Permutações e Combinações

1. De quantos modos 4 crianças podem formar uma roda?

2. Considere um grupo formado por 7 homens (entre os quais José) e 5 mulheres (entre as quais Maria), do qual se quer extrair uma comissão constituída por 4 pessoas. Quantas são as comissões:

(a) Possíveis?

(b) Formadas por 2 homens e 2 mulheres?

(c) Em que haja pelo menos 2 mulheres?

(d) Em que José participe, mas Maria não?

(e) Formadas por 2 homens, entre os quais José, e 2 mulheres, mas sem incluir Maria?

3. De quantos modos é possível dividir 20 objetos em 4 grupos de 3 e 2 grupos de 4?

4. Considere um conjunto C de 20 pontos do espaço que tem um subconjunto C_1 formado por 8 pontos coplanares. Sabe-se que toda vez que 4 pontos de C são coplanares, então, eles sãopontos de C_1. Quantos são os planos que contêm pelo menos três pontos de C?

5. Em um grupo de 14 pessoas, existem 5 médicos, 6 advogados e 3 engenheiros. Quantas comissões de 7 pessoas podem ser formadas, cada qual constituída de 3 médicos, 2 advogados e 2 engenheiros?

6. Em todos os 53 finais de semana do ano 2000, Júlia irá convidar duas de suas amigas para sua casa em Teresópolis, sendo que nunca o mesmo par de amigas se repetirá durante o ano.

a) Determine o maior número possível de amigas que Júlia poderá convidar.

b) Determine o menor número possível de amigas que Júlia poderá convidar.

7. De quantas maneiras podem ser escolhidos três números naturais distintos, de 1 a 30, de modo que sua soma seja par?

8. Uma turma tem 25 alunos. De quantas maneiras diferentes é possível escolher os grupos a seguir nessa turma?

a) Um monitor e o representante.

b) Dois monitores.

c) Três monitores.

9. Estão marcados 10 ppontos em uma reta e 11 pontos em outra reta paralela à primeira

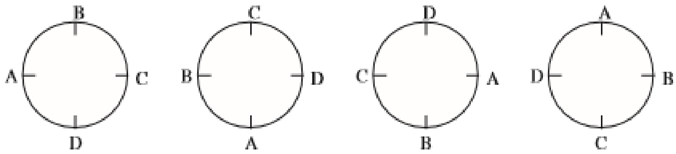
a) triângulos;

b) quadriláteros

podem ser formados com vértices nesses pontos?

Soluções:

Solução 1: À primeira vista, pode parecer que para formar uma roda com as 4 crianças basta escolher uma ordem para elas, o que pode ser feito de $4! = 24$ modos. Entretanto, as rodas $ABCD$, $BCDA$, $CDAB$ e $DABC$ mostradas na figura abaixo são iguais, já que cada uma resulta da anterior por uma "virada" de $\frac{1}{4}$ de volta.



Para calcular o número de maneiras possíveis de formar uma roda, podemos raciocinar de dois modos diferentes. Um deles consiste em partir do resultado anterior ($4! = 24$) e perceber que cada roda está sendo contada 4 vezes. Logo, o número correto de rodas que podem ser formadas é $\dfrac{24}{4} = 6$. Alternativamente, podemos começar por fixar a criança A na posição à esquerda (já que em qualquer roda A pode ficar nesta posição). Agora, temos 3 lugares para as 3 crianças que restaram, para um total de $3! = 6$ possibilidades.

De modo geral, o número de modos de colocar n objetos em círculo, considerando-se iguais disposições que coincidam por rotação (ou seja, o número de permutações circulares de n objetos) é $PCn = (n-1)!$.

Solução 2a): Devemos escolher 4 das 12 pessoas, o que pode ser feito de C_{12}^4 modos, que é igual a $\dfrac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 495$ comissões.

Solução 2b): Para formar uma comissão, devemos escolher os 2 homens, o que pode ser feito de C_7^2 modos, e, a seguir, as 2 mulheres, o que pode ser feito de C_5^2 maneiras. O número total de possibilidades de escolha, pelo princípio multiplicativo, é $C_7^2 \times C_5^2 = 21 \times 10 = 210$ comissões.

Solução 2c): Há 3 tipos de comissão possíveis: com 2 homens e 2 mulheres, com 1 homem e 2 mulheres e com 4 mulheres. Para obter o número total de comissões, contamos separadamente as comissões de cada tipo e somamos os resultados, obtendo

$$C_7^2 \times C_5^2 + C_7^1 \times C_5^3 + C_5^4 = 210 + 70 + 5 = 285$$

comissões.

Uma tentativa de contagem que leva a um erro muito comum é a seguinte: como a comissão deve ter pelo menos 2 mulheres, inicialmente escolhemos

2 mulheres, o que podemos fazer de $C_5^2 = 10$ modos. A seguir, basta escolher 2 pessoas quaisquer entre as 10 que sobraram, o que pode ser feito de $C_{10}^2 = 45$ modos. Logo, por este raciocínio, teríamos $10 \times 45 = 450$, que difere do resultado (correto) encontrado acima. Essa solução, portanto, está errada.

Solução 2d): Como José deve participar da comissão, resta escolher apenas 3 outras pessoas, entre as 10 restantes (já que José já foi escolhido e Maria não pode ser escolhida). Logo, o número de possibilidades é igual a $C_1^3 0 = 120$.

Solução 2e): Temos que escolher 1 homem entre 6 (José já está escolhido) e 2 mulheres entre 4 (Maria não pode ser escolhida). O número de comissões é $6 \times C_4^2 = 6 \times 6 = 36$.

Solução 3: Escolha, sucessivamente, 3 objetos para formar os 4 grupos de 3; isso pode ser feito, sucessivamente, de C_{20}^3, C_{17}^3, C_{14}^3 e C_{11}^3 modos. A seguir, com os 8 objetos restantes forme os 2 grupos restantes, o que pode ser feito de C_8^4 e C_4^4 modos, respectivamente. Fazendo isso, contamos cada divisão $4! \times 2!$ vezes, porque, quando formamos os mesmos grupos de 3 e os mesmos grupos 4 em outra ordem, contamos como se fosse outra divisão em grupos.

A resposta é

$$\frac{C_{20}^3 \times C_{17}^3 \times C_{14}^3 \times C_{11}^3 \times C_8^4 \times C_4^4}{4! \times 2!} = \frac{20!}{(3!)^4(4!)^2 4!2!} = 67897830000.$$

Solução 4: Chamemos de D o conjunto $C - C_1$. Há quatro tipos de planos:

i) determinados por três pontos de D;

ii) determinados por dois pontos de D e um de C_1;

iii) determinados por um ponto de D e dois de C_1;

iv) determinados por três pontos de C_1.

A resposta é $C_{12}^3 + (C_{12}^2) \times 8 + 12 \times C_8^2 + 1 = 1085$.

Outra solução 4: Para determinar um plano, devemos selecionar 3 dos 20 pontos, o que pode ser feito de $C_2^3 0 = 1140$ modos. Nessa contagem, o plano que contém os 8 pontos de C_1 foi contado $C_8^3 = 56$ vezes. A resposta é $1140 - 56 + 1 = 1085$.

Solução 5: $C_5^3 \times C_6^2 \times C_3^2 = 10 \times 15 \times 3 = 450$ comissões.

Solução 6a): Escolhendo duas amigas diferentes a cada final de semana, ela conseguirá convidar no máximo $2 \times 53 = 106$ amigas.

Solução 6b): Júlia deverá escolher uma quantidade mínima de amigas e combiná-las de maneira que consiga preencher todos os finais de semana, ou seja, ela deverá escolher uma quantidade n de amigas de tal forma que $C_n^2 \geq 53$. Daí temos $\dfrac{n!}{(n-2)! \times 2!} \geq 53$. Segue que $n(n-1) \geq 106$. Como n deve ser inteiro e positivo, seu menor valor é 10.

Solução 7: Para que tenhamos soma par, devemos dividir em dois casos:

i) três números pares: $C_{15}^{=}455$;

ii) dois números ímpares e um número par: $15 \times C_{15}^2 = 15 \times 105 = 1.575$.

Assim, o total de maneiras é $455 + 1575 = 2030$.

Solução 8a): Vamos supor que um aluno não pode ser monitor e representante ao mesmo tempo. Existem 25 maneiras de escolher um monitor. Para cada uma dessas escolhas, existem 24 maneiras de escolher o representante. Portanto, obtemos $25 \times 24 = 600$ maneiras diferentes.

Solução 8b): Vamos usar o resultado anterior. Em cada par encontrado no item (a), vamos transformar o representante em monitor. Obteremos assim todos os pares possíveis de monitores, mas cada par foi contado duas vezes, pois, se Guilherme e Simão forem os monitores, obteremos este par de ambas as escolhas *Guilherme é o monitor e Simão é o representante* e *Guilherme é o representante e Simão é o monitor* . Portanto, o número de escolhas é a metade, ou seja, 300.

Solução 8c): O primeiro monitor pode ser escolhido de 25 maneiras diferentes. Depois que o primeiro foi escolhido, o segundo pode ser escolhido de 24 maneiras diferentes. Depois que os dois primeiros foram escolhidos, o terceiro pode ser escolhido de 23 maneiras diferentes. Se a ordem de escolha dos monitores fosse relevante, teríamos $25 \times 24 \times 23 = 13800$ maneiras de escolher. Mas não importa a ordem, só interessa saber que são três monitores. Se Fred, Maíra e Luana foram escolhidos como monitores, isso poderia ter ocorrido com Fred em primeiro lugar, Maíra em segundo, Luana em terceiro; com Fred em primeiro lugar, Luana em segundo, Maíra em terceiro; com Maíra em primeiro lugar, Fred em segundo, Luana em terceiro; com Maíra em primeiro, Luana em segundo, Fred em terceiro; com Luana em primeiro lugar, Fred em segundo, Maíra em terceiro; ou com Luana em primeiro lugar, Maíra em segundo, Fred em terceiro. Contamos cada conjunto de monitores seis vezes no nosso processo, de modo que o número total de maneiras de escolher três monitores é $\dfrac{13800}{6} = 2300$.

Solução 9a): Cada triângulo com vértices nos pontos marcados ou tem um vértice na primeira reta e dois vértices na segunda, ou então tem dois vértices na primeira reta e um na segunda. Existem $10 \times C_2^{11}$ triângulos do primeiro tipo e $C_2^{10} \times 11$ do segundo. Portanto, a resposta é $10 \times C_2^{11} + 11C_2^{10}$.

Solução 9b): $C_2^{10} \times C_2^{11} = 2475$