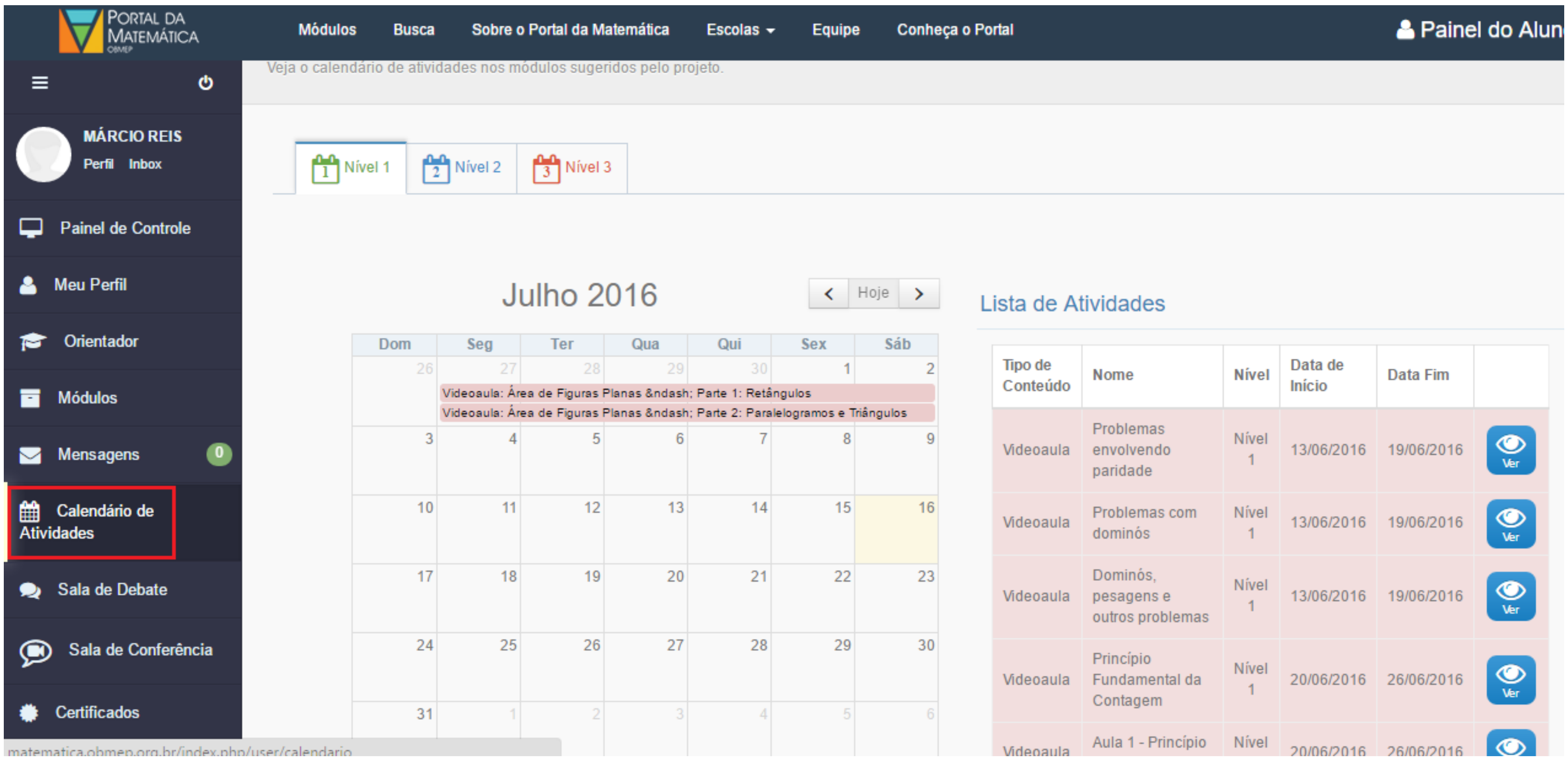
Ciclo 2 – Encontro 1

ARITMÉTICA DOS RESTOS, DIVISIBILIDADE E CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

Nível 3
PO: Márcio Reis
11° Programa de Iniciação Científica Jr.

Avisos!

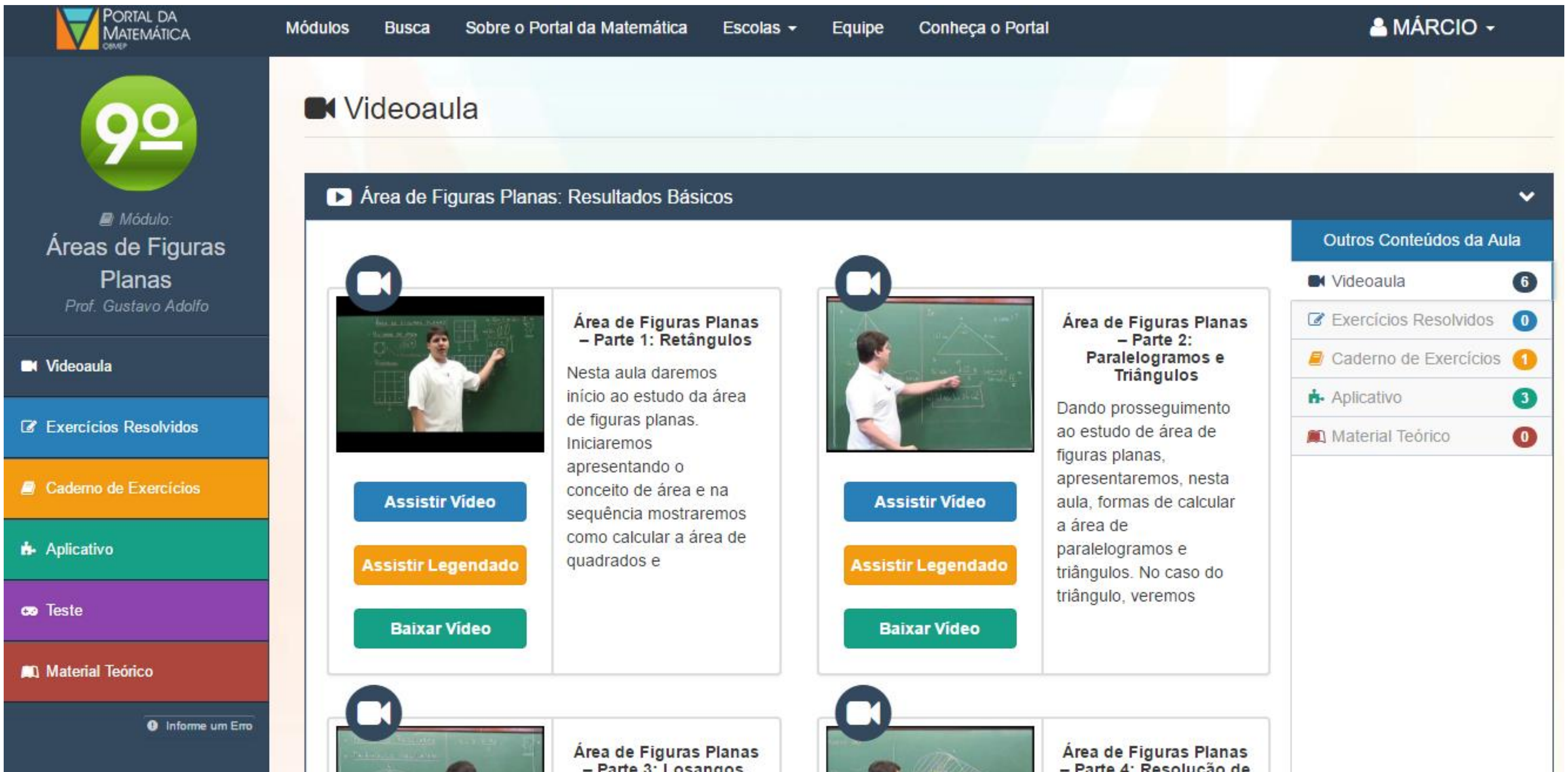


11º PIC Programa de Iniciação Científica da OBMEP

Avisos!

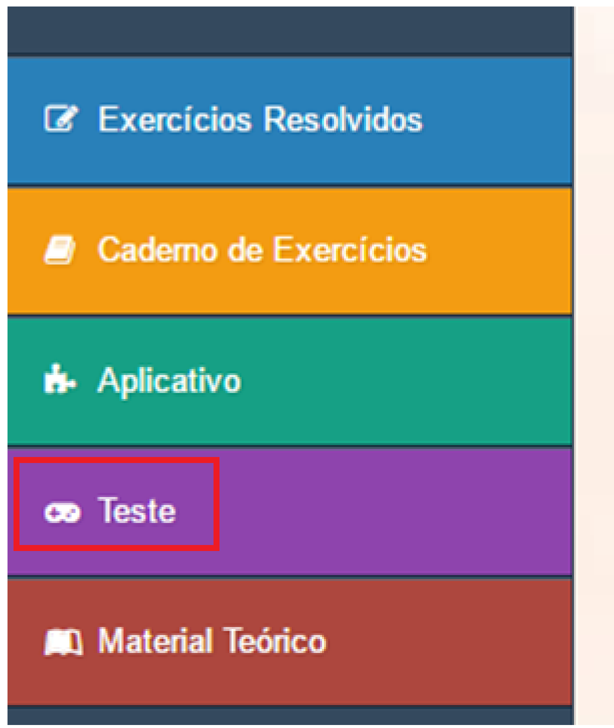
11º PIC Programa de Iniciação Científica da OBMEP

Avisos!



11º PIC Programa de Iniciação Científica da OBMEP

Avisos!


Exercícios Resolvidos
Caderno de Exercícios
Aplicativo
Teste
Material Teórico

Avisos!

Teste

Teste das Aulas

Orientações

Participação
Você poderá participar do Teste quantas vezes quiser, sendo aprovado ou não, para praticar ou simplesmente melhorar seu desempenho.
Ao abrir o Teste, você não pode fechar ou atualizar a página, caso isso aconteça, o sistema entenderá que o Teste foi encerado.

Tempo
Não existe tempo para a resolução das questões, o contador que aparece tem a finalidade de orientar quanto ao tempo gasto.

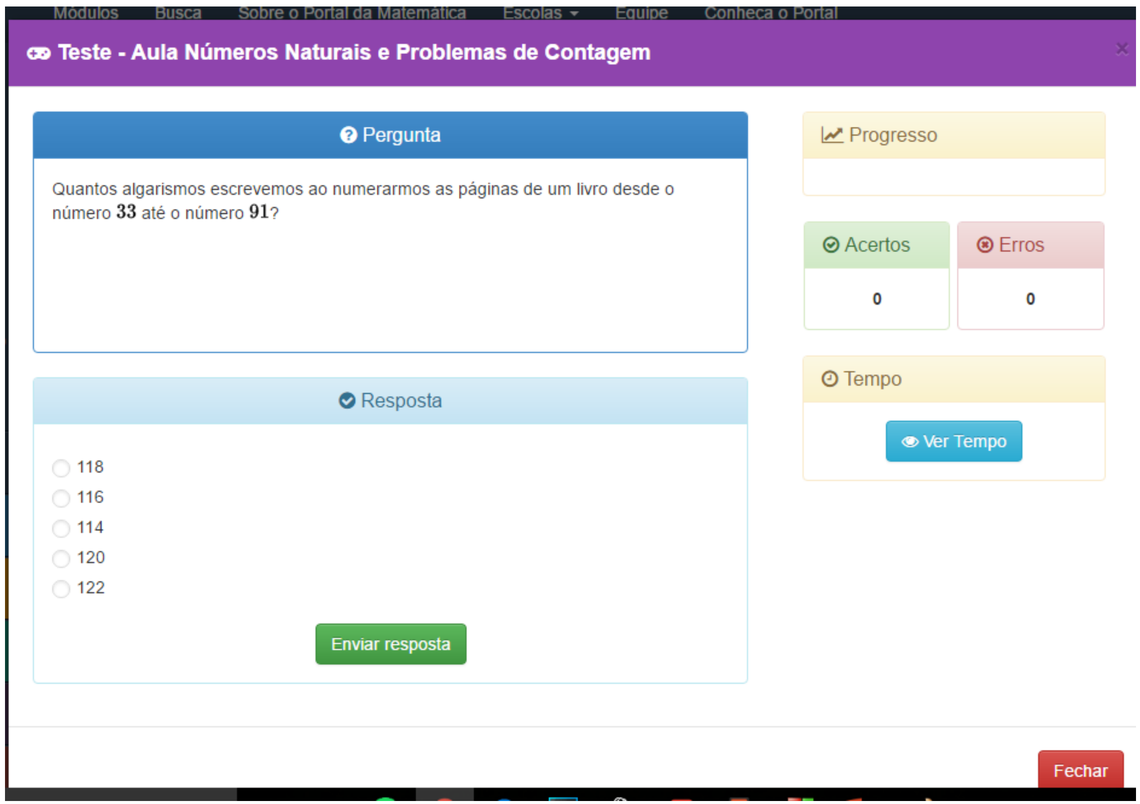
Total de Perguntas
O Teste e composto de 6 perguntas em diferentes níveis de dificuldade.

Aprovação
Para ser aprovado, as 6 perguntas deverão ser respondidas em sequencia sem erros, caso alguma resposta esteja errada, o sistema recomeça a contagem para o total de certas.

Avisos!

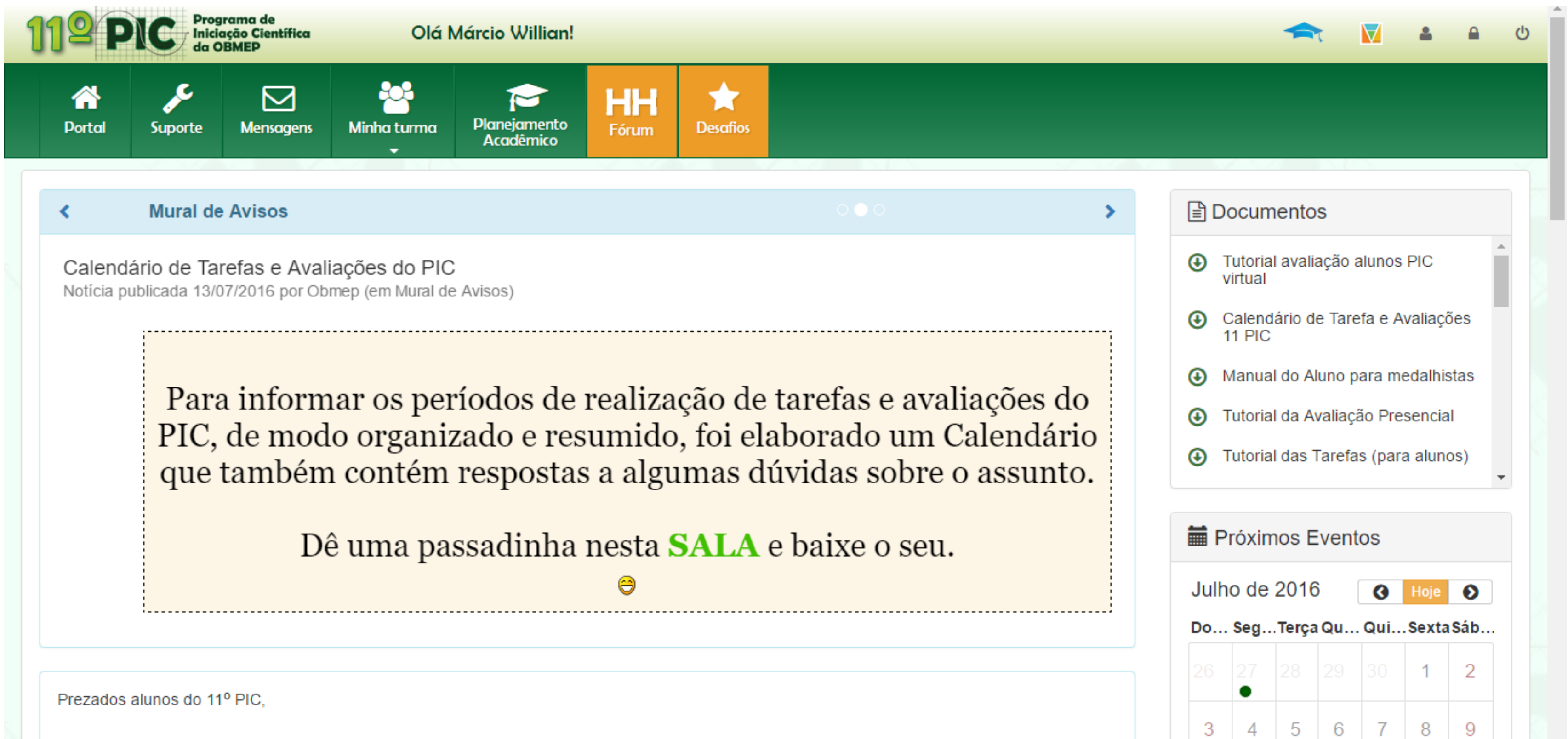

O Teste e composto de 6 perguntas em diferentes níveis de dificuldade.
Aprovação
Para ser aprovado, as 6 perguntas deverão ser respondidas em sequencia sem erros, caso alguma resposta esteja errada, o sistema recomeça a
para o total de certas.
Números Naturais e Problemas de Contagem
Você ainda não participou do Teste.
Leia as orientações e clique em Iniciar Teste
Iniciar o Teste!
Divisibilidade e Teorema da Divisão Euclidiana
Você ainda não participou do Teste.
Leia as orientações e clique em Iniciar Teste
Iniciar o Teste!

Avisos!



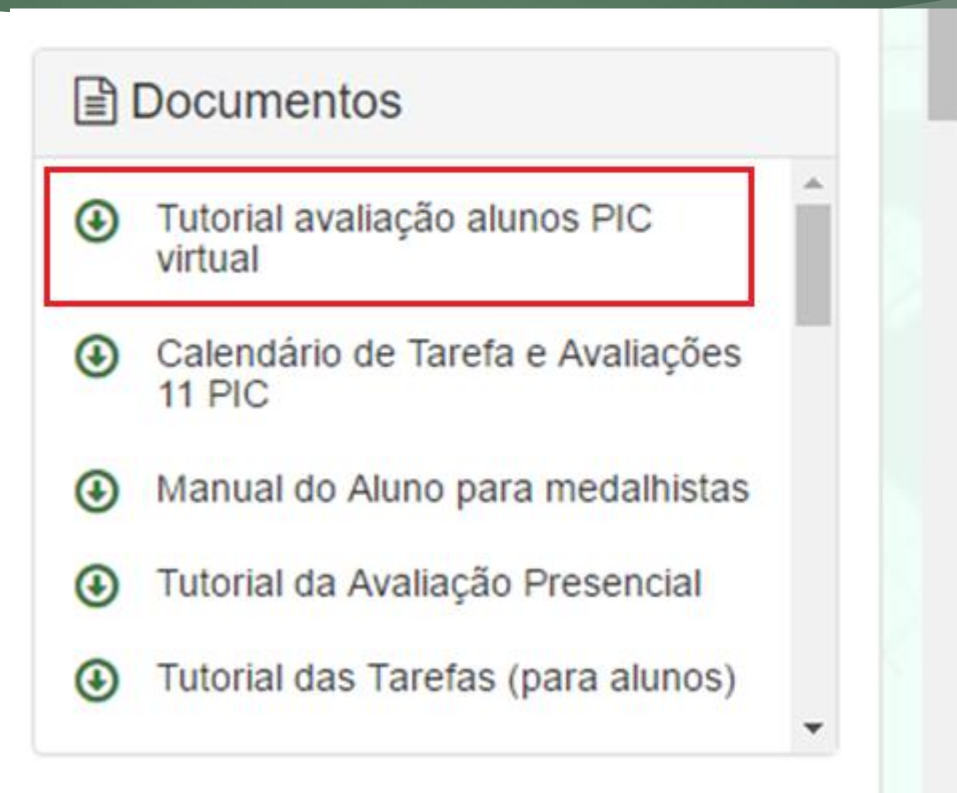
11º PIC Programa de Iniciação Científica da OBMEP

Avisos!

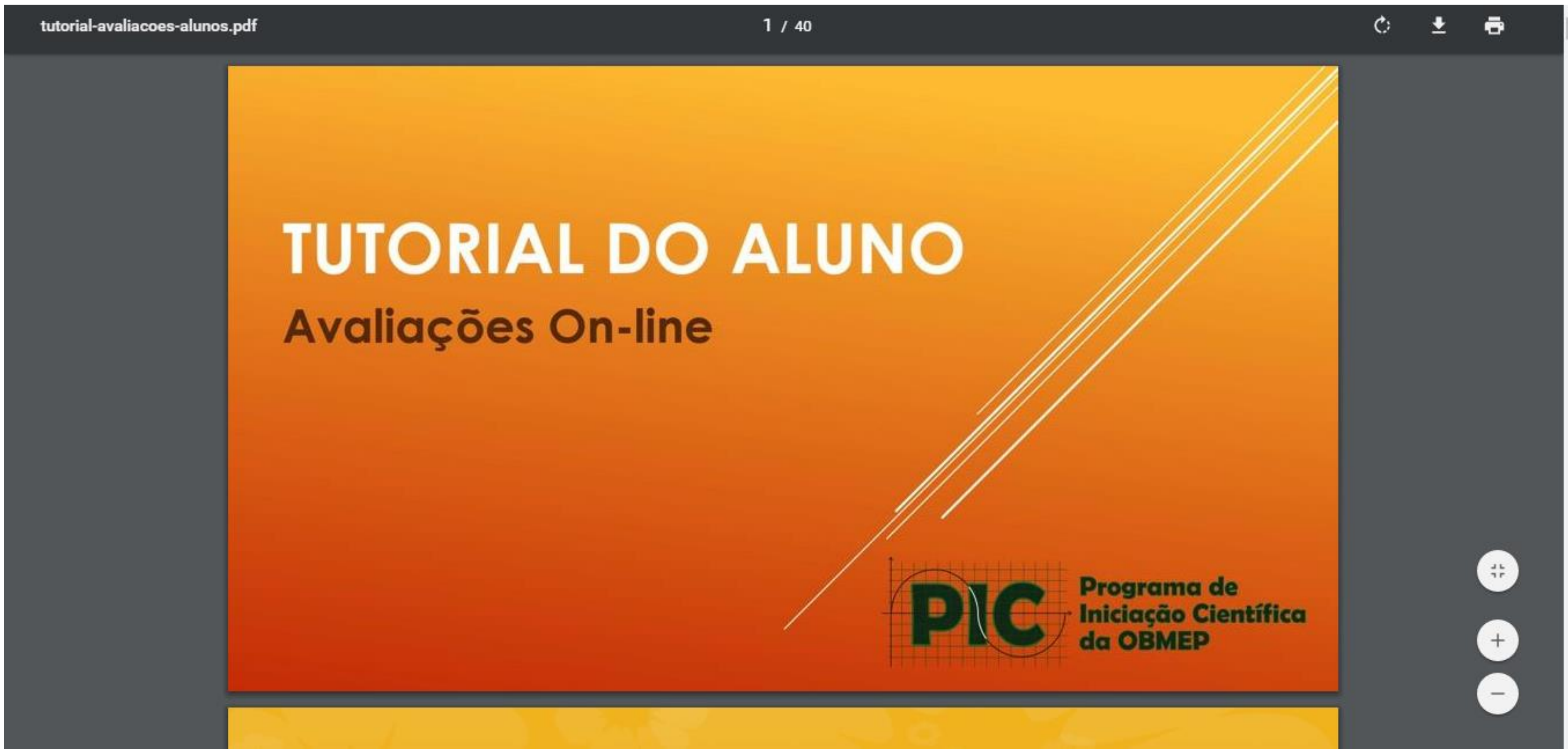


11º PIC Programa de Iniciação Científica da OBMEP

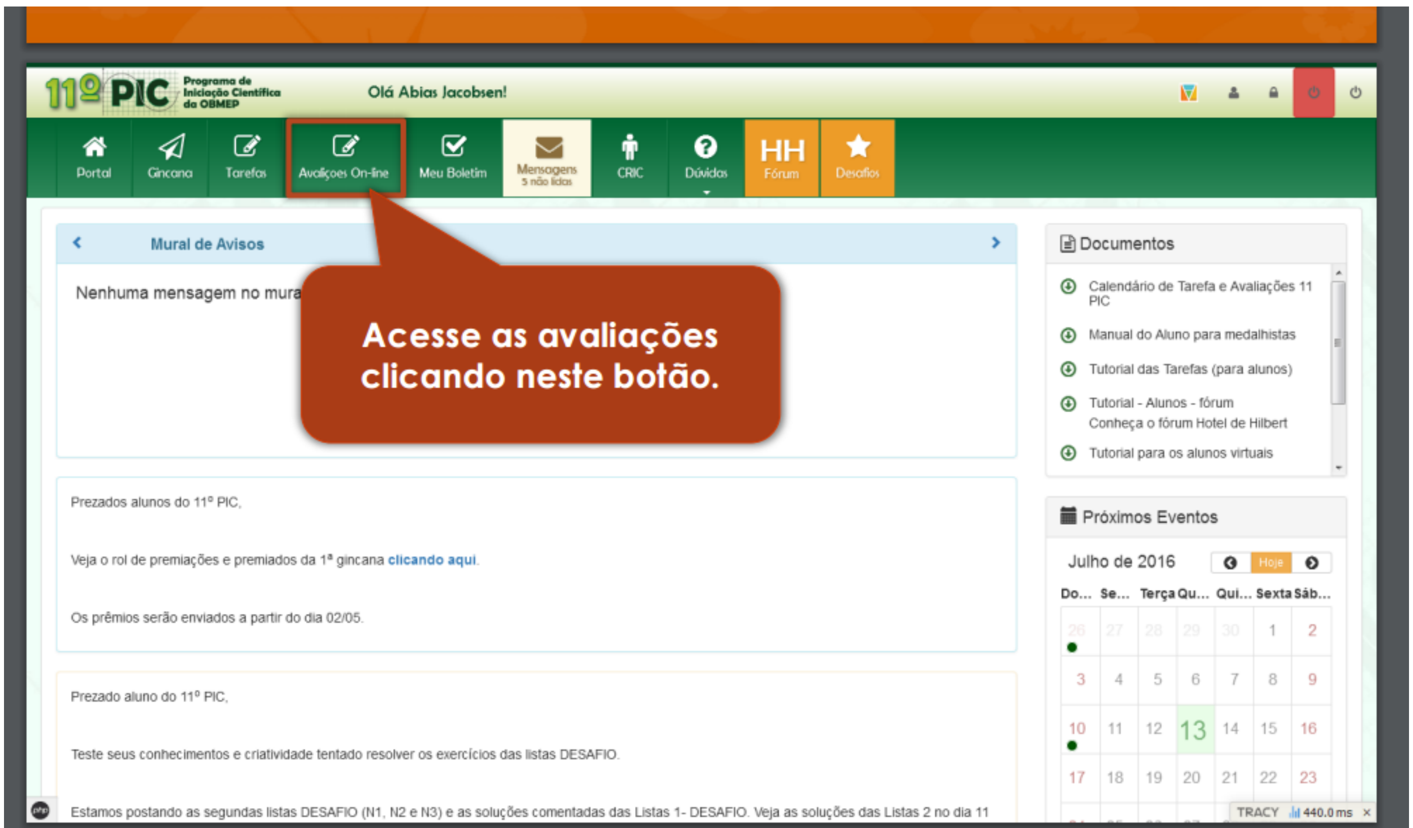
Avisos!


Documentos
Tutorial avaliação alunos PIC virtual
Calendário de Tarefa e Avaliações 11 PIC
Manual do Aluno para medalhistas
Tutorial da Avaliação Presencial
Tutorial das Tarefas (para alunos)

Avisos!


tutorial-avaliacoes-alunos.pdf
1 / 40
TUTORIAL DO ALUNO
Avaliações On-line
PIC
Programa de
Iniciação Científica
da OBMEP

Avisos!


Programa de Iniciação Científica da OBMEP
Olá Abias Jacobsen!
Portal
Gincana
Tarefas
Avaliçoes On-line
Meu Boletim
Mensagens
5 não lidas
CRIC
Dúvidas
HH
Fórum
Desafios
Mural de Avisos
Nenhuma mensagem no mura
Acesse as avaliações clicando neste botão.
Prezados alunos do 11º PIC,
Veja o rol de premiações e premiados da 1ª gincana clicando aqui.
Os prêmios serão enviados a partir do dia 02/05.
Prezado aluno do 11º PIC,
Teste seus conhecimentos e criatividade tentado resolver os exercícios das listas DESAFIO.
Estamos postando as segundas listas DESAFIO (N1, N2 e N3) e as soluções comentadas das Listas 1- DESAFIO. Veja as soluções das Listas 2 no dia 11
Documentos
Calendário de Tarefa e Avaliações 11 PIC
Manual do Aluno para medalhistas
Tutorial das Tarefas (para alunos)
Tutorial - Alunos - fórum
Conheça o fórum Hotel de Hilbert
Tutorial para os alunos virtuais
Próximos Eventos
Julho de 2016
Hoje
Do... Se... Terça Qu... Qui... Sexta Sáb...
TRACY 440.0 ms

Aritmética dos restos, divisibilidade e critérios de divisibilidade

- Apostila 1: ENCONTROS DE ARITMÉTICA, de F. Dutenhefner e L. Cadar.

  Seções 2.2, 2.3, 2.4 e 2.6:

  Fenômenos periódicos;

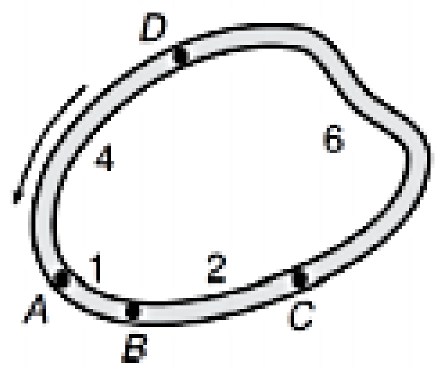
  Aritmética dos restos;

  Múltiplos e divisores;

  Critérios de divisibilidade.

Fenômenos periódicos

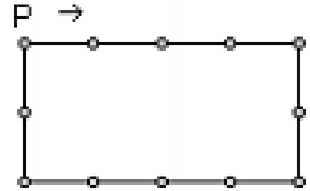
- O resto de uma divisão pode ser utilizado na resolução de problemas que envolvem fenômenos periódicos.



Fenômenos periódicos

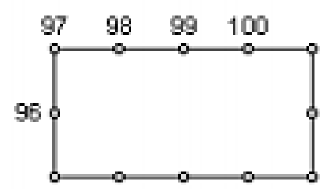
- Exemplo 1:

Pedro caminha ao redor de uma praça retangular onde estão dispostas 12 árvores, brincando de tocar cada árvore durante seu passeio. Se no início ele toca a árvore indicada na figura, e se ele anda no sentido da seta, indique que árvore ele estará tocando ao encostar em uma árvore pela centésima vez.



Fenômenos periódicos

Solução. Na figura, próximo de cada árvore escreva os números 1, 2, 3, ..., correspondentes aos números de árvores tocadas por Pedro (a árvore indicada pela letra P recebe o número 1, a próxima o número 2, e assim por diante). Como existem 12 árvores na praça, na árvore indicada pela letra P estarão escritos os número 1, 13, 25, ... que são todos os números que deixam resto 1 quando divididos por 12. Dividindo 100 por 12, obtemos quociente 8 e resto 4, isto é, $100 = 8 \times 12 + 4$. Daí vemos que na centésima vez, Pedro estará tocando a árvore que está 3 posições à frente daquela indicada pela letra P.



Fenômenos periódicos

- Exemplo 2: Qual é o algarismo da unidade de 2^{2015} ? E 2^{2016}?

Fenômenos periódicos

- Exemplo 2: Qual é o algarismo da unidade de 2^{2015} ? E 2^{2016}?

Solução. Calculando as primeiras potências de 2 obtemos:

$$2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32,\ 2^6 = 64,$$

$$2^7 = 128,\ 2^8 = 256,\ 2^9 = 512$$

Observando esses números, vemos que os últimos algarismos formam uma sequência periódica: 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2 etc., em que os quatro números 2, 4, 8, 6 ficam se repetindo infinitamente.

$$2015 = 503 \times 4 + 3$$
$$2016 = 503 \times 4 + 4$$

Aritmética dos restos

- No 1 do Ciclo 1, estudamos o Algoritmo da Divisão Euclidiana. Na divisão de dois números naturais **a** por **b** existe um quociente **q** e um resto **r** tal que **a = bq + r** sendo que obrigatoriamente **0 ≤ r ≤ b−1**.
- Por exemplo, na igualdade **1649 = 7 × 235 + 4** identificamos imediatamente o número **4** como o resto da divisão de **1649** por **7**. Por outro lado, na igualdade **415 = 7 × 58 + 9**, o número **9** não é o resto da divisão de **58** por **7**, pois na divisão por **7** o resto deve ser um número natural menor que **7**. Observe que a igualdade **415 = 7 × 58 + 9** significa que se temos **415** unidades, estas podem ser organizadas em **58** grupos de **7** unidades cada e em um grupo de **9** unidades.

Aritmética dos restos

- Nesta seção veremos como calcular o resto da divisão de uma soma, uma diferença ou um produto de dois números, sem ter que efetuar as operações com os números dados.
- ***Exemplo 1:***

Nas divisões de 163 e 360 por 7 obtemos, respectivamente, restos 2 e 3. Qual é o resto da divisão de 163 + 360 por 7?

Aritmética dos restos

- Nesta seção veremos como calcular o resto da divisão de uma soma, uma diferença ou um produto de dois números, sem ter que efetuar as operações com os números dados.
- ***Exemplo 1:***

Nas divisões de 163 e 360 por 7 obtemos, respectivamente, restos 2 e 3. Qual é o resto da divisão de 163 + 360 por 7?

$$163 = 7 \times 23 + 2 \text{ e } 360 = 7 \times 51 + 3$$

$$163 + 360 = (7 \times 23 + 2) + (7 \times 51 + 3) = 7(23 + 51) + (2 + 3) = 7 \times 74 + 5$$

Aritmética dos restos

- ***Exemplo 2:***

Nas divisões de 106 e 197 por 6 obtemos, respectivamente, restos 4 e 5. Qual é o resto da divisão de 106 + 197 por 6?

Aritmética dos restos

- ***Exemplo 2:***

Nas divisões de 106 e 197 por 6 obtemos, respectivamente, restos 4 e 5. Qual é o resto da divisão de 106 + 197 por 6?

$$106 = 6 \times 17 + 4 \text{ e } 197 = 6 \times 32 + 5$$

$$106 + 197 = (6 \times 17 + 4) + (6 \times 32 + 5) = 6(17 + 32) + (4 + 5) =$$
$$= 6 \times 49 + 9 = 6 \times 49 + (6 + 3) = 6 \times 50 + 3$$

Aritmética dos restos

- Para calcular o resto da divisão de uma soma por um divisor, basta somar os restos das divisões de cada uma das parcelas pelo mesmo divisor. Se a soma dos restos passa do divisor, calcule o resto da divisão pelo divisor dessa soma de restos.
- Para calcular o resto da divisão do resultado de uma multiplicação por um divisor, basta multiplicar os restos das divisões de cada uma das parcelas pelo mesmo divisor. Se o produto dos restos passa do divisor, calcule o resto da divisão pelo divisor desse produto de restos.

Múltiplos e Divisores

Multiplicando o número 3 por qualquer número natural obtém-se os múltiplos positivos de 3. Assim, os múltiplos positivos de 3 são: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...

Todos estes números formam o **conjunto dos múltiplos positivos de 3**, que pode ser representado do seguinte modo:

- M(3) = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, . . .}.

Generalizando, considerando somente números positivos, dado um número natural a, o **conjunto dos múltiplos de a** é o conjunto:

- M(a) = {a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a, 7a, 8a, . . .}.

Múltiplos e Divisores

Se **a** e **b** são números naturais, então:

- **b** é múltiplo de **a** se existe um **n** tal que **b = na**;
- **b** é múltiplo de **a** quando o resto da divisão de **b** por **a** é **0**;

Se **m** e **n** são números naturais, então:

- O produto **p = mn** é múltiplo de **m** e de **n**;
- **m** e **n** são fatores (e divisores) de **p**;

Múltiplos e Divisores

Evidentemente, dado um número natural **a**, se **d** é um divisor positivo de **a** então **1 ≤ d ≤** a. Assim, todo número natural possui uma quantidade finita de divisores positivos, enquanto possui uma quantidade infinita de múltiplos.

- D(7) = {1, 7}
- D(12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}
- D(72) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72}

Múltiplos e Divisores

Considerando somente números inteiros positivos, um número da forma **a x q + r** é um múltiplo de **a** somente quando **r** é um múltiplo de **a**.

Múltiplos e Divisores

- Exemplo 1:

(Banco de Questões 2006, nível 1, lista 4, problema 1)

Da igualdade $9174532 \times 13 = 119268916$ pode-se concluir que um dos números abaixo é divisível por 13. Qual é este número?

(a) 119268903 (b) 119268907 (c) 119268911

(d) 119268913 (e) 119268923.

Múltiplos e Divisores

- Exemplo 1:

Solução. Como 119268916 é divisível por 13, podemos concluir que os números divisíveis por 13 são aqueles obtidos somando-se ou subtraindo-se múltiplos de 13 ao número 119268916. Dentre os números apresentados, o número $119268916 - 13 = 119268903$ é o único divisível por 13.

Critérios de divisibilidade

- Vamos estudar os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 9 e 10. Antes disso, devemos observar que em muitos casos o uso de um critério de divisibilidade só faz sentido para números "grandes". Para números "pequenos", o problema de decidir se um dado número é divisível ou não por outro pode ser resolvido através do uso da tabuada ou de uma simples divisão. Além disso, como "ser divisível por" e "ser múltiplo de" significam exatamente a mesma coisa, é importante ter em mente que um critério de divisibilidade também é um critério de multiplicidade.

Critérios de divisibilidade por 3

Um número é divisível por 3 se a soma dos seus algarismos é divisível por 3.

Para entender este critério de divisibilidade, primeiramente precisamos observar que todas as potências de 10 deixam resto 1 quando divididas por 3:

$$10 = 3 \cdot 3 + 1.$$

$$100 = 3 \cdot 33 + 1.$$

$$1000 = 3 \cdot 333 + 1.$$

Critérios de divisibilidade por 3

Desta observação, vamos verificar, sem efetuar a divisão, se o número 457 é ou não é divisível por 3. O número 457 pode ser escrito como $457 = 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7$ ou ainda, $457 = 4(3 \cdot 33 + 1) + 5(3 \cdot 3 + 1) + 7$. Colocando o fator 3 em evidência, vemos que $457 = 3(4 \cdot 33 + 5 \cdot 3) + (4 + 5 + 7)$. Como o número $3(4 \cdot 33 + 5 \cdot 3)$ é divisível por 3, precisamos somente verificar se $4 + 5 + 7 = 16$ é divisível por 3. Como este número não é divisível por 3, concluímos que 457 também não é divisível por 3. Mais ainda, como 16 deixa resto 1 quando dividido por 3, podemos até concluir que 457 também deixa resto 1 quando dividido por 3.

Critérios de divisibilidade por 9

Um número é divisível por 9 se a soma dos seus algarismos é divisível por 9.

Como no caso da divisibilidade por 3, primeiramente observe que todas as potências de 10 deixam resto 1 quando divididas por 9:

$$10 = 9 \cdot 1 + 1.$$

$$100 = 9 \cdot 11 + 1.$$

$$1000 = 9 \cdot 111 + 1.$$

Critérios de divisibilidade por 9

Vejamos, sem efetuar a divisão, se o número 2345 é ou não é divisível por 9. Podemos escrever $2345 = 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5$, ou ainda, $2345 = 2(9 \cdot 111 + 1) + 3(9 \cdot 11 + 1) + 4(9 + 1) + 5$. Colocando o fator 9 em evidência, $2345 = 9(2 \cdot 111 + 3 \cdot 11 + 4) + (2 + 3 + 4 + 5)$. Como o número $9(2 \cdot 111 + 3 \cdot 11 + 4)$ é divisível por 9, precisamos somente verificar se o número $2 + 3 + 4 + 5 = 14$ é divisível por 9. Como este número não é divisível por 9, podemos concluir que 2345 também não é divisível por 9. Mais ainda, como 14 deixa resto 5 quando dividido por 9, concluímos que 2345 também deixa resto 5 quando dividido por 9.

Critérios de divisibilidade por 4

[critério de divisibilidade por 4] Um número natural é divisível por 4 quando o número formado pelos seus dois últimos algarismos é divisível por 4. Vamos explorar este critério escrevendo, por exemplo, o número 23562 do seguinte modo: $23562 = 235 \cdot 100 + 62$. E como $100 = 4 \cdot 25$, $23562 = 235 \cdot 4 \cdot 25 + 62 = 4(235 \cdot 25) + 62$. Como $4(235 \cdot 25)$ é divisível por 4, é suficiente analisar o número 62. Como $62 = 4 \cdot 15 + 2$ vemos que 62 e, portanto, $23562 = 4(235 \cdot 25) + 62$ não são divisívies por 4. Além disso, estes números deixam resto 2 quando divididos por 4.

Critérios de divisibilidade por 2, 6, 5 e 10

Agora vamos relembrar os critérios mais fáceis. Um número é divisível por 2 quando é par e um número é divisível por 6 quando é divisível, ao mesmo tempo, por 2 e por 3. Um número é divisível por 5 quanto termina em 0 ou em 5, e um número é divisível por 10 quando termina em zero. Utilize os critérios de divisibilidade para resolver os seguintes problemas.

Exercício 1

Diferença de potências – Seja $n = 9\,867$. Se você calculasse $n^3 - n^2$, qual seria o algarismo das unidades encontrado?

(a) 0 (b) 2 (c) 4 (d) 6 (e) 8

Exercício 1 - Solução

Diferença de potências – A opção correta é (c).

Solução 1: O algarismo final de $9\,867^3$ é o mesmo que o de $7^3 = 343$, isto é, 3. O algarismo final de $9\,867^2$ é o mesmo que o de $7^2 = 49$, isto é, 9. Se de um número terminado em 3 subtraímos outro terminado em 9, o algarismo final do resultado é 4.

Observação: Observe que o algarismo das unidades da diferença $9\,867^3 - 9\,867^2$ é igual ao algarismo das unidades de $(7^3 - 7^2)$.

Solução 2: $n^3 - n^2 = n^2(n-1)$, com $n^2 = 9\,867^2$ terminando em 9 e $n - 1 = 9\,866$ em 6. Como $9 \times 6 = 54$, o algarismo final de $n^2(n-1)$ é 4.

Exercício 2

Contando os zeros - Quantos zeros existem no final do número $9^{2007}+1$?

Exercício 2 - Solução

Contando os zeros - A tabela ao lado mostra como aparecem em ordem, dezena e unidade, os dois últimos algarismos de algumas potências de 9. Observe que esses dois últimos algarismos de 9^0 e 9^{10} são os mesmos; logo a partir 9^{10} a segunda coluna da tabela começará a se repetir, formando uma seqüência periódica, de período 10. Como $2007 = 10 \times 200 + 7$ e os dois últimos algarismos de $9^{10\times 200}$ são 01, segue que os dois útimos algarismos de 9^{2007} são os dois últimos algarismos de 9^7, ou seja 69. Daí os dois últimos algarismos de $9^{2007} + 1$ são iguais a $69 + 1 = 70$. Portanto, existe um único zero no final do número $9^{2007} + 1$.

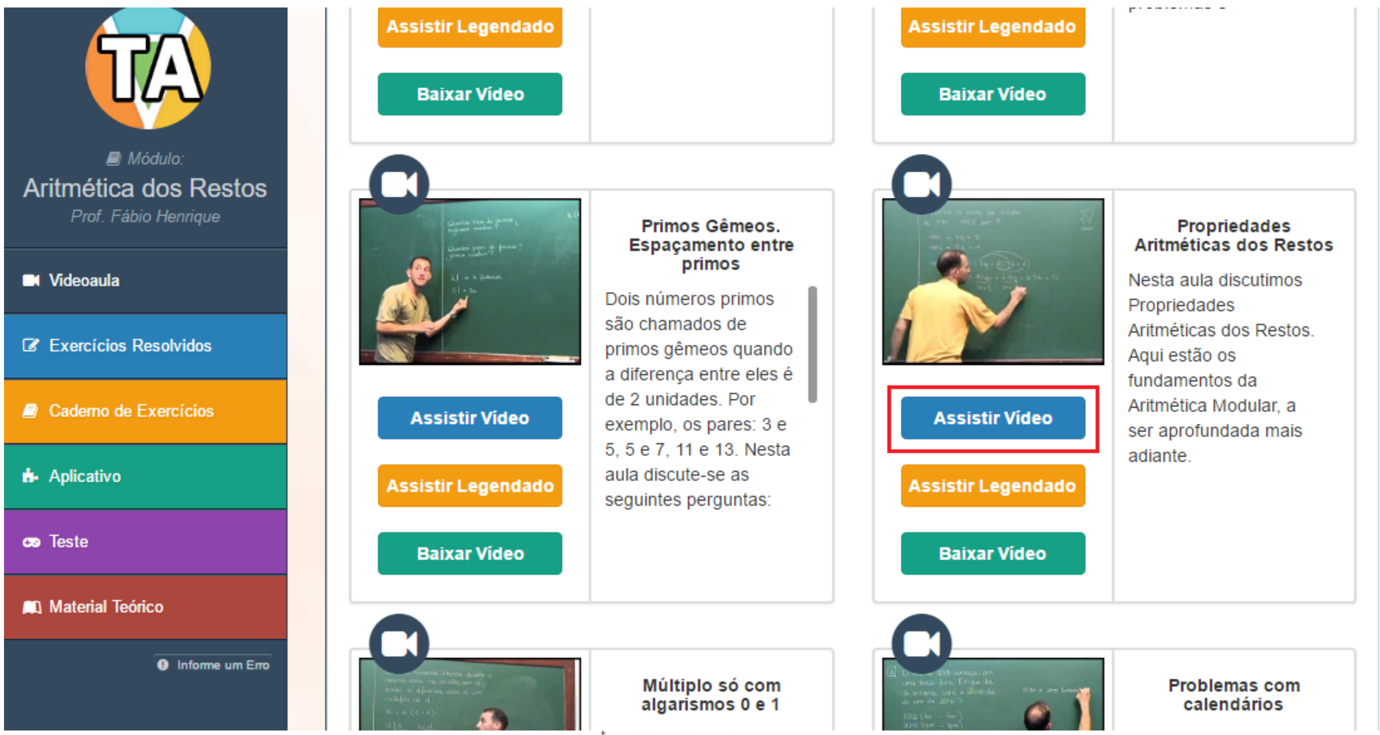
n	dois últimos algarismos de 9^n
0	01
1	09
2	81
3	29
4	61
5	49
6	41
7	69
8	21
9	89
10	01

Exercício 3

Quais são os restos das divisões de 1991^3 e $1989 \cdot 1990 \cdot 1991 + 1992^2$ por 7?

Exercício 3 - Solução

http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=63



Exercício 4

(OBMEP 2011 - N2Q3 - 2ª fase) O *múltiplo irado* de um número natural é o menor múltiplo do número formado apenas pelos algarismos 0 e 1. Por exemplo, o múltiplo irado de 2, bem como de 5, é 10; já o múltiplo irado de 3 é 111 e o de 110 é ele mesmo.

(a) Qual é o múltiplo irado de 20?

(b) Qual é o múltiplo irado de 9?

(c) Qual é o múltiplo irado de 45?

(d) Qual é o menor número natural cujo múltiplo irado é 1110?

Exercício 4 - Solução

a) Os primeiros múltiplos naturais de 20 são 20, 40, 60, 80 e 100. Logo o múltiplo irado de 20 é 100.

b) Se os algarismos de um número divisível por 9 são apenas 0 e 1, nesse número devem aparecer pelo menos nove algarismos 1. Para que esse múltiplo seja o menor possível, ele deve ter o menor número de algarismos possível; logo o múltiplo irado de 9 é 111111111.

c) Um múltiplo de 45 é múltiplo de 5 e 9; logo seu algarismo das unidades é 0 ou 5 e a soma de seus algarismos é divisível por 9. Como múltiplos irados são formados apenas pelos algarismos 0 e 1, segue que o múltiplo irado de 45 deve ter 0 como algarismo das unidades; logo esse múltiplo é 1111111110.

d) O número 1110 é o menor número que tem apenas os algarismos 0 e 1 que é, ao mesmo tempo,

- múltiplo de 3, pois a soma de seus algarismos é 3;
- múltiplo de 2, pois seu último algarismo é 0.

Logo 1110 é o múltiplo irado de 6. Como os múltiplos irados de 1, 2, 3, 4 e 5 são, respectivamente, 1, 10, 111, 100 e 10, segue que o menor número cujo múltiplo irado é 1110 é 6.

Exercício 5

(Fomin, capítulo 3, problema 30) Encontre o último algarismo do número 777^{777}.

Exercício 5 - solução

Solução. Para começar, note que o último algarismo do número 777^{777} é igual ao último algarismo do número 7^{777}. Procedendo como explicado no exercício anterior, podemos calcular o último algarismo das primeiras potências de 7.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
último algarismo de 7^n	7	9	3	1	7	9	3	1	7

Daí vemos que o ciclo 7, 9, 3, 1 se repete infinitamente. Dividindo 777 por 4 (que é o tamanho do ciclo), obtemos quociente 194 e resto 1. Daí o último algarismo de 7^{777} é igual ao último algarismo de 7^1, que é 7.

Exercício 6

Se o resto da divisão de a por 7 é igual a 3, então qual é o resto da divisão de 5a por 7?

Se a deixa resto 6 quando dividido por 8 e se b deixa resto 5 quando dividido por 8, qual é o resto da divisão de $a+b$ e de $a-b$ por 8?

Exercício 6 - solução

1. Podemos escrever $a = 7q + 3$. Daí $5a = 5(7q + 3) = 7 \times (5q) + 15$. Dividindo 15 por 7 obtemos resto 1. Daí $5a$ é a soma de um múltiplo de 7 com 1 e, portanto, o resto da divisão de $5a$ por 7 é igual a 1.

2. Podemos escrever $a = 8n + 6$ e $b = 8m + 5$. Daí $a + b = (8n + 6) + (8m + 5) = (8n + 8m) + 11$ e $a - b = (8n + 6) - (8m + 5) = (8n - 8m) + 1$. Como 11 deixa resto 3 quando dividido por 8, vemos que $a + b$ deixa resto 3 quando dividido por 8. De $a - b = (8n - 8m) + 1$, segue que $a - b$ deixa resto 1 quando dividido por 8.

Boas férias!

Próximo encontro: 06/08