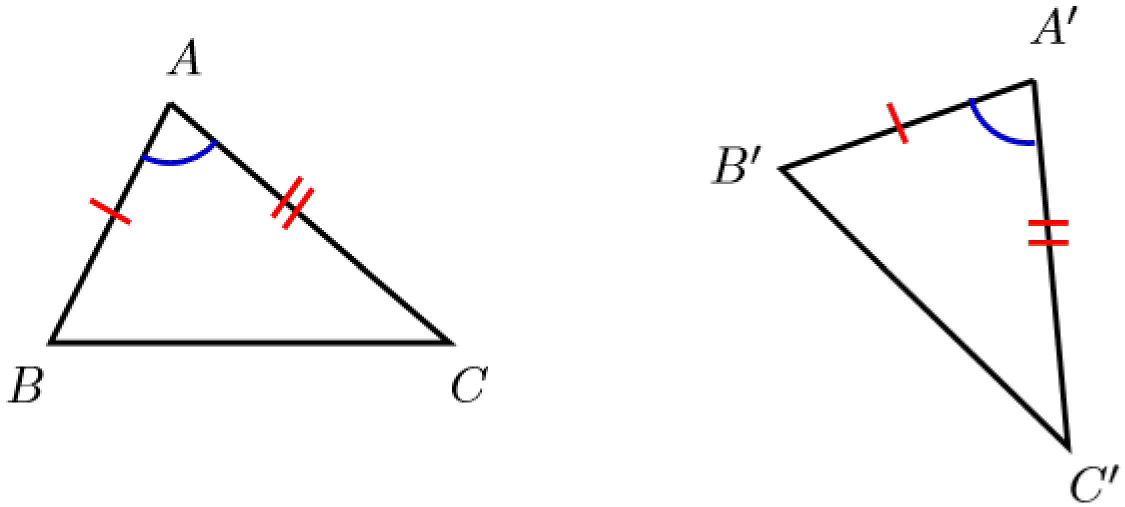
$$\widehat{A} = \widehat{A}', \;\; \widehat{B} = \widehat{B}', \;\; \widehat{C} = \widehat{C}'$$

$$BC = B'C', \;\; AC = A'C', \;\; AB = A'B'$$

Classificação dos Triângulos

Caso **LAL:** se há uma correspondência entre os vértices de dois triângulos tal que dois dos lados de um deles e o ângulo interno formado por esses dois lados sejam respectivamente iguais aos dois lados correspondentes no outro triângulo e ao ângulo formado por esses outros dois lados, então os dois triângulos são congruentes.

Classificação dos Triângulos

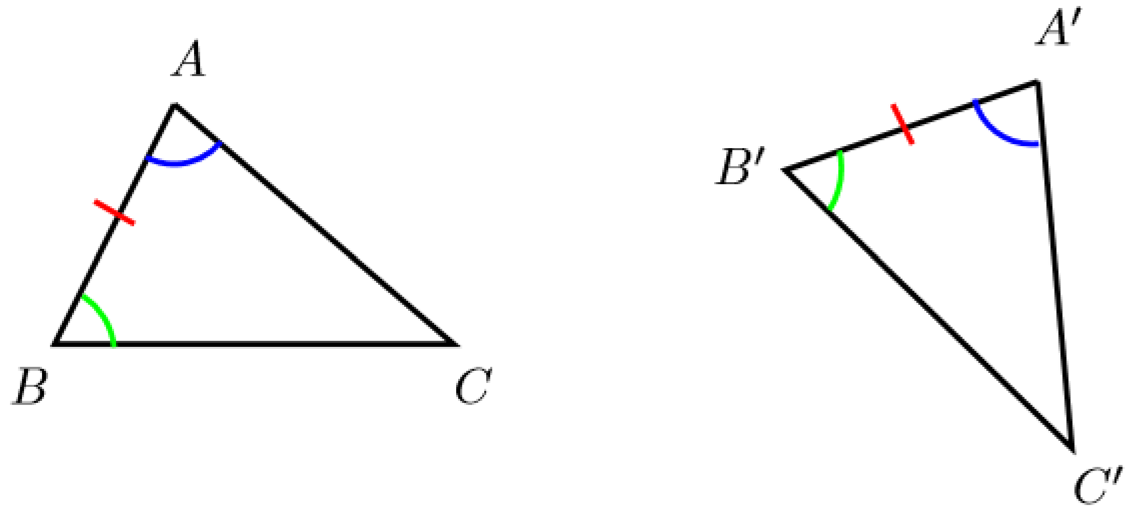


$$AB = A'B' \,,\ \widehat{A} = \widehat{A'} \text{ e } AC = A'C'$$

Classificação dos Triângulos

Caso **ALA**: se há uma correspondência entre os vértices de dois triângulos tal que um dos lados de um deles e os ângulos adjacentes a esse lado sejam respectivamente iguais ao lado correspondente no outro triângulo e aos ângulos adjacentes a esse outro lado, então os dois triângulos são congruentes.

Classificação dos Triângulos

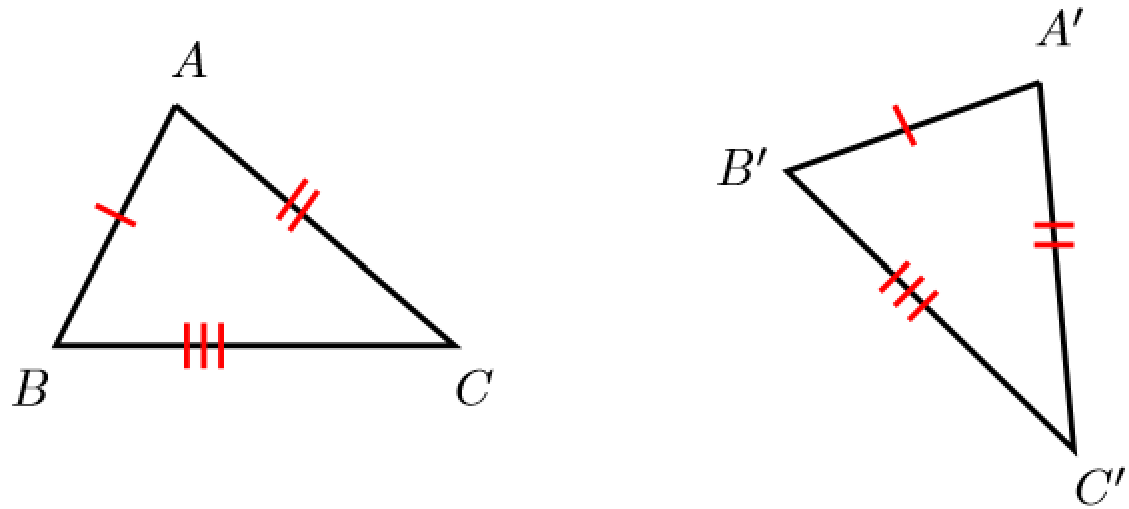


$$\widehat{A} = \widehat{A'}\ ,\ AB = A'B'\ e\ \widehat{B} = \widehat{B'}$$

Classificação dos Triângulos

Caso **LLL**: se há uma correspondência entre os vértices de dois triângulos tal que os três lados de um deles sejam respectivamente iguais aos lados correspondentes no outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

Classificação dos Triângulos



$$AB = A'B' \;,\; AC = A'C' \text{ e } BC = B'C'$$

Classificação dos Triângulos

Proposição 1. *Se ABC é um triângulo isósceles com $AB = AC$, então $\widehat{B} = \widehat{C}$.*

Prova. Seja M o ponto médio do lado $\overline{BC}$. Em relação aos triângulos ABM e ACM, temos que $BM = CM$ (pois ambos são iguais a $\frac{1}{2} \cdot BC$), $AB = AC$ (por hipótese) e o lado AM é comum (veja a Figura 14). Portanto, esses dois triângulos são congruentes pelo caso de congruência LLL, com a correspondência de vértices

$$A \leftrightarrow A, \quad B \leftrightarrow C, \quad M \leftrightarrow M.$$

Em particular, segue daí que $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Classificação dos Triângulos

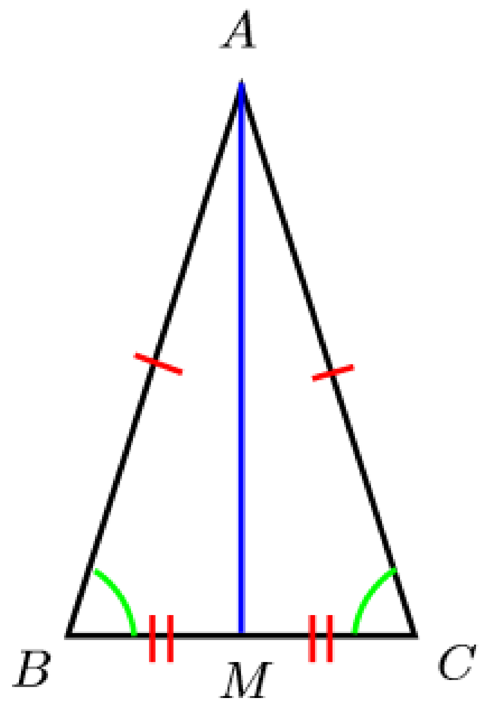


Figura 14: ângulos da base de um triângulo isósceles.

Classificação dos Triângulos

Proposição 2. *Se dois dos ângulos de um triângulo são congruentes, então ele é isósceles.*

Prova. Seja ABC um triângulo tal que $\widehat{B} = \widehat{C}$. Então, utilizando a correspondência

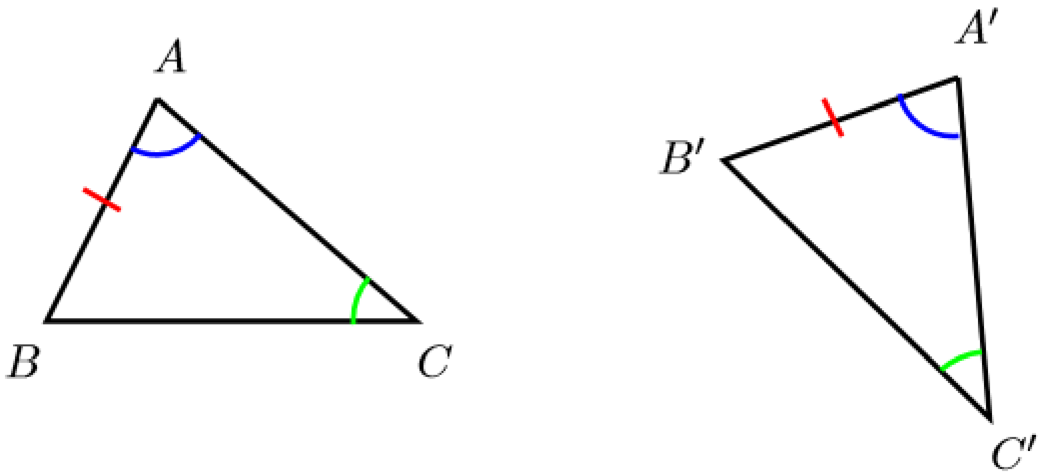
$$A \leftrightarrow A, \;\; B \leftrightarrow C, \;\; C \leftrightarrow B,$$

temos que ABC e ACB são triângulos conguentes, pelo caso ALA. Daí, segue que $AB = AC$.

Classificação dos Triângulos

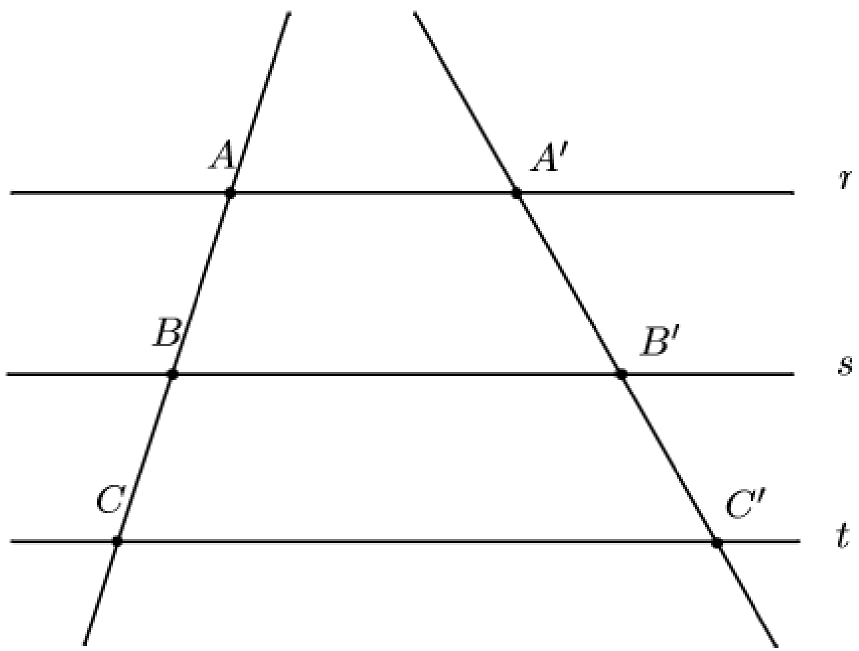
Caso **LAAo**: se há uma correspondência entre os vértices de dois triângulos tal que um dos lados, um dos ângulos a ele adjacentes e o ângulo oposto a esse lado em um dos triângulos sejam respectivamente iguais, mediante tal correspondência, a um lado no outro triângulo, a um ângulo adjacente a esse lado e ao ângulo oposto a esse lado, então os dois triângulos são congruentes.

Classificação dos Triângulos



$$AB = A'B'\ ,\ \widehat{A} = \widehat{A'}\ e\ \widehat{C} = \widehat{C'}$$

Teorema de Tales

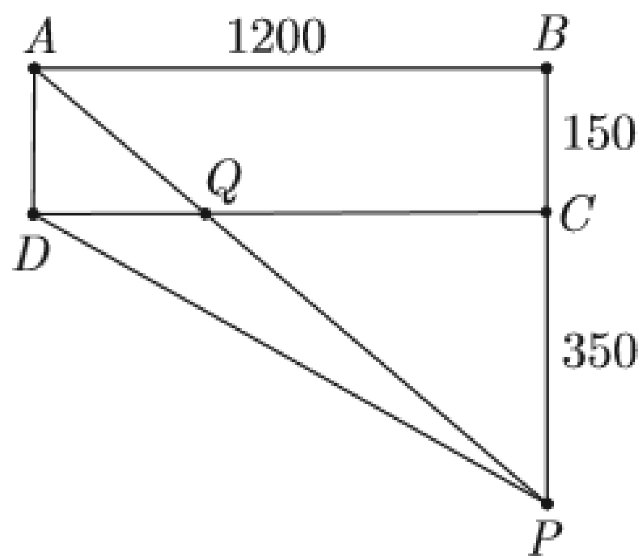


Sejam r, s e t retas paralelas. Escolhemos pontos A, A′ ∈ r, B, B′ ∈ s e C, C′ ∈ t, de modo que A,B,C e A′,B′,C′ sejam dois ternos de pontos colineares. Então,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Exercício 1

Cálculo de segmentos – As medidas do retângulo $ABCD$ são de 1 200 por 150 m. Além disso, P está no prolongamento do lado BC e dista 350 m de C. Determine as medidas de AP, PQ, PD, CQ e DP.



Exercício 1 - Solução

Cálculo de segmentos – O triângulo $\triangle ABP$ é retângulo com catetos $AB = 1\,200$ e $BP = 150 + 350 = 500$. Pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$AP^2 = 1\,200^2 + 500^2 = (144 + 25) \times 10^4 = 169 \times 10^4 = (13 \times 10^2)^2\,,$$

de modo que $AP = 13 \times 10^2 = 1\,300$ m. Analogamente, considerando o triângulo retângulo $\triangle PCD$, temos

$$DP^2 = 350^2 + 1\,200^2 = (7^2 + 12^2 \times 2^2)(5^2 \times 10^2) = 25^2 \times 50^2,$$

donde $DP = 1\,250$ m. Os triângulos $\triangle PCQ$ e $\triangle PBA$ são retângulos com um ângulo em comum, logo são semelhantes e segue que

$$\frac{PQ}{PA} = \frac{PC}{PB} = \frac{CQ}{AB}\,.$$

Exercício 1 - Solução

Substituindo os valores conhecidos, obtemos

$$\frac{PQ}{1\,300} = \frac{350}{500} = \frac{CQ}{1\,200}\,.$$

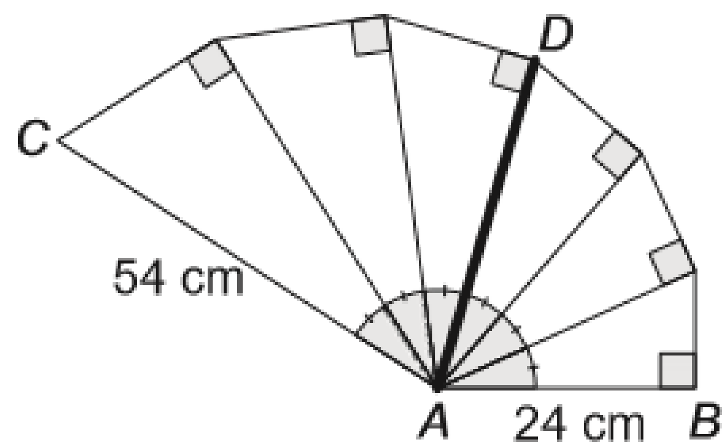
Assim,

$$PQ = \frac{350 \times 1\,300}{500} = 910\,\mathrm{m} \quad \text{e} \quad CQ = \frac{350 \times 1\,200}{500} = 840\,\mathrm{m}.$$

Exercício 2

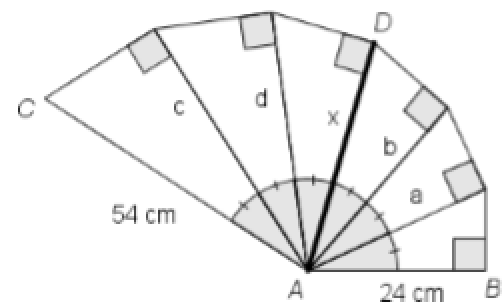
Os seis triângulos da figura são retângulos e seus ângulos com vértice no ponto A são iguais. Além disso, $AB = 24$ cm e $AC = 54$ cm. Qual é o comprimento de AD?

A) 30 cm
B) 34 cm
C) 36 cm
D) 38 cm
E) 39 cm



Exercício 2 - Solução

ALTERNATIVA C



Vamos denotar as hipotenusas dos triângulos retângulos que aparecem na figura por *a*, *b*, *x*, *d* e *c*, como na figura; nosso objetivo é achar $x = AD$.

Os seis triângulos retângulos são semelhantes, pois têm em comum o ângulo de vértice *A*. Logo

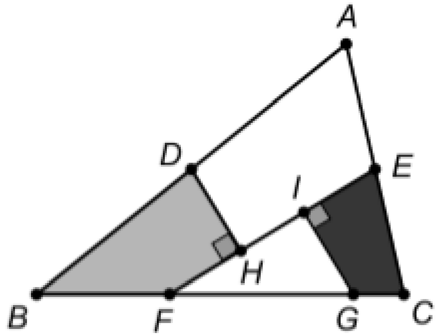
$$\frac{24}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{x} = \frac{x}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{54}$$

Multiplicando os três primeiros termos acima e, separadamente, os três últimos, obtemos $\frac{24}{x} = \frac{x}{54}$. Logo $x^2 = 24 \times 54 = 2^3 \times 3 \times 2 \times 3^3 = 2^4 \times 3^4 = 4^2 \times 9^2 = 36^2$, donde $x = 36$ cm.

Alternativamente, seja $\lambda = \frac{24}{a}$. Multiplicando os seis termos da sequência de igualdades acima, obtemos $\lambda^6 = \frac{24}{54} = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$, donde $\lambda^3 = \frac{2}{3}$. Por outro lado, $\lambda^3 = \frac{24}{a} \times \frac{a}{b} \times \frac{b}{x} = \frac{24}{x}$ e obtemos $\frac{24}{x} = \frac{2}{3}$, donde $x = 36$ cm.

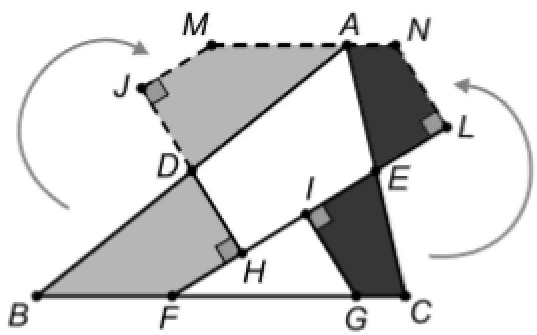
Exercício 3

Em todas as figuras desta questão, vemos um triângulo ABC dividido em quatro partes; nesses triângulos, D é ponto médio de AB, E é ponto médio de AC e FG mede $\frac{1}{2}BC$.



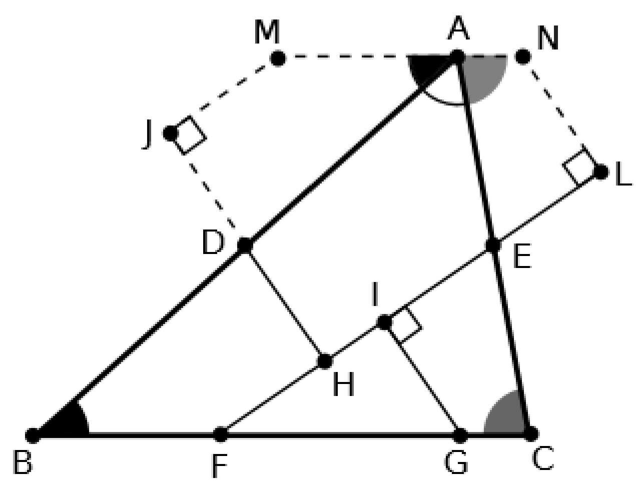
Exercício 3a

a) Os quadriláteros $DJMA$ e $ELNA$ são obtidos girando de 180° os quadriláteros $DHFB$ e $EIGC$ em torno de D e E, respectivamente. Explique por que os pontos M, A e N estão alinhados, ou seja, por que a medida do ângulo $M\hat{A}N$ é igual a 180°.



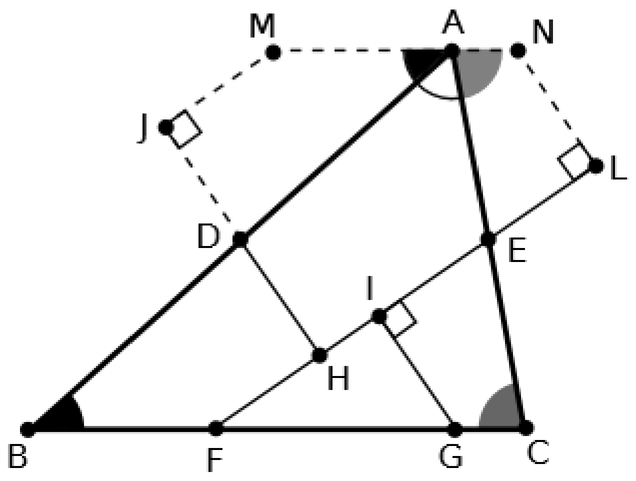
Exercício 3a - Solução

a) 1ª *solução*: Na figura a seguir marcamos, em preto, o ângulo em B do triângulo ABC e o ângulo correspondente no polígono $AMJD$; em cinza, marcamos o ângulo em C do triângulo ABC e o ângulo correspondente do polígono $AELN$. Podemos observar na parte superior da figura que o ângulo MAN é a soma desses dois ângulos com o ângulo em A do triângulo ABC; como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, segue que $MAN = 180°$. Logo, M, A e N estão alinhados.



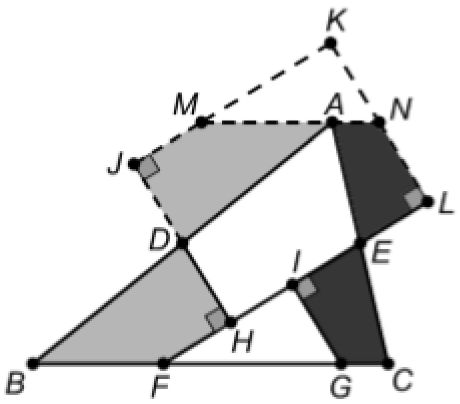
Exercício 3a - Solução

2ª *solução*: Observamos primeiro que AM é paralelo a BF, pois ele é obtido de BF por meio de uma rotação de 180°; do mesmo modo, AN é paralelo a CG. Como BF e CG estão na mesma reta suporte e AM e AN têm o ponto A em comum, segue que os pontos M, A e N estão alinhados.



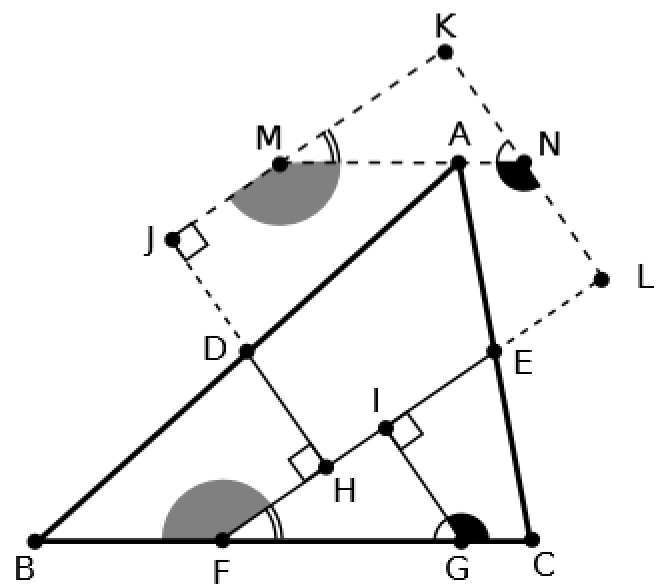
Exercício 3b

b) Na figura abaixo, o ponto K é a interseção das retas JM e LN. Explique por que os triângulos FGI e MNK são congruentes.



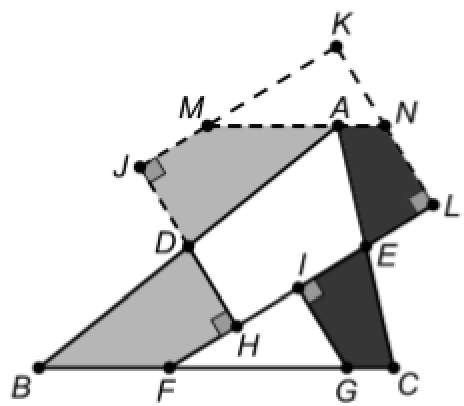
Exercício 3b - Solução

b) Na figura abaixo os ângulos marcados em cinza são congruentes, assim como os ângulos marcados em preto. Segue que os ângulos marcados em branco com traço duplo também são congruentes, pois são ambos suplementos do ângulo vermelho; do mesmo modo, os ângulos em branco com traço simples são também congruentes. Notamos agora que $MN = MA + AN = BF + CG = BC - FG = 2FG = FG = FG$. Segue, pelo critério *ângulo-lado-ângulo*, que os triângulos FGI e MNK são congruentes.



11º PIC Programa de Iniciação Científica da OBMEP

Exercício 3c

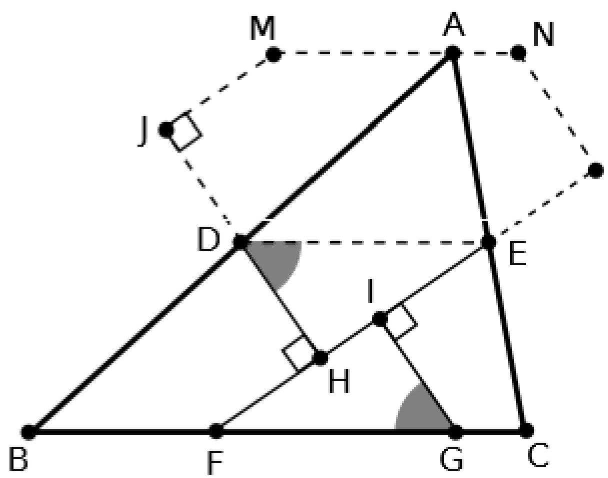


Os itens acima mostram que $HJKL$ é um retângulo formado com as quatro partes em que o triângulo ABC foi dividido.

c) Mostre que $LH = EF$.

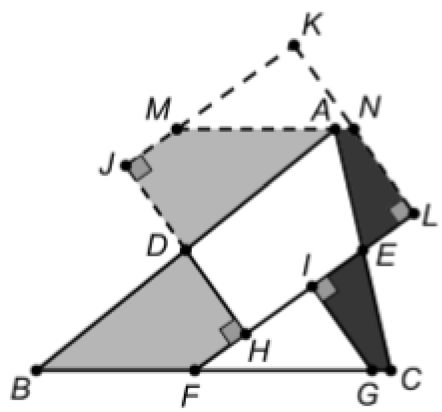
Exercício 3c - Solução

c) Na figura abaixo traçamos a base média DE do triângulo ABC. O teorema da base média nos diz que DE é paralelo a BC e que $DE = \frac{1}{2}BC = FG$. Segue que os triângulos FGI e EHD são congruentes, pois são retângulos, tem os ângulos cinzas congruentes (pois são agudos de lados paralelos) e hipotenusas congruentes. Em particular, temos $FI = EH$, donde $FH = FI - HI = EH - HI = EI$. Logo $LH = LE + EI + IH = FH + HI + IE = EF$.



Exercício 3d

d) Na figura abaixo o triângulo ABC tem área 9 e $HJKL$ é um quadrado. Calcule o comprimento de EF.

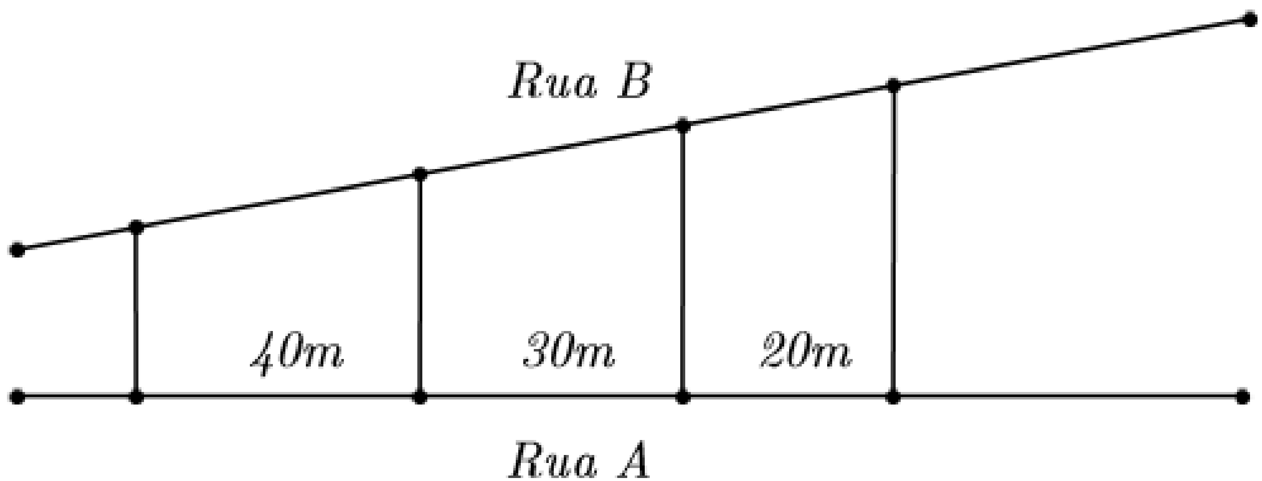


Exercício 3d - Solução

d) A área do quadrado $HJKL$ é igual à área do triângulo ABC, que é 9; logo o lado do quadrado mede 3. Em particular, $LH = 3$ e segue do item anterior que $EF = 3$.

Exercício 4

Três terrenos têm frente para a rua A e para a rua B, como na figura abaixo. As divisas laterais são perpendiculares à rua A. Qual a medida de frente de cada lote para a rua B, sabendo que a frente total para essa rua tem 180m?



Exercício 4 - Solução

Solução. Como o teorema de Tales garante a proporcionalidade entre as medidas de segmentos determinados por paralelas em transversais, podemos representar as medidas das frentes para a rua B por $4k$, $3k$ e $2k$. Assim,

$$\begin{aligned} 4k + 3k + 2k = 180 &\Leftrightarrow 9k = 180 \\ &\Leftrightarrow k = 20. \end{aligned}$$

Portanto, as medidas das frentes do lotes para a rua B são $80m$, $60m$ e $40m$.

Estudar para o próximo encontro!

- **19/09 a 24/09 – Terceira tarefa do fórum (referente aos assuntos estudados no Ciclo 3).**
- **Próximo encontro: 01/10, sábado, às 8h30.**

Módulo: "Algoritmo de Euclides Estendido, Relação de Bézout e Equações Diofantinas"

http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=55

Vídeoaulas: "Algoritmo de Euclides revisitado", "Relação de Bézout e Aplicações", "O Algoritmo de Euclides estendido", "Equações diofantinas: Quando existe solução?", "Equações diofantinas: Como são as soluções?", "Equações diofantinas: alguns exemplos" e "Um macaco na escada".