(d) $mmc = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$.

Observamos que se temos dois números fatorados como produtos de primos, o que acabamos de ver é um excelente método para o cálculo do *mmc* e do *mdc*. Entretanto, se os números não estão fatorados, este método pode ser muito trabalhoso, pois na prática é muito difícil fatorar um número muito grande. Para fazer isto, para fatorar um número, devemos achar os seus divisores primos, que pode ser uma tarefa inviável se o número for grande. Por exemplo, tente encontrar as fatorações em primos dos números 461, 2437 ou 252997.

3.4 Cálculo do *mdc* e do *mmc*: fatorando simultaneamente

De modo geral, na escola básica é ensinado o cálculo do *mdc* e do *mmc* por meio de uma fatoração simultânea, como está explicado logo a seguir. O vídeo 10 do canal picobmep no YouTube explica detalhadamente este procedimento para o cálculo do *mdc* e do *mmc*. Recomendamos que você assista este vídeo para tirar suas dúvidas ou para aprender essa estratégia para o cálculo do *mdc* e do *mmc*.

Exercício 14: Calcule $mdc(100, 140)$.

Solução. Como o *mdc* entre 100 e 140 deve, naturalmente, ser um divisor de 100 e 140, podemos ir dividindo estes dois números por todos os números primos que os dividem simultaneamente. Como na fatoração de um número, esses cálculos podem ser organizados da seguinte maneira, em que do lado direito da barra vertical são colocados os números primos que dividem 100 e 140 ao mesmo tempo, e do lado esquerdo da barra são colocados os resultados dessas divisões sucessivas.

$$\begin{array}{rr|l} 100\ , & 140 & 2 \\ 50\ , & 70 & 2 \\ 25\ , & 35 & 5 \\ 5\ , & 7 & \end{array}$$

Como 5 e 7 são primos entre si (eles não possuem divisor primo em comum), paramos o processo e vemos que $mdc(100, 140) = 2^2 \cdot 5 = 20$, pois do modo como esse número foi construído, ele é um divisor comum de 100 e 140 e ele é o maior possível, pois testamos todas as possibilidades de divisores comuns.

Exercício 15: Calcule $mdc(1500, 1800)$.

Solução. Aplicando o processo prático para o cálculo do mdc descrito no exercício anterior, devemos dividir 1500 e 1800 por todos os divisores primos comuns. Paramos até obter dois números relativamente primos, isto é, dois números sem fator primo algum em comum.

$$\begin{array}{rr|l} 1500\ , & 1800 & 2 \\ 750\ , & 900 & 2 \\ 375\ , & 450 & 3 \\ 125\ , & 150 & 5 \\ 25\ , & 30 & 5 \\ 5\ , & 6 & \end{array}$$

Daí $mdc(1500, 1800) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300$.

Vejamos agora um processo similar para o cálculo do mmc.

Exercício 16: Calcule $mmc(12, 90)$.

Solução. Por ser um múltiplo de 12 e de 90, o $mmc(12, 90)$ deve ter todos os fatores primos que aparecem nas fatorações de 12 e de 90. Deste modo, a fatoração do $mmc(12, 90)$ deve conter as fatorações em números primos dos números 12 e 90. Então para calcular $mmc(12, 90)$ fatoramos ao mesmo tempo estes dois números, organizando o cálculo como está indicado a seguir, em que do lado direito da barra vertical colocamos os primos que dividem ou 12 ou 90. Para achar o menor múltiplo comum, sempre que for possível, dividir os dois números do lado esquerdo da barra vertical pelo respectivo número que aparece do lado direito.

$$\begin{array}{rr|l} 12\ , & 90 & 2 \\ 6\ , & 45 & 2 \\ 3\ , & 45 & 3 \\ 1\ , & 15 & 3 \\ 1\ , & 5 & 5 \\ 1\ , & 1 & \end{array}$$

Multiplicando todos os números primos do lado direito da barra vertical obtemos o mmc desejado. Portanto, $mmc(12, 90) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$.

Exercício 17: Calcule $mmc(75, 84)$.

Solução.

$$\begin{array}{rr|l} 75\ , & 84 & 2 \\ 75\ , & 42 & 2 \\ 75\ , & 21 & 3 \\ 25\ , & 7 & 5 \\ 5\ , & 7 & 5 \\ 1\ , & 7 & 7 \\ 1\ , & 1 & \end{array}$$

Daí segue que $mmc(75, 84) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 2100$.

Vale a pena observar que os processos explicados nos exercícios anteriores para o cálculo do mdc e do mmc podem ser aplicados simultaneamente. Para isto, basta identificar os fatores primos que dividiram os dois números ao mesmo tempo. Considerando somente estes números, obtemos o mdc. E considerando todos, obtemos o mmc.

Exercício 18: Calcule o mdc e o mmc de 980 e 1050.

Solução. Podemos utilizar o processo prático para o cálculo do mmc, mas em cada linha marcamos com um quadradinho o fator primo que divide os dois números simultaneamente.

$$\begin{array}{r@{\;,\;}r|c}
980 & 1050 & \boxed{2} \\
490 & 525 & 2 \\
245 & 525 & 3 \\
245 & 175 & \boxed{5} \\
49 & 35 & 5 \\
49 & 7 & \boxed{7} \\
7 & 1 & 7 \\
1 & 1 &
\end{array}$$

Considerando somente os fatores comuns obtemos $mdc(980, 1050) = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$ e considerando todos os fatores obtemos $mmc(980, 1050) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 14700$.

Também é importante observar que para o cálculo do mdc ou do mmc não existe a obrigatoriedade de dividir apenas por números primos e nem a necessidade de considerar os números primos em ordem crescente. Considerando números compostos, ou números primos maiores, o processo pode ser facilitado ou acelerado. Veja o seguinte exercício.

Exercício 19: Calcule o $mdc(6930, 9750)$.

Solução.

$$\begin{array}{rr|c} 6930\ , & 9750 & \boxed{10} \\ 693\ , & 975 & 5 \\ 693\ , & 195 & 5 \\ 693\ , & 39 & \boxed{3} \\ 231\ , & 13 & \end{array}$$

Como 13 e 231 não primos entre si, não é necessário continuar, pois não obteremos mais fatores em comum. Daí multiplicando os números marcados obtemos $mdc(6930, 9750) = 10 \cdot 3 = 30$.

O processo que acabamos de apresentar, nesta seção, para o cálculo do *mdc* e do *mmc* pode ser tão trabalhoso de ser executado quanto o processo visto na seção anterior, pois essencialmente, aqui também estamos fatorando os números como um produto de primos. Experimente esta dificuldade tentando calcular, por exemplo, $mdc(34241, 44329)$ ou $mmc(15563, 18407)$. Por este motivo surge a necessidade de estudar um método ainda mais eficiente para o cálculo do *mdc* e do *mmc*. No próximo encontro presencial será apresentado o Algoritmo de Euclides para o cálculo do *mdc*. Além disso, utilizando a propriedade $mdc(a, b) \cdot mmc(a, b) = a \cdot b$ veremos que também teremos um algoritmo para o cálculo do *mmc*. Entretanto, antes de apresentar este algoritmo e algumas propriedades importantes do *mmc* e do *mdc* vamos ver algumas aplicações dos conceitos introduzidos nesta aula.

3.5 Problemas de aplicação

Lembre-se de que começamos o estudo do *mdc* e do *mmc* pela análise das resoluções de alguns problemas contextualizados. Após esta motivação, após introduzir estes conceitos e de apresentar algumas estratégias para o cálculo do *mdc* e do *mmc*, é interessante voltar e aplicar novamente a teoria estudada na resolução de outros problemas. Nesta seção apresentamos uma pequena lista de problemas que envolvem o cálculo do *mdc* ou do *mmc*. Tente resolver estes problemas sozinho, procurando entender e sentir como os conceitos de *mdc* e de *mmc* surgem naturalmente na análise do problema proposto.

Exercício 20: (Banco de Questões 2010, nível 1, problema 28) Uma bibliotecária recebe 130 livros de Matemática e 195 livros de Português. Ela quer arrumá-los em estantes, colocando igual quantidade de livros em cada estante, sem misturar livros de Matemática e de Português na mesma estante. Quantos livros ela deve colocar em cada estante para que o número de estantes utilizadas seja o menor possível?

Solução. Denotando por n o número de livros que a bibliotecária vai colocar em cada estante, temos $130 \div n =$ número de estantes para os livros de Matemática e $195 \div n =$ número de estantes para os livros de Português. Isso mostra que n deve ser um divisor comum de 130 e de 195, pois o número de estantes utilizadas é inteiro. Sabemos que, quando aumentamos o denominador de uma fração, esta fração diminui; por exemplo, $27/10$ é menor do que $27/8$. Logo, quanto maior for o denominador n, menores serão as frações $130/n$ e $195/n$, o que significa que menor será o número de estantes utilizadas. Vemos, assim, que n deve ser o maior divisor comum de 130 e 195. Como as decomposições destes números em fatores primos são $130 = 2 \cdot 5 \cdot 13$ e $195 = 3 \cdot 5 \cdot 13$, segue que o *mdc* de 130 e 195 é $5 \cdot 13 = 65$. Logo, a bibliotecária vai colocar 65 livros em cada estante, o número de estantes para os livros de Matemática é $130 \div 65 = 2$ e o número de estantes para os de Português é $195 \div 65 = 3$, o que dá um total de $2 + 3 = 5$ estantes.

Exercício 21: (Banco de Questões 2010, nível 1, problema 158) No ponto de ônibus perto de sua casa, Quinzinho pode pegar os ônibus de duas linhas para ir à escola. Os ônibus de uma linha passam de 15 em 15 minutos e os da outra de 25 em 25 minutos, sendo que às 7h30m da manhã os ônibus das duas linhas passam juntos.

(a) A que horas passarão juntos novamente?

(b) Entre as 7h30min da manhã e a meia noite, quais são os horários em que os ônibus passam juntos neste ponto perto da casa de Quinzinho?

Solução.

(a) Fatorando temos $15 = 3 \cdot 5$ e $25 = 5^2$. Portanto o menor múltiplo comum de 15 e 25 é $75 = 3 \cdot 5^2$. Assim, os dois ônibus passarão juntos novamente no ponto a cada 75 minutos, ou seja, a cada 1h15min. Logo, os ônibus passarão juntos novamente no ponto perto da casa de Quinzinho, às 7h30min + 1h15min = 8h45min.

(b) Para obter os horários em que os ônibus passarão juntos no ponto de ônibus perto da casa de Quinzinho, devemos ir somando 1h15min, obtendo 8h45min, 10h, 11h15min, 12h30min, 13h45min, 15h, 16h15min, 17h30min, 18h45min, 20h, 21h15min, 22h30min e 23h45min. O próximo ônibus só passa depois da meia noite.

Exercício 22: Quantos números entre 1 e 2012 são múltiplos de 6 ou múltiplos de 15?

Solução. Para encontrar a quantidade de múltiplos de 6 compreendidos entre 1 e 2012, basta usar o algoritmo da divisão e observar que $2012 = 335 \cdot 6 + 2$. Isto mostra que $6 \cdot 1, 6 \cdot 2, \ldots, 6 \cdot 335$ são os múltiplos de 6 entre 1 e 2012, ou seja, temos 335 destes múltiplos. Do mesmo modo, como

$2012 = 134 \cdot 15 + 2$, vemos que existem 134 múltiplos de 15 entre 1 e 2012. Neste total de $335 + 134 = 469$, alguns números aparecem contados duas vezes, pois são múltiplos de 6 e de 15 ao mesmo tempo. Por exemplo, os números $6 \cdot 15$ e $2 \cdot 6 \cdot 15$ foram contados tanto como múltiplos de 6 quanto como múltiplos de 15. Lembre que os múltiplos de 6 e de 15 são, também, múltiplos de $mmc(6, 15) = 30$. Como $2012 = 67 \cdot 30 + 2$, podemos concluir que existem 67 múltiplos de 30 entre 1 e 2012. Logo, o número de múltiplos de 6 ou 15 entre 1 e 2012 é $469 - 67 = 402$.

Os próximos dois exercícios podem ser utilizados para comentar que o mdc e o mmc também são calculados para uma lista de mais de dois números.

Exercício 23: Três atletas correm numa pista circular e gastam, respectivamente, $2,4\ min$, $2,0\ min$ e $1,6\ min$ para completar uma volta na pista. Eles partem do mesmo local e no mesmo instante. Após algum tempo, os três atletas se encontram, pela primeira vez, no local de largada. Neste momento, o atleta mais veloz estará completando quantas voltas?

Solução. Para utilizar apenas números inteiros, em vez de considerar minutos como unidade de tempo, vamos utilizar segundos. Como um minuto possui 60 segundos, multiplicando os tempos em minutos por 60, vemos que os atletas percorrem uma volta na pista em 144 seg, 120 seg e 96 seg. Como cada atleta percorre voltas na pista em tempos que são múltiplos do tempo que ele gasta para percorrer uma volta, vemos que eles se encontrarão novamente, pela primeira vez, no local da largada após um tempo igual ao $mmc(144, 120, 96) = 1440$ segundos. Neste instante os atletas estarão completando $1440 \div 144 = 10$ voltas, $1440 \div 120 = 12$ voltas e $1440 \div 96 = 15$ voltas. Portanto, neste instante, o atleta mais veloz (aquele que gasta menos tempo para percorrer uma volta) estará completando 15 voltas.

Exercício 24: Três arames medem respectivamente, $180m$, $252m$ e $324m$. Pretende-se dividi-los em pedaços de mesmo comprimento. Qual deverá ser este comprimento de modo que o número de pedaços seja o menor possível? Em quantos pedaços os arames serão divididos? (Compare com o exercício 1 deste encontro.)

Solução. Para que a quantidade de pedaços seja a menor possível, o tamanho de cada um destes pedaços deve ser o maior possível. E como queremos dividir os arames em pedaços do mesmo tamanho, vemos que este tamanho d deve ser um divisor de 180, 252 e 324. Assim concluímos que d é o máximo divisor comum de 180, 252 e 324.

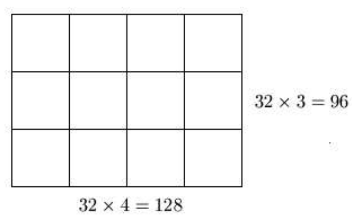
$$\begin{array}{rrr|l} 180\ , & 252\ , & 324 & 2 \\ 90\ , & 126\ , & 162 & 2 \\ 45\ , & 63\ , & 81 & 3 \\ 15\ , & 21\ , & 27 & 3 \\ 5\ , & 7\ , & 9 & \end{array}$$

Como 5, 7 e 9 são relativamente primos, paramos o processo e concluímos que $mdc(180, 252, 324) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$. Portanto os arames serão divididos em pedaços de 36 metros sendo que um rolo será dividido em $180 \div 36 = 5$ pedaços, o outro rolo em $252 \div 36 = 7$ pedaços e o último rolo em $324 \div 36 = 9$ pedaços.

Exercício 25: Determine a quantidade mínima de placas quadradas que são necessárias para cobrir uma superfície retangular de $12,8\ m$ de comprimento por $9,6\ m$ de largura?

Solução. Para utilizar apenas números inteiros, em vez de considerar metros como unidade de comprimento, vamos utilizar decímetros. Assim, o terreno retangular possui $128\ dm$ de comprimento por $96\ dm$ de largura.

Vamos supor que a superfície retangular seja coberta por $m \times n$ placas quadradas, sendo m faixas horizontais (no sentido do comprimento) e n faixas verticais (no sentido da largura da superfície retangular). Deste modo, se d é o comprimento do lado de cada placa quadrada, vemos que $n \times d = 128$ e $m \times d = 96$, de modo que d é um divisor comum de 128 e 96. Para conseguir cobrir a superfície retangular com a menor quantidade de placas é necessário considerar placas de maior tamanho possível. Assim, podemos concluír que d é o máximo divisor comum de 128 e 96. Daí $d = mdc(128, 96) = 32$ e, portanto, cada placa quadrada tem $32\ dm = 3{,}2\ m$ de lado. Mais ainda, como $n = 128 \div 32 = 4$ e $m = 96 \div 32 = 3$, vemos que a superfície retangular deve ser coberta por $4 \times 3 = 12$ placas quadradas. (Compare com o exercício 3 deste capítulo.)



Exercício 26: Determine o menor número inteiro positivo de três algarismos que é divisível, ao mesmo tempo, por 4, 8 e 12.

Solução. Dizer que um número é divisível por 4, 8 e 12 é o mesmo que dizer que este número é um múltiplo, ao mesmo tempo, de 4, 8 e 12. Como sabemos, todos os múltiplos de 4, 8 e 12 são múltiplos do $mmc(4, 8, 12) = 24$. Como $2 \times 24 = 48$, $3 \times 24 = 72$, $4 \times 24 = 96$ e $5 \times 24 = 120$, concluímos que o menor número inteiro positivo de três algarismos que é divisível, ao mesmo tempo, por 4, 8 e 12 é o número 120.

Exercício 27: Apresente dois números naturais que multiplicados por

168 e 180, respectivamente, resultam o mesmo número natural. Agora determine os menores números naturais com esta propriedade.

Solução. Procuramos números m e n tais que $168m = 180n$. Fatorando 168 e 180, podemos escrever esta igualdade assim: $2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot m = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot n$. Como a fatoração é única, para que esta igualdade seja verdadeira devem aparecer em m pelos menos os fatores 3 e 5 e, em n, devem aparecer pelo menos 2 e 7. Daí vemos que $m = 3 \cdot 5 \cdot k$ e $n = 2 \cdot 7 \cdot k$, para qualquer número natural k. Observe que neste caso $168m = 180n \Rightarrow 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot m = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot n \Rightarrow 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot (3 \cdot 5 \cdot k) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 7 \cdot k) \Rightarrow (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7) \cdot k = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7) \cdot k$.

A menor solução é obtida para $k = 1$, ou seja, para $m = 3 \cdot 5 = 15$ e $n = 2 \cdot 7 = 14$.

De outro modo ainda, se $168m = 180n$ com os menores valores possíveis de m e n, então o número $168m = 180n$ é igual ao mínimo múltiplo comum de 168 e 180. Daí $168m = 180n = mmc(168, 180) = 2520$. Portanto $m = 2520 \div 168 = 15$ e $n = 2520 \div 180 = 14$.

Exercício 28: Determine o menor número inteiro $n > 1$ tal que n deixa resto 1 quando dividido por 156 e n também deixa resto 1 quando dividido por 198.

Solução. Como n deixa resto 1 quando dividido por 156 temos que n tem a forma $n = 156a + 1$. Como n deixa resto 1 quando dividido por 198, n tem a forma $n = 198b + 1$. Assim vemos que $n - 1 = 156a$ e $n - 1 = 198b$ e, portanto, $n - 1$ é um múltiplo comum de 156 e de 198. Como queremos encontrar o menor tal número n, podemos então concluir que $n-1$ é o mínimo múltiplo comum de 156 e 198.

$$\begin{array}{rcr|r} 156 & , & 198 & 2 \\ 78 & , & 99 & 2 \\ 39 & , & 99 & 3 \\ 13 & , & 33 & 3 \\ 13 & , & 11 & 11 \\ 13 & , & 1 & 13 \\ 1 & , & 1 & \end{array}$$

Logo $n-1 = mmc(156, 198) = 2^2 \times 3^2 \times 11 \times 13 = 5148$ e, portanto, $n = 5149$.

Exercício 29: Determine os três menores números, maiores que 1, que ao serem divididos por 2, 3, 4, 5, 6, e 7 deixam resto 1.

Solução. Este exercício é muito similar ao anterior e a sua solução está discutida no vídeo 38 do canal picobmep no YouTube.

No Portal da Matemática, no 6º ano do Ensino Fundamental, no módulo "Divisibilidade", existem seis videoaulas sobre *mdc* e *mdc*:

- Máximo Divisor Comum
- Propriedades do *mdc*
- Exercícios de *mdc*
- Mínimo Múltiplo Comum
- Propriedades do *mmc*
- Exercícios de *mmc*

Durante os encontros 3 e 4 recomendamos o estudo destes vídeos. Em particular no vídeo "exercícios de *mmc*" você pode ver as soluções dos exercícios seguintes. Como sempre, tente resolver sozinho. E só depois de chegar a uma solução parcial ou completa, compare o seu raciocínio com o que está apresentado na videoaula.

Exercício 30: Em um cesto haviam ovos. Eram mais de 50 e menos de 60. Contando de 3 em 3, sobravam 2. Contando de 5 em 5, sobravam 4 ovos. Qual é a quantidade de ovos no cesto?

Exercício 31: Determine o menor número que divido por 8, 18 e 20 deixa restos 1, 11 e 13, respectivamente.