

Ciclo 2 – Encontro 1

ARITMÉTICA DOS RESTOS, DIVISIBILIDADE E
CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

Nível 3
PO: Márcio Reis
11º Programa de Iniciação Científica Jr.

Avisos!

PORTAL DA MATEMÁTICA OBMEP

Módulos Busca Sobre o Portal da Matemática Escolas Equipe Conheça o Portal Pannel do Aluno

Veja o calendário de atividades nos módulos sugeridos pelo projeto.

Nível 1 Nível 2 Nível 3

Julho 2016 < Hoje >

Dom	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sáb
26	27	28	29	30	1	2
Videoaula: Área de Figuras Planas – Parte 1: Retângulos						
Videoaula: Área de Figuras Planas – Parte 2: Paralelogramos e Triângulos						
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31	1	2	3	4	5	6

Lista de Atividades

Tipo de Conteúdo	Nome	Nível	Data de Início	Data Fim	
Videoaula	Problemas envolvendo paridade	Nível 1	13/06/2016	19/06/2016	
Videoaula	Problemas com dominós	Nível 1	13/06/2016	19/06/2016	
Videoaula	Dominós, pesagens e outros problemas	Nível 1	13/06/2016	19/06/2016	
Videoaula	Princípio Fundamental da Contagem	Nível 1	20/06/2016	26/06/2016	
Videoaula	Aula 1 - Princípio	Nível	20/06/2016	26/06/2016	

matematica.obmep.org.br/index.php/user/calendario

Avisos!

The screenshot displays the 'Portal da Matemática' interface. A pop-up window titled 'Conteúdo do Módulo' is centered, showing details for the module 'Áreas de Figuras Planas'. The pop-up includes a 'Pré-requisitos' section with a warning icon and a list of prerequisites: 'Triângulo retângulo, lei dos senos e cossenos, polígonos regulares'. The 'Descrição' section features a document icon and text stating: 'Neste Módulo estudamos áreas de figuras planas, mais precisamente, apresentamos formas para o cálculo de áreas de diversos tipos de figuras planas.' A green button labeled 'Ver este módulo' is highlighted with a red box. A 'Fechar' button is located at the bottom right of the pop-up. The background shows a navigation menu on the left with options like 'Módulos', 'Busca', and 'Painel do Aluno'. A calendar is visible in the background, and a table of module activities is partially shown on the right.

Nível	Data de Início	Data Fim	Ver
Nível 3	13/06/2016	19/06/2016	Ver
Nível 3	13/06/2016	19/06/2016	Ver
Nível 3	13/06/2016	19/06/2016	Ver
Nível 3	13/06/2016	19/06/2016	Ver

Avisos!


 Módulos Busca Sobre o Portal da Matemática Escolas ▾ Equipe Conheça o Portal  MÁRCIO ▾



Módulo:
Áreas de Figuras Planas
Prof. Gustavo Adolfo

-  **Videoaula**
-  Exercícios Resolvidos
-  Caderno de Exercícios
-  Aplicativo
-  Teste
-  Material Teórico

[Informe um Erro](#)

Videoaula

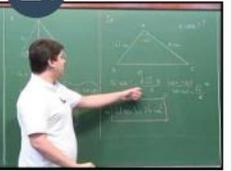
▶ Área de Figuras Planas: Resultados Básicos
▾



Área de Figuras Planas – Parte 1: Retângulos

Nesta aula daremos início ao estudo da área de figuras planas. Iniciaremos apresentando o conceito de área e na sequência mostraremos como calcular a área de quadrados e

Assistir Vídeo
Assistir Legendado
Baixar Vídeo



Área de Figuras Planas – Parte 2: Paralelogramos e Triângulos

Dando prosseguimento ao estudo de área de figuras planas, apresentaremos, nesta aula, formas de calcular a área de paralelogramos e triângulos. No caso do triângulo, veremos

Assistir Vídeo
Assistir Legendado
Baixar Vídeo

Outros Conteúdos da Aula

-  Videoaula 6
-  Exercícios Resolvidos 0
-  Caderno de Exercícios 1
-  Aplicativo 3
-  Material Teórico 0



Área de Figuras Planas – Parte 3: Losangos,



Área de Figuras Planas – Parte 4: Resolução de

Avisos!



Avisos!

🎮 Teste

🎮 Teste das Aulas

📌 Orientações

Participação

Você poderá participar do Teste quantas vezes quiser, sendo aprovado ou não, para praticar ou simplesmente melhorar seu desempenho. Ao abrir o Teste, você não pode fechar ou atualizar a página, caso isso aconteça, o sistema entenderá que o Teste foi encerrado.

Tempo

Não existe tempo para a resolução das questões, o contador que aparece tem a finalidade de orientar quanto ao tempo gasto.

Total de Perguntas

O Teste é composto de 6 perguntas em diferentes níveis de dificuldade.

Aprovação

Para ser aprovado, as 6 perguntas deverão ser respondidas em sequência sem erros, caso alguma resposta esteja errada, o sistema recomeça a contagem para o total de certas.

Avisos!

O Teste é composto de 6 perguntas em diferentes níveis de dificuldade.

Aprovação

Para ser aprovado, as 6 perguntas deverão ser respondidas em sequência sem erros, caso alguma resposta esteja errada, o sistema recomeça a partir do total de certas.

▶ Números Naturais e Problemas de Contagem



Você ainda não participou do Teste.

Leia as orientações e clique em

Iniciar Teste

 Iniciar o Teste!

▶ Divisibilidade e Teorema da Divisão Euclidiana



Você ainda não participou do Teste.

Leia as orientações e clique em

Iniciar Teste

 Iniciar o Teste!

Avisos!

Modulos Busca Sobre o Portal da Matematica Escolas Equipe Conecta o Portal

Teste - Aula Números Naturais e Problemas de Contagem

Pergunta

Quantos algarismos escrevemos ao numerarmos as páginas de um livro desde o número **33** até o número **91**?

Resposta

- 118
- 116
- 114
- 120
- 122

Enviar resposta

Progresso

Acertos 0

Erros 0

Tempo

Ver Tempo

Fechar

Avisos!



Programa de Iniciação Científica da OBMEP

Olá Márcio Willian!







 Portal

 Suporte

 Mensagens

 Minha turma

 Planejamento Acadêmico

 Fórum

 Desafios

< Mural de Avisos
○ ● ○
>

Calendário de Tarefas e Avaliações do PIC
Notícia publicada 13/07/2016 por Obmep (em Mural de Avisos)

Para informar os períodos de realização de tarefas e avaliações do PIC, de modo organizado e resumido, foi elaborado um Calendário que também contém respostas a algumas dúvidas sobre o assunto.

Dê uma passadinha nesta **SALA** e baixe o seu.



Prezados alunos do 11º PIC,

 Documentos

-  Tutorial avaliação alunos PIC virtual
-  Calendário de Tarefa e Avaliações 11 PIC
-  Manual do Aluno para medalhistas
-  Tutorial da Avaliação Presencial
-  Tutorial das Tarefas (para alunos)

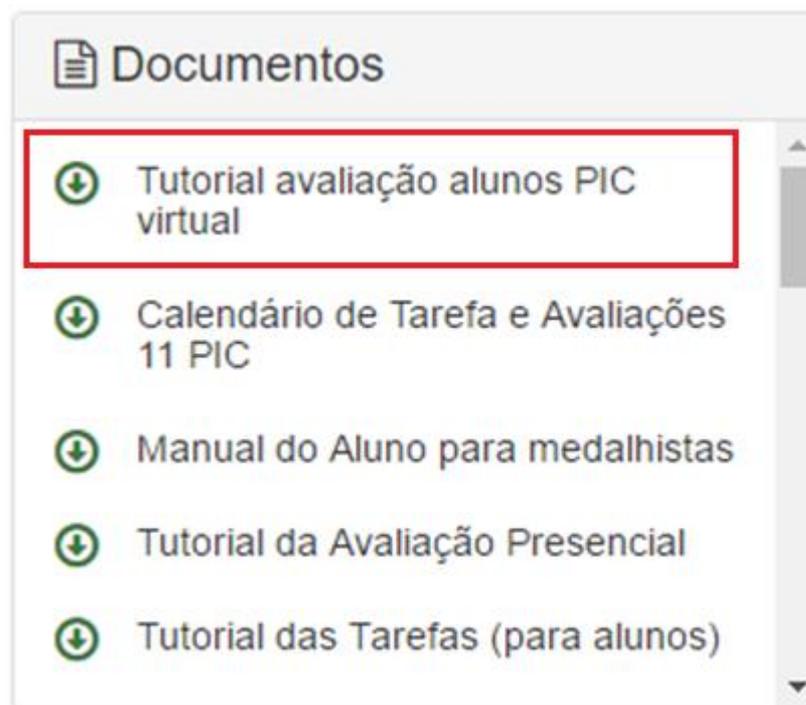
 Próximos Eventos

Julho de 2016 ◀ Hoje ▶

Do... Seg... Terça Qu... Qui... Sexta Sáb...

26	27	28	29	30	1	2
	●					
3	4	5	6	7	8	9

Avisos!



Avisos!

tutorial-avaliacoes-alunos.pdf 1 / 40

TUTORIAL DO ALUNO
Avaliações On-line

PIC Programa de Iniciação Científica da OBMEP

+

+

-

Avisos!

11º PIC Programa de Iniciação Científica da OBMEP Olá Abias Jacobsen!

Portal Gincana Tarefas **Avaliações On-line** Meu Boletim Mensagens 3 não lidas CRIC Dúvidas HH Fórum Desafios

Mural de Avisos

Nenhuma mensagem no mural

Prezados alunos do 11º PIC,

Veja o rol de premiações e premiados da 1ª gincana [clcando aqui](#).

Os prêmios serão enviados a partir do dia 02/05.

Prezado aluno do 11º PIC,

Teste seus conhecimentos e criatividade tentando resolver os exercícios das listas DESAFIO.

Estamos postando as segundas listas DESAFIO (N1, N2 e N3) e as soluções comentadas das Listas 1- DESAFIO. Veja as soluções das Listas 2 no dia 11

Documentos

- Calendário de Tarefa e Avaliações 11 PIC
- Manual do Aluno para medalhistas
- Tutorial das Tarefas (para alunos)
- Tutorial - Alunos - fórum Conheça o fórum Hotel de Hilbert
- Tutorial para os alunos virtuais

Próximos Eventos

Julho de 2016 Hoje

Do...	Se...	Terça	Qu...	Qui...	Sexta	Sáb...
26	27	28	29	30	1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23

TRACY 440.0 ms x

Aritmética dos restos, divisibilidade e critérios de divisibilidade

- ▶ Apostila 1: ENCONTROS DE ARITMÉTICA, de F. Dutenhefner e L. Cadar.

Seções 2.2, 2.3, 2.4 e 2.6:

Fenômenos periódicos;

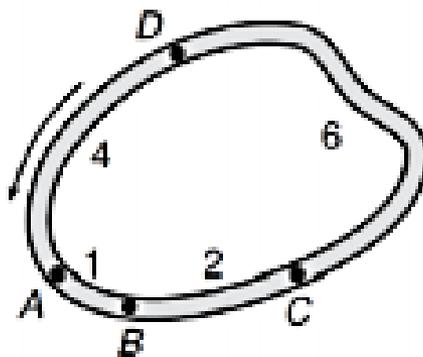
Aritmética dos restos;

Múltiplos e divisores;

Critérios de divisibilidade.

Fenômenos periódicos

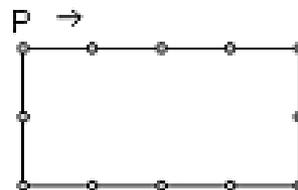
- ▶ O resto de uma divisão pode ser utilizado na resolução de problemas que envolvem fenômenos periódicos.



Fenômenos periódicos

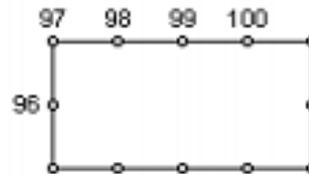
► Exemplo 1:

Pedro caminha ao redor de uma praça retangular onde estão dispostas 12 árvores, brincando de tocar cada árvore durante seu passeio. Se no início ele toca a árvore indicada na figura, e se ele anda no sentido da seta, indique que árvore ele estará tocando ao encostar em uma árvore pela centésima vez.



Fenômenos periódicos

Solução. Na figura, próximo de cada árvore escreva os números 1, 2, 3, ..., correspondentes aos números de árvores tocadas por Pedro (a árvore indicada pela letra P recebe o número 1, a próxima o número 2, e assim por diante). Como existem 12 árvores na praça, na árvore indicada pela letra P estarão escritos os número 1, 13, 25, ... que são todos os números que deixam resto 1 quando divididos por 12. Dividindo 100 por 12, obtemos quociente 8 e resto 4, isto é, $100 = 8 \times 12 + 4$. Daí vemos que na centésima vez, Pedro estará tocando a árvore que está 3 posições à frente daquela indicada pela letra P.



Fenômenos periódicos

- ▶ Exemplo 2: Qual é o algarismo da unidade de 2^{2015} e 2^{2016} ?

Fenômenos periódicos

- Exemplo 2: Qual é o algarismo da unidade de 2^{2015} e 2^{2016} ?

Solução. Calculando as primeiras potências de 2 obtemos:

$$2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32, 2^6 = 64,$$

$$2^7 = 128, 2^8 = 256, 2^9 = 512$$

Observando esses números, vemos que os últimos algarismos formam uma sequência periódica: 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2 etc., em que os quatro números 2, 4, 8, 6 ficam se repetindo infinitamente.

$$2015 = 503 \times 4 + 3$$

$$2016 = 503 \times 4 + 4$$

Aritmética dos restos

- ▶ No 1 do Ciclo 1, estudamos o Algoritmo da Divisão Euclidiana. Na divisão de dois números naturais **a** por **b** existe um quociente **q** e um resto **r** tal que **a = bq + r** sendo que obrigatoriamente **0 ≤ r ≤ b-1**.
- ▶ Por exemplo, na igualdade **1649 = 7 × 235 + 4** identificamos imediatamente o número **4** como o resto da divisão de **1649** por **7**. Por outro lado, na igualdade **415 = 7 × 58 + 9**, o número **9** não é o resto da divisão de **58** por **7**, pois na divisão por **7** o resto deve ser um número natural menor que **7**. Observe que a igualdade **415 = 7 × 58 + 9** significa que se temos **415** unidades, estas podem ser organizadas em **58** grupos de **7** unidades cada e em um grupo de **9** unidades.

Aritmética dos restos

- ▶ Nesta seção veremos como calcular o resto da divisão de uma soma, uma diferença ou um produto de dois números, sem ter que efetuar as operações com os números dados.

- ▶ **Exemplo 1:**

Nas divisões de 163 e 360 por 7 obtemos, respectivamente, restos 2 e 3. Qual é o resto da divisão de $163 + 360$ por 7?

Aritmética dos restos

- ▶ Nesta seção veremos como calcular o resto da divisão de uma soma, uma diferença ou um produto de dois números, sem ter que efetuar as operações com os números dados.

- ▶ **Exemplo 1:**

Nas divisões de 163 e 360 por 7 obtemos, respectivamente, restos 2 e 3. Qual é o resto da divisão de $163 + 360$ por 7?

$$163 = 7 \times 23 + 2 \text{ e } 360 = 7 \times 51 + 3$$

$$163 + 360 = (7 \times 23 + 2) + (7 \times 51 + 3) = 7(23 + 51) + (2 + 3) = 7 \times 74 + 5$$

Aritmética dos restos

► **Exemplo 2:**

Nas divisões de 106 e 197 por 6 obtemos, respectivamente, restos 4 e 5. Qual é o resto da divisão de $106 + 197$ por 6?

Aritmética dos restos

► **Exemplo 2:**

Nas divisões de 106 e 197 por 6 obtemos, respectivamente, restos 4 e 5. Qual é o resto da divisão de $106 + 197$ por 6?

$$106 = 6 \times 17 + 4 \text{ e } 197 = 6 \times 32 + 5$$

$$\begin{aligned} 106 + 197 &= (6 \times 17 + 4) + (6 \times 32 + 5) = 6(17 + 32) + (4 + 5) = \\ &= 6 \times 49 + 9 = 6 \times 49 + (6 + 3) = 6 \times 50 + 3 \end{aligned}$$

Aritmética dos restos

- ▶ Para calcular o resto da divisão de uma soma por um divisor, basta somar os restos das divisões de cada uma das parcelas pelo mesmo divisor. Se a soma dos restos passa do divisor, calcule o resto da divisão pelo divisor dessa soma de restos.
- ▶ Para calcular o resto da divisão do resultado de uma multiplicação por um divisor, basta multiplicar os restos das divisões de cada uma das parcelas pelo mesmo divisor. Se o produto dos restos passa do divisor, calcule o resto da divisão pelo divisor desse produto de restos.

Múltiplos e Divisores

Multiplicando o número 3 por qualquer número natural obtém-se os múltiplos positivos de 3. Assim, os múltiplos positivos de 3 são: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21,

Todos estes números formam o **conjunto dos múltiplos positivos de 3**, que pode ser representado do seguinte modo:

► $M(3) = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \dots\}$.

Generalizando, considerando somente números positivos, dado um número natural a , o **conjunto dos múltiplos de a** é o conjunto:

► $M(a) = \{a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a, 7a, 8a, \dots\}$.

Múltiplos e Divisores

Se **a** e **b** são números naturais, então:

- ▶ **b** é múltiplo de **a** se existe um **n** tal que **b = na**;
- ▶ **b** é múltiplo de **a** quando o resto da divisão de **b** por **a** é **0**;

Se **m** e **n** são números naturais, então:

- ▶ O produto **p = mn** é múltiplo de **m** e de **n**;
- ▶ **m** e **n** são fatores (e divisores) de **p**;

Múltiplos e Divisores

Evidentemente, dado um número natural a , se d é um divisor positivo de a então $1 \leq d \leq a$. Assim, todo número natural possui uma quantidade finita de divisores positivos, enquanto possui uma quantidade infinita de múltiplos.

- ▶ $D(7) = \{1, 7\}$
- ▶ $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
- ▶ $D(72) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$

Múltiplos e Divisores

Considerando somente números inteiros positivos, um número da forma $\mathbf{a \times q + r}$ é um múltiplo de \mathbf{a} somente quando \mathbf{r} é um múltiplo de \mathbf{a} .

Múltiplos e Divisores

► Exemplo 1:

(Banco de Questões 2006, nível 1, lista 4, problema 1)

Da igualdade $9174532 \times 13 = 119268916$ pode-se concluir que um dos números abaixo é divisível por 13. Qual é este número?

- (a) 119268903 (b) 119268907 (c) 119268911
(d) 119268913 (e) 119268923.

Múltiplos e Divisores

► Exemplo 1:

Solução. Como 119268916 é divisível por 13, podemos concluir que os números divisíveis por 13 são aqueles obtidos somando-se ou subtraindo-se múltiplos de 13 ao número 119268916. Dentre os números apresentados, o número $119268916 - 13 = 119268903$ é o único divisível por 13.

Critérios de divisibilidade

- ▶ Vamos estudar os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 9 e 10. Antes disso, devemos observar que em muitos casos o uso de um critério de divisibilidade só faz sentido para números “grandes”. Para números “pequenos”, o problema de decidir se um dado número é divisível ou não por outro pode ser resolvido através do uso da tabuada ou de uma simples divisão. Além disso, como “ser divisível por” e “ser múltiplo de” significam exatamente a mesma coisa, é importante ter em mente que um critério de divisibilidade também é um critério de multiplicidade.

Critérios de divisibilidade por 3

Um número é divisível por 3 se a soma dos seus algarismos é divisível por 3.

Para entender este critério de divisibilidade, primeiramente precisamos observar que todas as potências de 10 deixam resto 1 quando divididas por 3:

$$10 = 3 \cdot 3 + 1.$$

$$100 = 3 \cdot 33 + 1.$$

$$1000 = 3 \cdot 333 + 1.$$

Critérios de divisibilidade por 3

Desta observação, vamos verificar, sem efetuar a divisão, se o número 457 é ou não é divisível por 3. O número 457 pode ser escrito como $457 = 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7$ ou ainda, $457 = 4(3 \cdot 33 + 1) + 5(3 \cdot 3 + 1) + 7$. Colocando o fator 3 em evidência, vemos que $457 = 3(4 \cdot 33 + 5 \cdot 3) + (4 + 5 + 7)$. Como o número $3(4 \cdot 33 + 5 \cdot 3)$ é divisível por 3, precisamos somente verificar se $4 + 5 + 7 = 16$ é divisível por 3. Como este número não é divisível por 3, concluímos que 457 também não é divisível por 3. Mais ainda, como 16 deixa resto 1 quando dividido por 3, podemos até concluir que 457 também deixa resto 1 quando dividido por 3.

Critérios de divisibilidade por 9

Um número é divisível por 9 se a soma dos seus algarismos é divisível por 9.

Como no caso da divisibilidade por 3, primeiramente observe que todas as potências de 10 deixam resto 1 quando divididas por 9:

$$10 = 9 \cdot 1 + 1.$$

$$100 = 9 \cdot 11 + 1.$$

$$1000 = 9 \cdot 111 + 1.$$

Critérios de divisibilidade por 9

Vejam, sem efetuar a divisão, se o número 2345 é ou não é divisível por 9. Podemos escrever $2345 = 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5$, ou ainda, $2345 = 2(9 \cdot 111 + 1) + 3(9 \cdot 11 + 1) + 4(9 + 1) + 5$. Colocando o fator 9 em evidência, $2345 = 9(2 \cdot 111 + 3 \cdot 11 + 4) + (2 + 3 + 4 + 5)$. Como o número $9(2 \cdot 111 + 3 \cdot 11 + 4)$ é divisível por 9, precisamos somente verificar se o número $2 + 3 + 4 + 5 = 14$ é divisível por 9. Como este número não é divisível por 9, podemos concluir que 2345 também não é divisível por 9. Mais ainda, como 14 deixa resto 5 quando dividido por 9, concluímos que 2345 também deixa resto 5 quando dividido por 9.

Critérios de divisibilidade por 4

[critério de divisibilidade por 4] Um número natural é divisível por 4 quando o número formado pelos seus dois últimos algarismos é divisível por 4. Vamos explorar este critério escrevendo, por exemplo, o número 23562 do seguinte modo: $23562 = 235 \cdot 100 + 62$. E como $100 = 4 \cdot 25$, $23562 = 235 \cdot 4 \cdot 25 + 62 = 4(235 \cdot 25) + 62$. Como $4(235 \cdot 25)$ é divisível por 4, é suficiente analisar o número 62. Como $62 = 4 \cdot 15 + 2$ vemos que 62 e, portanto, $23562 = 4(235 \cdot 25) + 62$ não são divisíveis por 4. Além disso, estes números deixam resto 2 quando divididos por 4.

Critérios de divisibilidade por 2, 6, 5 e 10

Agora vamos relembrar os critérios mais fáceis. Um número é divisível por 2 quando é par e um número é divisível por 6 quando é divisível, ao mesmo tempo, por 2 e por 3. Um número é divisível por 5 quando termina em 0 ou em 5, e um número é divisível por 10 quando termina em zero. Utilize os critérios de divisibilidade para resolver os seguintes problemas.

Exercício 1

Diferença de potências – Seja $n = 9867$. Se você calculasse $n^3 - n^2$, qual seria o algarismo das unidades encontrado?

- (a) 0 (b) 2 (c) 4 (d) 6 (e) 8

Exercício 1 - Solução

Diferença de potências – A opção correta é (c).

Solução 1: O algarismo final de 9867^3 é o mesmo que o de $7^3 = 343$, isto é, 3. O algarismo final de 9867^2 é o mesmo que o de $7^2 = 49$, isto é, 9. Se de um número terminado em 3 subtraímos outro terminado em 9, o algarismo final do resultado é 4.

Observação: Observe que o algarismo das unidades da diferença $9867^3 - 9867^2$ é igual ao algarismo das unidades de $(7^3 - 7^2)$.

Solução 2: $n^3 - n^2 = n^2(n - 1)$, com $n^2 = 9867^2$ terminando em 9 e $n - 1 = 9866$ em 6. Como $9 \times 6 = 54$, o algarismo final de $n^2(n - 1)$ é 4.

Exercício 2

Contando os zeros - Quantos zeros existem no final do número $9^{2007} + 1$?

Exercício 2 - Solução

Contando os zeros - A tabela ao lado mostra como aparecem em ordem, dezena e unidade, os dois últimos algarismos de algumas potências de 9. Observe que esses dois últimos algarismos de 9^0 e 9^{10} são os mesmos; logo a partir 9^{10} a segunda coluna da tabela começará a se repetir, formando uma seqüência periódica, de período 10. Como $2007 = 10 \times 200 + 7$ e os dois últimos algarismos de $9^{10 \times 200}$ são 01, segue que os dois últimos algarismos de 9^{2007} são os dois últimos algarismos de 9^7 , ou seja 69. Daí os dois últimos algarismos de $9^{2007} + 1$ são iguais a $69 + 1 = 70$. Portanto, existe um único zero no final do número $9^{2007} + 1$.

n	dois últimos algarismos de 9^n
0	01
1	09
2	81
3	29
4	61
5	49
6	41
7	69
8	21
9	89
10	01

Exercício 3

Quais são os restos das divisões de 1991^3 e $1989 \cdot 1990 \cdot 1991 + 1992^2$ por 7?

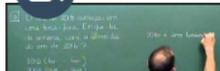
Exercício 3 - Solução

<http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=63>



Módulo:
Aritmética dos Restos
Prof. Fábio Henrique

- [Videaula](#)
- [Exercícios Resolvidos](#)
- [Caderno de Exercícios](#)
- [Aplicativo](#)
- [Teste](#)
- [Material Teórico](#)
- [Informe um Erro](#)

<p style="text-align: center; background-color: #f1c40f; padding: 2px;">Assistir Legendado</p> <p style="text-align: center; background-color: #27ae60; color: white; padding: 2px;">Baixar Vídeo</p>	
<div style="display: flex; align-items: center;">   </div> <p style="text-align: center;">Primos Gêmeos. Espaçamento entre primos</p> <p>Dois números primos são chamados de primos gêmeos quando a diferença entre eles é de 2 unidades. Por exemplo, os pares: 3 e 5, 5 e 7, 11 e 13. Nesta aula discute-se as seguintes perguntas:</p> <p style="text-align: center; background-color: #2980b9; color: white; padding: 2px; border: 2px solid red;">Assistir Vídeo</p> <p style="text-align: center; background-color: #f1c40f; padding: 2px;">Assistir Legendado</p> <p style="text-align: center; background-color: #27ae60; color: white; padding: 2px;">Baixar Vídeo</p>	<div style="display: flex; align-items: center;">   </div> <p style="text-align: center;">Propriedades Aritméticas dos Restos</p> <p>Nesta aula discutimos Propriedades Aritméticas dos Restos. Aqui estão os fundamentos da Aritmética Modular, a ser aprofundada mais adiante.</p> <p style="text-align: center; background-color: #2980b9; color: white; padding: 2px; border: 2px solid red;">Assistir Vídeo</p> <p style="text-align: center; background-color: #f1c40f; padding: 2px;">Assistir Legendado</p> <p style="text-align: center; background-color: #27ae60; color: white; padding: 2px;">Baixar Vídeo</p>
<div style="display: flex; align-items: center;">   </div> <p style="text-align: center;">Múltiplo só com algarismos 0 e 1</p>	<div style="display: flex; align-items: center;">   </div> <p style="text-align: center;">Problemas com calendários</p>

Exercício 4

(OBMEP 2011 - N2Q3 - 2ª fase) O *múltiplo irado* de um número natural é o menor múltiplo do número formado apenas pelos algarismos 0 e 1. Por exemplo, o múltiplo irado de 2, bem como de 5, é 10; já o múltiplo irado de 3 é 111 e o de 110 é ele mesmo.

- (a) Qual é o múltiplo irado de 20?
- (b) Qual é o múltiplo irado de 9?
- (c) Qual é o múltiplo irado de 45?
- (d) Qual é o menor número natural cujo múltiplo irado é 1110?

Exercício 4 - Solução

a) Os primeiros múltiplos naturais de 20 são 20, 40, 60, 80 e 100. Logo o múltiplo irado de 20 é 100.

b) Se os algarismos de um número divisível por 9 são apenas 0 e 1, nesse número devem aparecer pelo menos nove algarismos 1. Para que esse múltiplo seja o menor possível, ele deve ter o menor número de algarismos possível; logo o múltiplo irado de 9 é 111111111.

c) Um múltiplo de 45 é múltiplo de 5 e 9; logo seu algarismo das unidades é 0 ou 5 e a soma de seus algarismos é divisível por 9. Como múltiplos irados são formados apenas pelos algarismos 0 e 1, segue que o múltiplo irado de 45 deve ter 0 como algarismo das unidades; logo esse múltiplo é 111111110.

d) O número 1110 é o menor número que tem apenas os algarismos 0 e 1 que é, ao mesmo tempo,

- múltiplo de 3, pois a soma de seus algarismos é 3;
- múltiplo de 2, pois seu último algarismo é 0.

Logo 1110 é o múltiplo irado de 6. Como os múltiplos irados de 1, 2, 3, 4 e 5 são, respectivamente, 1, 10, 111, 100 e 10, segue que o menor número cujo múltiplo irado é 1110 é 6.

Exercício 5

(Fomin, capítulo 3, problema 30) Encontre o último algarismo do número 777^{777} .

Exercício 5 - solução

Solução. Para começar, note que o último algarismo do número 777^{777} é igual ao último algarismo do número 7^{777} . Procedendo como explicado no exercício anterior, podemos calcular o último algarismo das primeiras potências de 7.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
último algarismo de 7^n	7	9	3	1	7	9	3	1	7

Daí vemos que o ciclo 7, 9, 3, 1 se repete infinitamente. Dividindo 777 por 4 (que é o tamanho do ciclo), obtemos quociente 194 e resto 1. Daí o último algarismo de 7^{777} é igual ao último algarismo de 7^1 , que é 7.

Exercício 6

Se o resto da divisão de a por 7 é igual a 3, então qual é o resto da divisão de $5a$ por 7?

Se a deixa resto 6 quando dividido por 8 e se b deixa resto 5 quando dividido por 8, qual é o resto da divisão de $a + b$ e de $a - b$ por 8?

Exercício 6 - solução

1. Podemos escrever $a = 7q + 3$. Daí $5a = 5(7q + 3) = 7 \times (5q) + 15$.
Dividindo 15 por 7 obtemos resto 1. Daí $5a$ é a soma de um múltiplo de 7 com 1 e, portanto, o resto da divisão de $5a$ por 7 é igual a 1.
2. Podemos escrever $a = 8n + 6$ e $b = 8m + 5$. Daí $a + b = (8n + 6) + (8m + 5) = (8n + 8m) + 11$ e $a - b = (8n + 6) - (8m + 5) = (8n - 8m) + 1$. Como 11 deixa resto 3 quando dividido por 8, vemos que $a + b$ deixa resto 3 quando dividido por 8. De $a - b = (8n - 8m) + 1$, segue que $a - b$ deixa resto 1 quando dividido por 8.

Boas férias!

Próximo encontro: 06/08