Programa de Formação dos Professores Habilitados e dos Alunos de Licenciatura

OBMEP na Escola e PIC 2016

Grupo N2 – Ciclo 6

1ª semana: sexto encontro de formação entre professores, alunos de licenciatura e coordenador

- Assuntos a serem abordados:

Aritmética 6: Algoritmo de Euclides e cálculo de MDC.

Contagem 6: Combinações com repetições.

Geometria 6: Semelhança de triângulos.

- Material a ser estudado pelo professor:

Os textos e videoaulas sugeridos a seguir devem ser abordados pelo Coordenador e seus Colaboradores (professores ou alunos de graduação). Esses materiais são balizadores para a preparação das aulas e elaboração de discussões técnicas envolvendo os professores habilitados ou alunos de graduação, quando de suas atuações frente aos seus alunos.

Aritmética 6:

- Textos:

1. Encontro 04, Apostila do PIC da OBMEP "Encontros de Aritmética", L. Cadar. e F. Dutenhefner. (http://www.obmep.org.br/docs/aritmetica.pdf)

2. Seção 3.8 da Apostila 1 da OBMEP, "Iniciação à Aritmética", A. Hefez. (http://www.obmep.org.br/docs/apostila1.pdf)

3. Banco de Questões da OBMEP, números diversos.

4. Seção 4 do Capítulo 3, Divisibilidade e Resto, do livro Círculos Matemáticos – A Experiência Russa – D. Fomin, S. Genkin e I. Itenberg.

5. Um Círculo Matemático de Moscou – Sergey Dorichenko.

6. Provas da OBMEP.

Vídeos

1. Para acessar os conteúdos relacionados com o Algoritmo de Euclides e Cálculo de MDC, acesse:

1.1 No Canal do PIC no YouTube – Aritmética, através dos vídeos:

- Aritmética - Aula 9 - Divisores e MDC - Algoritmo de Euclides;
- Aritmética - Aula 25 – mdc(a,b)mmc(a,b)=ab;
- Aritmética - Aula 26 - mmc(ca,cb)= c mmc(a,b), mdc(ca,cb) = c mdc(a,b).

1.2 No módulo Divisibilidade, no Portal da Matemática, através das videoaulas sobre o tema MDC e MMC:

- Máximo Divisor Comum;
- Propriedades de MDC;
- Exercícios de MDC.

Contagem 6:

-Textos:

1. Capítulo 4 (a partir do Exemplo 5) da Apostila do PIC da OBMEP "Métodos de Contagem e Probabilidade", Paulo Cezar Pinto Carvalho.
http://www.obmep.org.br/docs/apostila2.pdf

2. Material Teórico do Portal do PIC da OBMEP "Combinações Completas", 2º Ano – Módulo de Métodos Sofisticados de Contagem. Autor: Prof. Angelo Papa Neto. Revisor: Antonio Caminha M. Neto.
http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/c7ulccajve8sc.pdf

3. Banco de Questões da OBMEP, números diversos.

4. Seção 3 do Capítulo 11 do livro Círculos Matemáticos – A Experiência Russa – D. Fomin, S. Genkin e I. Itenberg.

5. Um Círculo Matemático de Moscou – Sergey Dorichenko.

6. Provas da OBMEP.

-Vídeos:

1. No Portal da Matemática: 2º Ano do Ensino Médio – Módulo de Métodos Sofisticados de Contagem.

Sobre o tema Combinação Completa assista às videoaulas:

- Combinação Completa;
- Exercícios sobre Combinação Completa – Parte 1;
- Exercícios sobre Combinação Completa – Parte 2;
- Exercícios sobre Combinação Completa – Parte 3;
- Exercícios sobre Combinação Completa – Parte 4;
- Exercícios sobre Combinação Completa – Parte 5.

Geometria 6:

- Textos:

1. Capítulo 1 (Seção 1.2 – apenas a subseção '*A demonstração que usa semelhança*'), Seção 2.1 (apenas a subseção '*Propriedade 4*', página 30) e Seção 2.3 da Apostila 3 do PIC da OBMEP, "Teorema de Pitágoras e Áreas", E. Wagner.
http://www.obmep.org.br/docs/apostila3.pdf

2. Banco de Questões da OBMEP, números diversos.

3. Um Círculo Matemático de Moscou – Sergey Dorichenko.

4. Provas da OBMEP.

- Vídeos:

1. No Portal da Matemática: 9º Ano do Ensino Médio – Módulo de Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales.

Sobre o tema Semelhança entre Figuras e Polígonos assista às videoaulas:

1.1 Teoria:

- Semelhança de triângulos

1.2 Exercícios:

- Resolução de Exercícios: Semelhança de Triângulos – Parte 1;
- Resolução de Exercícios: Semelhança de Triângulos – Parte 2;
- Resolução de Exercícios: Semelhança de Triângulos – Parte 3.

2ª semana: encontro entre professores e alunos

Assunto a ser abordado: **Aritmética 6** – Algoritmo de Euclides e Cálculo de MDC

Estudos a serem desenvolvidos com os alunos: antes da realização do encontro recomendamos que o professor leia os materiais impressos, englobando aspectos teóricos e exercícios, e assista a todos os vídeos anteriormente indicados. Incentive os seus alunos a fazerem o mesmo. Inicialmente, sugerimos que o professor trabalhe com seus alunos as Seções 3.3 e 3.8 da Apostila 1 da OBMEP, "Iniciação à Aritmética", A. Hefez. Posteriormente, o cálculo de MDC, via Algoritmo de Euclides, poderá ser trabalhado explorando o Encontro 4 da Apostila do PIC da OBMEP "Encontros de Aritmética", L. Cadar. e F. Dutenhefner. De uma forma complementar, a Seção 4, do Capítulo 3 - Divisibilidade e Resto, do livro Círculos Matemáticos – A Experiência Russa, contém alguns exemplos e problemas que podem ser incorporados à sua dinâmica de aula.

Exercícios a serem discutidos com os alunos: deverão ser abordados de 6 a 8 problemas durante o encontro presencial. Esse número poderá ser ampliado caso o professor considere viável. Esses problemas devem estar relacionados com o tema *Algoritmo de Euclides e cálculo de MDC*. É importante que os estudos presenciais estejam em conformidade com os textos ou videoaulas de Aritmética acima descritos. Para auxiliar o trabalho a ser realizado, iremos indicar quatro problemas a serem discutidos com os alunos, convidamos o professor a selecionar o restante:

(I) Lema de Euclides, página 66, da apostila 1 da OBMEP, "Iniciação à Aritmética", A. Hefez.

Dados inteiros a e b, os divisores comuns de a e b são os mesmos que os divisores comuns de a e b − c.a, para todo número inteiro c fixado.

Solução: Observe que a solução/demonstração encontra-se na página 66, da apostila 1 do PIC da OBMEP "Iniciação à Aritmética", A. Hefez, bem como na videoaula Aritmética - Aula 21 - Algoritmo de Euclides revisitado, em que é apresentada uma demonstração detalhada do Lema de Euclides. Por favor, faça simulações de casos particulares para que o aluno tenha pleno entendimento desse lema fundamental. Salientamos também que na Apostila do PIC da OBMEP "Encontros de Aritmética", L. Cadar. e F. Dutenhefner, páginas 92 e 93, esses resultados e exemplos são explorados.

(II) Exercício 4, página 94, da apostila do PIC da OBMEP "Encontros de Aritmética", L. Cadar. e F. Dutenhefner.

Calcule o mdc(1203;3099) usando uma fatoração simultânea e depois calcule este mdc usando a propriedade mdc(a;b) = mdc(a;b-a).

Solução: A solução encontra-se na página 94, da apostila do PIC da OBMEP "Encontros de Aritmética", L. Cadar. e F. Dutenhefner.

(III) Exercício 6, página 98, da apostila do PIC da OBMEP "Encontros de Aritmética", L. Cadar. e F. Dutenhefner.

Calcule o mdc(162, 372).

Solução: Nosso interesse nesse problema se encontra nas diferentes possibilidades de abordagem de sua resolução. Inicialmente trabalhe com seus alunos a propriedade presente na página 97, Apostila do PIC da OBMEP "Encontros de Aritmética". Posteriormente, resolva o problema apresentado fazendo uso dessa propriedade e compare com o método de resolução apresentado no exercício (II) anterior. Essas discussões encontram-se na Apostila do PIC da OBMEP "Encontros de Aritmética", L. Cadar. e F. Dutenhefner, página 98.

(IV) Problema 55, seção 4, capítulo 3, do livro Círculos Matemáticos – A Experiência Russa – D. Fomin, S. Genkin e I. Itenberg.

Encontre mdc $(2^{100}-1, 2^{120}-1)$.

Solução: Observe inicialmente que $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + ... + 1)$. Para o entendimento dessa igualdade basta efetivar as distributivas à direita que teremos a expressão à esquerda. Por outro lado, observando que $2^{120} - 1 = 2^{20}(2^{100} - 1) + (2^{20} - 1)$, então o resto da divisão de $2^{120} - 1$ por $2^{100} - 1$ é igual a $2^{20} - 1$. Assim, fazendo uso novamente da propriedade presente na página 97, Apostila do PIC da OBMEP "Encontros de Aritmética", segue que

$$mdc(2^{120} - 1, 2^{100} - 1) = mdc(2^{100} - 1, 2^{20} - 1).$$

Observe que, segundo a igualdade inicial, considerando n = 5, tem-se que $2^{20} - 1$ divide $2^{100} - 1$, pois $2^{100} - 1 = (2^{20})^5 - 1 = (2^{20} - 1).((2^{20})^4 + (2^{20})^3 + ... + 1)$. Portanto, $\text{mdc}(2^{100} - 1, 2^{120} - 1) = 2^{20} - 1.$

3ª semana: encontro entre professores e alunos.

-Assunto a ser abordado: **Contagem 6 -** Combinações com repetições.

Estudos a serem desenvolvidos com os alunos: antes da realização do encontro recomendamos que o professor leia os materiais impressos, englobando aspectos teóricos e exercícios, e assista a todos os vídeos anteriormente indicados. Incentive os seus alunos a fazerem o mesmo. Faz-se necessário, ao iniciar o encontro, orientar os alunos para as variações nas notações representativas de combinações sem ou com repetições. Destaque o que se encontra na página 117 do livro “Círculos Matemáticos – A Experiência Russa” (ver referência 4) e, nas páginas 11 (combinação simples) e 36 (combinação completa), da apostila “Métodos de Contagem e Probabilidade” (ver referência 1). Inicialmente explore a apostila “Métodos de Contagem e Probabilidade”, capítulo 4, a partir do exemplo 5 (páginas 34 a 36). Destacamos que o nosso foco de interesse é direcionar o aluno para o estudo de combinações com repetições de elementos, também denominadas *combinações completas,* sem o uso excessivo de fórmulas. A ideia central é apoiar-se numa argumentação interpretativa, ainda ancorada nos princípios básicos de contagem. Observe que o material presente no Portal da Matemática (ver referência 2) é uma boa fonte de consulta complementar sobre o assunto. Além disso, destacamos também o texto “Círculos Matemáticos – Experiência Russa”, capítulo 11, seção 3 – Bolas e Divisórias, esse livro sempre traz problemas e orientações significativas.

Exercícios a serem discutidos com os alunos: deverá ser abordado de 6 a 8 problemas durante o encontro presencial. Esse número poderá ser ampliado caso o professor considere viável. Reiteramos a importância de que os estudos presenciais estejam em conformidade com os textos ou videoaulas associadas ao assunto em foco. Para auxiliar o trabalho, iremos indicar cinco problemas a serem discutidos e convidamos o professor a selecionar o restante:

(I) Exemplo 5, página 34 da apostila do PIC da OBMEP 'Métodos de Contagem e Probabilidade', Paulo Cezar Pinto Carvalho (ver referência 1).

Uma professora tem 3 bolas de gude para distribuir para 5 meninos (digamos, Alfredo, Bernardo, Carlos, Diogo e Eduardo). De quantos modos ela pode fazer essa distribuição:

(a) Supondo que ela dê bolas para 3 alunos distintos?

(b) Supondo que os contemplados possam ganhar mais de uma bola?
(Por exemplo, Carlos pode receber todas as bolas.)

Solução: A resposta/solução encontra-se nas páginas 34 e 35 da apostila do PIC da OBMEP 'Métodos de Contagem e Probabilidade', Paulo Cezar Pinto Carvalho.

(II) Exercício 17, página 38 da apostila do PIC da OBMEP 'Métodos de Contagem e Probabilidade', Paulo Cezar Pinto Carvalho (ver referência 1).

Uma indústria fabrica 5 tipos de balas, que são vendidas em caixas de 20 balas, de um só tipo ou sortidas. Quantos tipos diferentes de caixa podem ser fabricados?

Solução: A resposta/solução encontra-se na página 76 da apostila do PIC da OBMEP 'Métodos de Contagem e Probabilidade', Paulo Cezar Pinto Carvalho.

(III) Problema C.11, página 213, do livro “Um Círculo Matemático de Moscou”, S. Dorichenko.

De quantas maneiras pode-se enviar seis cartas urgentes por seis mensageiros se cada carta pode ser entregue a qualquer um dos mensageiros?

Solução: Observe que não existem quaisquer restrições sobre a quantidade de cartas que um dado mensageiro deverá levar. Então, assuma que x_i seja a quantidade de cartas que o mensageiro i irá levar, i = 1, 2, .., 6. Portanto, o problema se resume a encontrar o número de soluções inteiras e positivas da equação $x_1+...+x_6 = 6$, ou seja, $C_{6+6-1}^{6-1}=C_{11}^{5}=330$.

(IV) Exemplo presente na videoaula do Portal da Matemática intitulada ‘Exercícios sobre Combinação Completa – parte 5’.

Quantos são os anagramas da palavra PARAMETRIZADA que não possuem duas letras 'A' juntas?

Solução: Assista na íntegra a vídeoaula do Portal da Matemática intitulada 'Exercícios sobre Combinação Completa – parte 5'.

Observação: Destacamos que no endereço que segue existem vários exercícios que podem ser utilizados pelo professor: http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/bz09xoaummg4k.pdf. Esses exercícios estão caracterizados como introdutórios, de fixação e de aprofundamento e exames.

4ª Semana: encontro entre professores e alunos

Assunto a ser abordado: **Geometria 6** – Semelhança de triângulos.

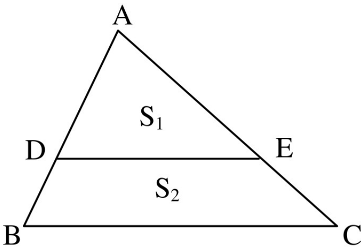
Estudos a serem desenvolvidos com os alunos: antes da realização do encontro recomendamos que o professor leia os materiais impressos, englobando aspectos teóricos e exercícios, e assista a todos os vídeos anteriormente indicados. Incentive os seus alunos a fazerem o mesmo. Na videoaula “Semelhança de triângulos” a noção de semelhança é explorada e critérios são discutidos. Assim, se for possível exibi-la aos seus alunos seria interessante, caso contrário, apresente as principais ideias nela contida. Discuta a propriedade 4, presente na seção 2.1 da apostila 3 do PIC da OBMEP, “Teorema de Pitágoras e Áreas”, E. Wagner (referência 1), esse é um bom exemplo da correlação de semelhança de triângulos e áreas. O exercício 3 dessa mesma referência 1 pode ser abordado no seu plano de aula.

Exercícios a serem discutidos com os alunos: seguindo a mesma dinâmica anterior, espera-se que o professor proponha e discuta de 6 a 8 exercícios, com os seus alunos, relacionados ao tema em foco. A seguir apresentaremos um conjunto de sugestões de exercícios que podem ser abordadas pelo professor. Destacamos que na seção 2.3 da Apostila 3 do PIC da OBMEP, “Teorema de Pitágoras e Áreas”, E. Wagner, encontram-se vários exercícios (com resoluções no final da apostila) que podem complementar a sua exposição, ver em:
http://www.obmep.org.br/docs/apostila3.pdf . O mesmo irá ocorrer no material presente no Portal da Matemática: 9º Ano do Ensino Médio – Módulo de Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales, Semelhança entre Figuras e Polígonos nas videoaulas:

- Resolução de Exercícios: Semelhança de Triângulos – Parte 1;
- Resolução de Exercícios: Semelhança de Triângulos – Parte 2;
- Resolução de Exercícios: Semelhança de Triângulos – Parte 3.

(I) Problema 7, página 47, na apostila 3 do PIC da OBMEP, "Teorema de Pitágoras e Áreas", E. Wagner.

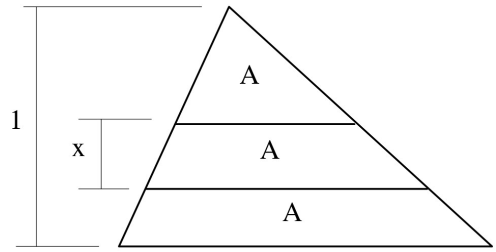
Na figura a seguir, $AD = \frac{2}{3}AB$ e $AE = \frac{2}{3}AC$. O segmento DE divide o triângulo em duas partes: um triângulo de área S1 e um trapézio de área S2. Qual destas duas áreas é maior?



Solução: Encontra-se na página 69, na apostila 3 do PIC da OBMEP, "Teorema de Pitágoras e Áreas", E. Wagner.

(II) Problema 15, páginas 49 e 50, na apostila 3 do PIC da OBMEP, "Teorema de Pitágoras e Áreas", E. Wagner.

A figura abaixo mostra um triângulo de altura 1 dividido por duas retas paralelas à sua base em três partes de mesma área. Qual é a altura do trapézio central?



Solução: Encontra-se na página 74, na apostila 3 do PIC da OBMEP, "Teorema de Pitágoras e Áreas", E. Wagner.

(III) Problema 1.3., página 3, Um Círculo Matemático de Moscou – Sergey Dorichenko .

Dados um triângulo ABC com ângulo B = 90°, AB = BC = 1 e um ponto M escolhido aleatoriamente em AC, é possível saber qual é a soma das distâncias de M a AB e de M a BC?

Solução: Encontra-se na página 65, Um Círculo Matemático de Moscou – Sergey Dorichenko.

(IV) Problema SJ2.15, página 236, Um Círculo Matemático de Moscou – Sergey Dorichenko .

ABCD é um quadrilátero (considere somente o caso convexo) de área 1. Os pontos médios dos lados AB, BC, CD e AD são denotados, respectivamente, por K, L, M e N. Encontre a área de KLMN.

Solução: Encontra-se na página 241, Um Círculo Matemático de Moscou – Sergey Dorichenko. Sugerimos que faça uma figura para facilitar o processo de resolução.

Observação: Destacamos que no endereço que segue existem vários exercícios que podem ser utilizados pelo professor: http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/d8hc0jr016gwo.pdf. Esses exercícios estão caracterizados como introdutórios, de fixação e de aprofundamento e exames.