

SOLUÇÕES QUESTÕES OBMEP(Princípio Multiplicativo)

Prova 1ª Fase 2009 - Nível 1 - Questão 8

Solução

ALTERNATIVA C

O número total de bolinhas de uma peça é ímpar quando um dos quadrados tiver um número ímpar de bolinhas e o outro tiver um número par de bolinhas. São 3 possibilidades para números ímpares (1, 3 e 5) e 4 possibilidades (0, 2, 4 e 6) para números pares. Logo o número de peças que apresentam um número ímpar de bolinhas é $3 \times 4 = 12$.

Podemos também fazer uma listagem ordenada de todas as peças, marcando aquelas que têm um número ímpar de bolinhas:

0-0						
0-1	1-1					
0-2	1-2	2-2				
0-3	1-3	2-3	3-3			
0-4	1-4	2-4	3-4	4-4		
0-5	1-5	2-5	3-5	4-5	5-5	
0-6	1-6	2-6	3-6	4-6	5-6	6-6

Prova 1ª Fase 2015 - Nível 1 - Questão 5

Como os números devem ter dois algarismos, eles não podem ter o algarismo 0 na casa das dezenas; assim, existem 3 possibilidades para a casa das dezenas (1, 2 ou 5) e quatro possibilidades para a casa das unidades (0, 1, 2 ou 5). Pelo Princípio Fundamental da Contagem (Princípio Multiplicativo), há, portanto, $3 \times 4 = 12$ números de dois algarismos que podem ser formados com os algarismos de 2015 (pode haver repetição de algarismos). Neste caso, os números podem ser explicitamente listados: 10, 11, 12, 15, 20, 21, 22, 25, 50, 51, 52 e 55.

ALTERNATIVA D

Prova 1ª Fase 2016 - Nível 2 - Questão 20

ALTERNATIVA C

Vamos primeiro contar quantos pacotes distintos é possível fazer com qualquer número de figurinhas, incluindo o pacote sem nenhuma figurinha. Para fazer um pacote, Bruno pode, por exemplo, escolher primeiramente quantas figurinhas da Alemanha, depois quantas do Brasil e finalmente quantas da Colômbia ele deseja colocar no pacote. Pelo princípio multiplicativo, isso pode ser feito de $6 \times 7 \times 5 = 210$ maneiras diferentes; observemos que o fator 6 nessa expressão corresponde ao fato de que Bruno tem 6 escolhas (a saber, 0, 1, 2, 3, 4, 5) para o número de figurinhas da Alemanha; já o fator 7 é o número de escolhas para o número de figurinhas do Brasil e 5 é o número de escolhas para o número de figurinhas da Colômbia que ele pode colocar no pacote.

Por outro lado, o número de pacotes com menos que três figurinhas é 10, como vemos na tabela abaixo (na segunda coluna, usamos letras A, B e C para denotar Alemanha, Brasil e Colômbia, respectivamente):

Quantidade de figurinhas escolhidas para colocar no pacote	O que fica dentro do pacote	Quantidade de pacotes
0 figurinha	nada	1
1 figurinha	A ou B ou C	3
2 figurinhas	AA ou BB ou CC ou AB ou AC ou BC	6
Total		$1 + 3 + 6 = 10$

Segue, então, que o número de pacotes distintos com pelo menos três figurinhas é $210 - 10 = 200$.

Outra solução: Um pacote com pelo menos três figurinhas poderá conter figurinhas com as três bandeiras diferentes, ou figurinhas com somente duas das bandeiras ou ainda figurinhas com apenas uma das bandeiras. Vamos fazer a contagem do número de pacotes distintos que podem ser feitos em cada um desses casos, com atenção para que sempre os pacotes contenham, no mínimo, três figurinhas.

1. Pacotes de figurinhas com as três bandeiras diferentes

Bruno tem 5 possibilidades para o número de figurinhas com a bandeira da Alemanha que poderá colocar em um pacote: A, AA, AAA, AAAA, AAAAA. Da mesma forma, terá 6 possibilidades para o número de figurinhas com a bandeira do Brasil e 4 para figurinhas com a bandeira da Colômbia.

O número de pacotes distintos que Bruno poderá formar com pelo menos três figurinhas com as três bandeiras diferentes será $5 \times 6 \times 4 = 120$.

2. Pacotes de figurinhas com todas as figurinhas com a mesma bandeira

O número de pacotes distintos que Bruno poderá formar com pelo menos três figurinhas e todas as figurinhas no pacote com a mesma bandeira é $3 + 4 + 2 = 9$ (AAA, AAAA, AAAAA, BBB, BBBB, BBBBB, BBBBBB, CCC e CCCC).

3. Pacotes de figurinhas com bandeiras de exatamente dois países

Se os países forem, por exemplo, Alemanha e Brasil, teremos $5 \times 6 - 1$ possibilidades, já que os pacotes devem conter pelo menos três figurinhas, e precisamos desconsiderar o pacote que tem apenas uma figurinha com a bandeira da Alemanha e uma do Brasil. A mesma contagem para as outras duplas (Alemanha-Colômbia e Brasil-Colômbia) nos dará, neste caso, o número de pacotes procurado:

$$(5 \times 6 - 1) + (5 \times 4 - 1) + (6 \times 4 - 1) = 29 + 19 + 23 = 71.$$

Somando os valores obtidos nas três contagens parciais, teremos $120 + 9 + 71 = 200$ pacotes distintos.