Módulo de Métodos Sofisticados de Contagens

Combinação completa

Segundo ano

Portal da Matemática
OBMEP

Combinações Completas

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. As triplas $(x, y, z) = (2, 2, 0)$, $(1, 2, 1)$ e $(0, 1, 3)$ são soluções de $x + y + z = 4$. Cada uma dessas triplas pode ser associada a uma permutação de bolas $(\bullet)$ e símbolos de mais $(+)$:

i) $(2, 2, 0)$ escreve-se como

$$\bullet\bullet + \bullet\bullet + .$$

ii) $(1, 2, 1)$ escreve-se como

$$\bullet + \bullet\bullet + \bullet$$

iii) $(0, 1, 3)$ escreve-se como

$$+ \bullet + \bullet\bullet\bullet .$$

O mesmo ocorre com todas as outras soluções nos inteiros não negativos. Assim, o número de soluções da equação coincide com o número de permutações de 4 símbolos $\bullet$ e 2 símbolos $+$ que é $P_6^{4,2} = 15$. [1]

Calcule, nos conjuntos universos destacados, as quantidades de soluções das equações abaixo.

a) $x + y = 3$, com $U = \mathbb{N}$.

b) $a + b + c = 7$, com $U = \mathbb{N}$.

c) $A + B + C + D = 9$, com $U = \mathbb{N}^*$.

Exercício 2. Uma fábrica possui 3 cores diferentes para pintar 6 carros iguais, cada um com uma cor. De quantos modos isso pode ser feito?

Exercício 3. Um dominó comum é constituido por um dois quadrados que compartilham um lado em comum. Em cada quadrado está escrito um número do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sabendo que os números escritos nos dois quadrados não precisam ser distintos, quantas peças diferentes de dominó existem?

Observação: O dominó com os números $(1, 5)$ deve ser considerado igual ao dominó com os númmeros $(5, 1)$, ou seja, a ordem dos números no dominó não importa.

[1] O problema geral de resolver a equação

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$$

no conjunto dos inteiros não negativos pode ser resolvido de forma semelhante. A equação anterior está associada ao problema das Combinações Completas, isto é, o problema de escolhermos k bolas, não necessariamente distintas, dentre n variedades diferentes de bolas. Se cada x_i denota a quantidade de bolas escolhidas da variedade i, o número de combinações completas de n elementos k a k, denotado por $CR_{n,k}$, é igual ao número de permutações de k símbolos $\bullet$ e $n-1$ símbolos $+$. Ou seja, $CR_{n,k} = P_{n+k-1}^{n-1,k}$.

Exercício 4. Podendo escolher entre 5 tipos de doces e 4 marcas de refrigerante, de quantos modos é possível fazer um pedido com dois doces e três garrafas de refrigerante?

Exercício 5. Quantos são os anagramas da palavra

PARAMETRIZADA

que não possuem duas letras "A" juntas?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. Qual o número de soluções inteiras e não negativas de $x + y + z = 5$?

Exercício 7. Uma pessoa quer comprar 6 empadas numa lanchonete. Há empadas de camarão, frango, legumes e palmito.

a) Sabendo que podem ser compradas de zero a seis empadas de cada tipo, de quantas maneiras distintas essa compra pode ser feita?

b) Sabendo que ele quer provar todos os sabores das empadas, de quantas maneiras distintas essa compra pode ser feita?

Exercício 8. Quantas são as soluções inteiras não negativas da equação $x+y+z = 4$ que possuem apenas uma incógnita nula ?

Exercício 9. De quantas formas podemos colocar 6 anéis iguais em 4 dedos?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 10. Há seis modos distintos de guardar dois cadernos iguais em três gavetas, são eles:

- guardar os dois na primeira gaveta;
- guardar os dois na segunda gaveta;
- guardar os dois na terceira gaveta;
- guardar um na primeira gaveta e o outro, na segunda;
- guardar um na primeira gaveta e o outro, na terceira; e
- guardar um na segunda gaveta e o outro, na terceira.

Qual o número de modos distintos de guardar três cadernos iguais em três gavetas?

Exercício 11. Calcule o número de maneiras diferentes pelas quais podemos repartir uma dúzia de balas iguais entre três crianças, de modo que cada uma receba pelo menos uma bala.

Exercício 12. Uma loja vende barras de chocolate de diversos sabores. Em uma promoção era possível comprar três barras de chocolate com descontos, desde que essas fossem dos seguintes sabores: ao leite, amargo, branco ou com amêndoas. As três barras escolhidas podem ou não ter sabores repetidos. Assim, um cliente para comprar as três barras na promoção poderá escolher os sabores de n modos distintos. Qual o valor de n?

Exercício 13. Uma pessoa dispõe de balas de hortelã, caramelo e coco, cada uma com apenas um sabor. Ele pretende "montar" saquinhos com 13 balas cada, de modo que em cada saquinho haja no mínimo 3 balas de cada sabor. Um saquinho se diferencia do outro pelas quantidades de balas de cada sabor. Sendo assim, quantos saquinhos diferentes podem ser "montados"?

Exercício 14. Qual o número de soluções inteiras e não negativas de $x + y + z \leq 6$?

Exercício 15. Quantos números inteiros entre 1 e 10000 têm soma dos seus algarismos igual a 6?

Exercício 16. De quantos modos podemos formar um subconjunto com 4 elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ de modo que não haja números consecutivos?

Exercício 17. Os números de 1 até 10 foram arrumados em volta de um círculo em ordem crescente até chegar ao número 10. De quantos modos podemos escolher 4 deles sem que haja dois vizinhos no círculo?

Exercício 18. Uma pessoa deseja escolher 3 dias da semana para ir à academia. De quantas formas ela pode montar o seu horário se ela não pode ir em 2 dias consecutivos?

Exercício 19. Sejam $I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$, $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, com $m \leq n$, e S o conjunto das funções $f : I_m \longrightarrow I_n$.

a) Quantos elementos possui S?

b) Quantos elementos de S são funções injetoras?

c) Quantos elementos de S são funções estritamente crescentes?

d) Quantos elementos de S são funções decrescentes?

Exercício 20. De quantas formas podemos colocar 6 anéis diferentes em 4 dedos?

Exercício 21. Doze cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos doze cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se forma um grupo de 5 cavaleiros para libertar uma princesa. Nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.

Respostas e Soluções

1 Exercícios Introdutórios

1.

a) Para calcular a quantidade de soluções naturais de $x + y = 3$, devemos permutar três $\bullet$ e um símbolo $+$. Ou seja, existem $CR_{2,3} = P_4^{3,1} = 4$ soluções.

b) Para calcular a quantidade de soluções naturais de $x + y + z = 7$, devemos permutar sete $\bullet$ em dois símbolos $+$. Ou seja, existem $CR_{3,7} = P_9^{7,2} = 36$ soluções.

c) A quantidade de soluções nos inteiros positivos da equação

$$A + B + C + D = 9$$

pode ser calculada através de uma substituição de variáveis. Fazendo $A = a + 1$, $B = b + 1$, $C = c + 1$ e $D = d + 1$, com a, b, c e d números naturais, temos:

$$\begin{aligned}(a+1)+(b+1)+(c+1)+(d+1) &= 9\\ a+b+c+d &= 5.\end{aligned}$$

Para determinar o número de soluções da última equação, devemos permutar cinco $\bullet$ e três símbolos de $+$. Ou seja, existem $CR_{4,5} = P_8^{5,3} = 56$, soluções.

2. Seja C_i a cor que vai ser pintada no carro $i \in \{1, 2, 3\}$. Devemos calcular o número de soluções inteiras não negativas da equação

$$C_1 + C_2 + C_3 = 6.$$

Seguindo o modelo do exercício anterior, existem $CR_{3,6} = C_{3+6-1,6} = C_{8,6} = 28$ soluções para a equação e, consequentemente, 28 modos distintos de pintarmos os carros.

3. Seja f_i, $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, o número de quadrados de um dominó com número i. Cada dominó está associado então a uma solução da equação:

$$f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 = 2$$

Portanto, existem $CR_{7,2} = C_{7+2-1,6} = C_{8,6} = 28$ dominós.

4. Sejam d_i, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, a quantidade de doces escolhidos do tipo i e r_h, $h \in \{1, 2, 3, 4\}$, as quantidades de garrafas escolhidas do tipo h. Vamos calcular a quantidade das soluções naturais de duas equações, a saber:

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 2 \quad \text{e} \quad r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 3$$

A primeira possui $P_6^{2,4} = 15$ soluções naturais e a segunda de $P_6^{3,3} = 20$ soluções naturais. Por fim, o número de total de pedidos distintos que podem ser feitos é

$$15 \times 20 = 300.$$

5. Uma solução:
Para contar os anagramas, podemos fixar as quatro letras "A" e, em seguida, distribuir as outras letras entre os cinco espaços determinados por elas. Seja E_i, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, a quantidade de letras no espaço de posição i como indicado abaixo.

$$\underset{E_1}{\underline{\qquad}}\ \text{A}\ \underset{E_2}{\underline{\qquad}}\ \text{A}\ \underset{E_3}{\underline{\qquad}}\ \text{A}\ \underset{E_4}{\underline{\qquad}}\ \text{A}\ \underset{E_5}{\underline{\qquad}}$$

Como existem 9 letras diferentes de "A" na palavra, temos

$$E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 = 9.$$

Além disso, como temos que separar os "A's", E_2, E_3 e E_4 são positivos. Logo, podemos escrever

i) $E_2 = e_2 + 1$ com $e_2 \geq 0$.

ii) $E_3 = e_3 + 1$ com $e_3 \geq 0$.

iii) $E_4 = e_4 + 1$ com $e_4 \geq 0$.

Substituindo na equação, temos

$$E_1 + e_2 + e_3 + e_4 + E_5 = 6.$$

O número de soluções nos inteiros não negativos da última equação é $CR_{5,6} = P_{10}^{6,4} = 210$. Uma vez escolhidas as quantidades de letras em cada espaço, precisamos distribuir as outras 9 letras neles. Basta permutarmos as outras letras de $P_9^2 = 181440$ modos e distribuirmos a permutação em ordem nos espaços. Portanto, existem $210 \times 181440 = 38102400$ anagramas.
Outra solução:
Podemos começar posicionando as letras diferentes de "A" deixando espaços em branco identicos entre elas.

□ *P* □ *R* □ *M* □ *E* □ *T* □ *R* □ *I* □ *Z* □ *D* □

Isso pode ser feito de $P_9^2 = 181440$ modos. Podemos escolher os espaços entre as letras que serão ocupados pelas letras "A" de $C_{10,4} = 210$ formas. Por fim, teremos ao todo $210 \times 181440 = 38102400$ anagramas.

2 Exercícios de Fixação

6. O número de soluções é $P_7^{2,5} = 21$.

7. Seja E_i, $i \in \{c, f, l, p\}$, o número de empadas compradas do tipo i.

a) Basta calcular o número de soluções naturais da equação

$$E_c + E_f + E_l + E_p = 6,$$

Portanto, existem $P_9^{6,3} = 84$ maneiras distintas da compra ser realizada.

b) Como ele quer provar todos os sabores das empadas, teremos $E_i \neq 0$ para todo $i \in \{c, f, l, p\}$. Substituindo E_i por $e_i + 1$, com $e_i \geq 0$, basta resolver a equação:

$$\begin{aligned}(e_c+1)+(e_f+1)+(e_l+1)+(e_p+1) &= 6\\ e_c+e_f+e_l+e_p &= 2\end{aligned}$$

Portanto, existem $P_5^{2,3} = 10$ maneiras distintas da compra ser realizada.

8. Eliminando-se a incógnita nula, a equação pode ser reescrita como $A + B = 4$ onde A e B representam as outras duas incógnitas. Como A e B devem ser positivos, podemos substituí-los por $A = a + 1$ e $B = b + 1$ obtendo

$$\begin{aligned}(a+1)+(b+1) &= 4\\ a+b &= 2.\end{aligned}$$

O número de soluções nos inteiros não negativos da última equação é $P_3^{2,1} = 3$. Finalmente, como existem três escolhas para a incógnita que será nula, o total se soluções é

$$3 \times 3 = 9.$$

9. Seja d_i a quantidade de anéis em cada dedo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Basta calcular o número de soluções inteiras não negativas da equação

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 6.$$

Portanto, existem $P_9^{6,3} = 84$ maneiras de distribuir os anéis.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

10. (Extraído do concurso do IBGE) Se C_i denota a quantidade de cadernos na gaveta $i \in \{1, 2, 3\}$, o problema é equivalente a revolver nos inteiros não negativos a equação

$$C_1 + C_2 + C_3 = 3.$$

Portanto, existem $CR_{3,3} = C_{5,3} = P_5^{2,3} = 10$ modos distintos de guardar os cadernos.

11. (Extraído do vestibular da UNIRIO)
Seja C_i a quantidade de balas que deverá ser recebida pela criança $i \in \{1, 2, 3\}$. Como $C_i > 0$, podemos escrever $C_i = c_i + 1$, com $c_i \geq 0$. Assim

$$\begin{aligned}C_1+C_2+C_3 &= 12\\ (c_1+1)+(c_2+1)+(c_3+1) &= 12\\ c_1+c_2+c_3 &= 9.\end{aligned}$$

A última equação possui $P_{11}^{9,2} = 55$ soluções nos inteiros não negativos. Portanto, existem 55 maneiras diferentes de distribuir as balas.

12. (Adaptado do concurso para o Banco do Brasil)
Seja S_i a quantidade de chocolates de cada sabor $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. O problema equivale a calcular o número de soluções naturais da equação

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 3.$$

Portanto, como existem $P_6^{3,3} = 20$ soluções da equação nos inteiros não negativos, $n = 20$.

13. (Adaptado do concurso para o Banco do Brasil - 2012)
Seja S_i a quantidade de balas de cada sabor $i \in \{1, 2, 3\}$. Como $S_i \geq 3$, podemos escrever $S_i = s_i + 3$ com $s_i \geq 0$. O problema se resume em calcularmos o número de soluções da equação

$$\begin{aligned}S_1+S_2+S_3 &= 13\\ (s_1+3)+(s_2+3)+(s_3+3) &= 13\\ s_1+s_2+s_3 &= 4.\end{aligned}$$

Portanto, existem $P_6^{4,2} = 15$ maneiras diferentes de montar os saquinhos.

14. Uma solução:
Para calcular o número de soluções inteiras não negativas de

$$x + y + z \leq 6$$

deveremos calcular o número de soluções, também inteiras não negativas, das seguintes equações:

i) $x + y + z = 0 \implies P_2^2 = 1;$

ii) $x + y + z = 1 \implies P_3^2 = 3;$

iii) $x + y + z = 2 \implies P_4^{2,2} = 6;$

iv) $x + y + z = 3 \implies P_5^{2,3} = 10;$

v) $x + y + z = 4 \implies P_6^{2,4} = 15;$

vi) $x + y + z = 5 \implies P_7^{2,5} = 21;$ e

vii) $x + y + z = 6 \implies P_8^{2,6} = 28.$

Por fim, obtemos

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 = 84.$$

soluções.

Comentário para professores:. Na questão **??** obtivemos a soma

$$S = P_2^{2,0} + P_3^{2,1} + P_4^{2,2} + P_5^{2,3} + P_6^{2,4} + P_7^{2,5} + P_8^{2,6}.$$

Uma expressão equivalente a seria

$$S = C_{2,2} + C_{3,2} + C_{4,2} + C_{5,2} + C_{6,2} + C_{7,2} + C_{8,2}$$

que pode ser resolvido aplicando-se o "Teorema das Colunas":

$$C_{2,2} + C_{3,2} + C_{4,2} + P_{5,2} + C_{6,2} + C_{7,2} + C_{8,2} = C_{9,3}.$$

Outra solução:
Defina para cada solução de $x + y + z \leq 6$ a "*folga*" da solução como o valor

$$f = 6 - x - y - z.$$

Observe o quadro abaixo para o valor da *folga* em alguns exemplos de soluções.

x	y	z	$x+y+z$	f
3	2	1	6	0
2	0	1	3	3
1	1	1	3	3
0	1	0	1	$4ra$

Como $f \geq 0$, podemos transformar ao problema de encontrar as soluções da inequação inicial no problema de encontrar as soluções nos inteiros não negativos da equação

$$x + y + z + f = 6$$

Portanto, existem

$$P_9^{6,3} = 84$$

soluções.

15. Como um número qualquer desse intervalo possui no máximo 4 algarismos, podemos denotá-lo por $\overline{abcd}$, onde cada letra representa um de seus algarismos. O problema é equivalente a encontramos as soluções nos inteiros não negativos da equação:

$$a + b + c + d = 6.$$

Portanto, existem $P_9^{6,3} = 84$ números inteiros no intervalo mencionado com a soma de seus algarismos igual a 6.
Observação: Caso a soma dos dígitos fosse maior que 9, deveríamos desconsiderar as soluções da equação em que alguma das incógnitas fosse maior que 9, pois nenhum dígito pode ser maior que tal valor.

16. Para escolher os 4 elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ podemos pensar em relacionar cada elemento escolhido com um mais $(+)$ e cada um dos excluídos com um menos $(-)$. Seguem alguns exemplos:

i) $\{1, 3, 5, 7\} \implies \{+, -, +, -, +, -, +, -, -\}$

ii) $\{1, 4, 6, 8\} \implies \{+, -, -, +, -, +, -, +, -\}$

iii) $\{2, 4, 7, 9\} \implies \{-, +, -, +, -, -, +, -, +\}$

Basta permutarmos 4 sinais de $+$ e 5 de $(-)$ sem que hajam dois sinais de mais $(+)$ seguidos.

$$? \quad - \quad ? \quad - \quad ? \quad - \quad ? \quad - \quad ? \quad - \quad ?$$

Por fim, dentre os 6 espaços livres (?), devemos escolher 4 para os sinais de $+$ e isso pode ser feito de $C_{6,4} = 15$ maneiras.

17. Vamos tentar reduzir o problema atual para o método do Primeiro Lema de Kaplansky.

i) Caso o elemento 1 seja escolhido, faltarão 3 elementos no conjunto que devem ser escolhidos de $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Com a notação do problema anterior, algumas soluções poderiam ser codificadas como:

   i) $\{3, 5, 7\} \implies \{+, -, +, -, +, -, -\}$

   ii) $\{3, 6, 8\} \implies \{+, -, -, +, -, +, -\}$

   iii) $\{4, 7, 9\} \implies \{-, +, -, -, +, -, +\}$

   Para determinarmos todas as escolhas possíveis, basta permutarmos 3 sinais de $+$ e 4 de $-$ sem que hajam dois sinais de $+$ consecutivos.

   $$? \quad - \quad ? \quad - \quad ? \quad - \quad ? \quad - \quad ?$$

   Por fim, dentre os 5 espaços livres (?) devemos escolher 3 para os sinais de $+$ e isso pode ser feito de $C_{5,3} = 20$ maneiras.

ii) Caso o elemento 1 não seja escolhido, teremos que escolher 4 elementos no conjunto $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ sem que hajam números escolhidos consecutivos. De forma análoga ao item anterior, basta permutarmos 4 sinais de $+$ e 5 de $-$ sem que hajam dois sinais de $+$ consecutivos.

   $$? \quad - \quad ? \quad - \quad ? \quad - \quad ? \quad - \quad ? \quad - \quad ?$$

   Isso pode ser feito de $C_{6,4} = 15$ maneiras.

Portanto, existem $20 + 15 = 35$ modos distintos de escolher os 4 números.

Observação: Esse exercício ilustra o *Primeiro Lema de Kaplansky.*

18. Disponha os dias da semana em um círculo, começando pela Segunda-feira e "finalizando" com o Domingo. Veja que Segunda e Domingo são vizinhos. Temos os seguintes casos:

i) Caso ele vá na Segunda para a academia, será necessário escolher 2 dias não consecutivos no conjunto {Quarta, Quinta, Sexta, Sábado}. Precisamos então escolher 2 sinais de mais $+$ entre os símbolos de $-$ no diagrama abaixo.

   $$? \quad - \quad ? \quad - \quad ?$$

   Como isso pode ser feito de $C_{3,2} = 3$ maneiras, o total de possibilidades neste caso é 3.

ii) Caso ele não vá na Segunda para a academia, será necessário escolher 3 dias não consecutivos no conjunto {Terça, Quarta, Quinta, Sexta, Sábado, Domingo}.

Precisamos então escolher 3 sinais de + entre os símbolos de − no diagrama abaixo.

$$? \quad - \quad ? \quad - \quad ? \quad - \quad ?$$

Como isso pode ser feito de $C_{4,3} = 4$ maneiras, o total de possibilidades neste caso é 4.

Portanto, existem $3 + 4 = 7$ maneiras.

Observação: Esse exercício ilustra o *Segundo Lema de Kaplansky*.

19. a) Para cada elemento $i_m \in I_m$, temos n opções de imagem em I_n, portanto, S possui

$$\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{\text{m fatores iguas a n}} = n^m \text{ funções.}$$

b) Para o elemento $i_1 \in I_m$, temos n opções de imagem em I_n, para i_2 são $n-1$ opções, para 3 são $n-2, \ldots,$ para o elemento m são $n-m+1$, portanto, neste caso serão

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \text{ funções.}$$

c) Devemos escolher os elementos que farão parte da imagem e isso pode ser feito de $C_{n,m}$. A ordenação deles será de modo crescente associando o menor $y_i \in I_n$ destacado como a imagem de 1, o segundo menor como imagem de 2 e assim por diante. Portanto, neste caso, o número de funções é

$$C_{n,m} = \frac{(m+n)!}{m!n!}.$$

d) Seja Y_i a quantidade de valores no domínio associados ao elemento $i \in I_n$. O somatório deles deve ser igual à quantidade de elementos do conjunto I_m, isto é,

$$Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = m.$$

O número de soluções desta equação é dado por $CR_{n,m} = C_{n+m-1,m} = P^{m,n-1}_{m+n-1}$. Para cada solução, os primeiros Y_1 números do conjunto I_m, terão como imagem o número 1, os próximos Y_2 números terão como imagem o número 2 e assim por diante. Portanto, neste caso, o número de funções será:

$$P^{m,n-1}_{m+n-1} = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}.$$

20. Sejam d_i a quantidade de anéis em cada dedo $i \in \{1,2,3,4\}$. Primeiro, vamos escolher os dedos e a quantidade de anéis em cada dedo. Podemos fazer isso encontrando as soluções nos inteiros não negativos da equação $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 6$, ou seja, existem $P_9^{6,3} = 84$ maneiras de decidirmos as quantidades de anéis em cada dedo. Segundo, como os anéis são diferentes, podemos permutá-los de $6! = 720$ maneiras. Portanto, o número de disposições dos anéis nos dedos é

$$84 \times 720 = 60480.$$

21. (Extraído do vestibular do IME de 1986)
Vamos separar em casos a partir de um determinado cavaleiro como referência, digamos que seja o 1. Distribua-os em um círculo no sentido horário e chame os demais de 2, 3, $\cdots$, 12 (observe que 1 e 12 são vizinhos).

i) Se o caveleiro 1 for escolhido, restam 4 vagas entre os cavaleiros $\{3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$. Basta escolhermos no diagrama abaixo a posição dos quatro + entre os cinco − de modo que dois sinais de + não fiquem juntos.

$$? \quad - \quad ? \quad - \quad ? \quad - \quad ? \quad - \quad ? \quad - \quad ?$$

Isso pode ser feito de $C_{6,4} = 15$ modos.

ii) Se o cavaleiro 1 não for escolhido, restam 5 vagas entre os cavaleiros $\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. Basta escolhermos no diagrama abaixo a posição dos cinco + entre os seis − de modo que dois sinais de + não fiquem juntos.

$$? \quad - \quad ? \quad - \quad ? \quad - \quad ? \quad - \quad ? \quad - \quad ? \quad - \quad ?$$

Isso pode ser feito de $C_{7,5} = 21$ modos.

Portanto, existem $15 + 21 = 36$ possíveis distribuições dos cavaleiros.

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com