

**Programa de Formação dos Professores Habilitados e dos Alunos de Licenciatura  
OBMEP na Escola e PIC 2016  
Grupo N2 - Ciclo 4**

**1ª semana: quarto encontro de formação entre professores, alunos de licenciatura e coordenador**

- Assuntos a serem abordados:

**Aritmética 4:** Algoritmo da divisão e análise dos restos

**Contagem 4:** Aplicações do princípio multiplicativo – combinações.

**Geometria 4:** Critérios de congruência de triângulos

- Material a ser estudado pelo professor:

Os textos e videoaulas sugeridos a seguir devem ser abordados pelo Coordenador e seus Colaboradores (professores ou alunos de graduação). Esses materiais são balizadores para a preparação das aulas e elaboração de discussões técnicas envolvendo os professores habilitados ou alunos de graduação, quando de suas atuações frente aos seus alunos.

**Aritmética 4:**

**- Textos:**

1. Seções 2.1, 2.3, 2.4 e 2.5 da Apostila do PIC da OBMEP “Encontros de Aritmética”, L. Cadar. e F. Dutenhefner. (<http://www.obmep.org.br/docs/aritmetica.pdf>)
2. Seções 3.4, 3.5 e 3.6 da Apostila 1 da OBMEP, “Iniciação à Aritmética”, A. Hefez. (<http://www.obmep.org.br/docs/apostila1.pdf>)
3. [Banco de Questões da OBMEP](#), números diversos.
4. Seção 2, capítulo 3, do livro Círculos Matemáticos – A Experiência Russa – D. Fomin, S. Genkin e I. Itenberg.
5. Um Círculo Matemático de Moscou – Sergey Dorichenko.
6. [Provas da OBMEP](#).

## **- Vídeos**

1. Para acessar os vídeos relacionados com o Algoritmo da Divisão, acesse o módulo [Números Naturais: Contagem, Divisibilidade e Teorema da Divisão Euclidiana](#), no Portal da Matemática, assista aos vídeos:

- Divisibilidade de Números Inteiros;
- Divisibilidade: Resolução de Exercícios – Parte 1
- Teorema da Divisão Euclidiana;
- Divisibilidade: Resolução de Exercícios – Parte 2 ;
- Divisibilidade: Resolução de Exercícios – Parte 3;
- Divisibilidade: Resolução de Exercícios – Parte 4;
- Divisibilidade: Resolução de Exercícios – Parte 5.

2. Para acessar os vídeos relacionados com o Algoritmo da Divisão, acesse o módulo [Aritmética dos Restos](#), no Portal da Matemática, assista aos vídeos:

- Algoritmo da Divisão Euclidiana;
- Propriedades Aritméticas dos Restos;
- Múltiplo só com algarismos 0 e 1;
- Alguns problemas com resto e divisibilidade;
- Qual é o resto da divisão de  $2^{56}$  por 7? E por 11?;

## **Contagem 4:**

### **-Textos:**

1. Capítulo 1 e 4, Apostila 2 do PIC da OBMEP, “Métodos de Contagem e Probabilidade”, Paulo Cezar Pinto Carvalho (direcionando o estudo para combinações simples). <http://www.obmep.org.br/docs/apostila2.pdf>

2. Material Teórico do Portal da Matemática “Combinação”, 2º Ano – Módulo de Princípios Básicos de Contagem.

[http://matematica.obmep.org.br/uploads/material\\_teorico/8erjl43irugwk.pdf](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/8erjl43irugwk.pdf)

3. [Banco de Questões da OBMEP](#), números diversos.

4. Seção 1, capítulo 11 do livro Círculos Matemáticos – A Experiência Russa – D. Fomin, S. Genkin e I. Itenberg.

5. Um Círculo Matemático de Moscou – Sergey [Dorichenko](#).

6. [Provas da OBMEP](#).

## **-Vídeos:**

1. Portal da Matemática: Módulo de Métodos de Contagem e Probabilidade – PIC. Dentro deste módulo, na seção ‘Combinação’, assistir os seguintes vídeos:
  - Combinação;
  - Exercícios sobre Combinação – Parte 1;
  - Exercícios sobre Combinação – Parte 2;
  - Exercícios sobre Combinação – Parte 3;
  - Exercícios sobre Combinação – Parte 4;
  - Exercícios sobre Combinação – Parte 5.

## **Geometria 4:**

### **- Textos:**

1. Material Teórico do Portal da Matemática “Congruência de triângulos”, Elementos Básicos de Geometria Plana.

<http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=17#v130>

2. Material teórico presente no Canal do PIC youtube direcionado a “Congruência de triângulos”

<https://www.youtube.com/watch?v=OSmeJioImK0>

<https://www.youtube.com/watch?v=5cQKA258xD4>

3. “*Congruências de Triângulos e Aplicações: Caderno de Exercícios*”, no Portal da Matemática: 8º Ano do Ensino Fundamental – Módulo: Elementos Básicos de Geometria Plana – Parte 1. Acesse o portal e faça o download ou utilize este [link](#).

4. [Banco de Questões da OBMEP](#), números diversos.

5. Um Círculo Matemático de Moscou – Sergey Dorichenko.

6. [Provas da OBMEP](#).

### **- Vídeos:**

1. [Portal da Matemática: 8º Ano do Ensino Fundamental – Elementos Básicos de Geometria Plana – Parte 1: Congruência de triângulos e aplicações](#)

- (I) Congruência de triângulos
- (II) Caso de congruência LLL
- (III) Casos de congruência LAL e ALA

## 2ª semana: encontro entre professores e alunos

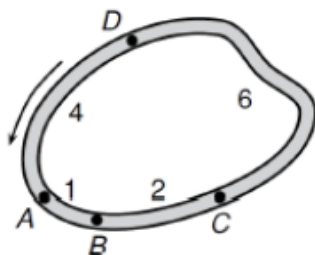
Assunto a ser abordado: **Aritmética 4** – Algoritmo da divisão e análise de restos.

Estudos a serem desenvolvidos com os alunos: antes da realização do encontro, é importante que o professor tenha lido os materiais impressos, englobando aspectos teóricos e exercícios, bem como tenha assistido a todos os vídeos anteriormente indicados. Incentive os seus alunos a fazerem o mesmo. Inicialmente o professor deverá apresentar aos seus alunos, via a metodologia da resolução de problemas, os conteúdos presentes nas seções 2.1, 2.3, 2.4 e 2.5 da Apostila do PIC da OBMEP “Encontros de Aritmética”, L. Cadar. e F. Dutenhefner. Em um segundo momento, numa abordagem mais formal, as seções 3.4, 3.5 e 3.6 da Apostila 1 da OBMEP, “Iniciação à Aritmética”, A. Hefez, poderá ser utilizada.

Exercícios a serem discutidos com os alunos: deverá ser abordado de 6 a 8 problemas durante o encontro presencial. Esse número poderá ser ampliado caso o professor considere viável. Esses problemas devem estar relacionados com o algoritmo da divisão e eventuais análises de restos presentes nas divisões efetuadas. É importante que os estudos presenciais estejam em conformidade com os textos ou vídeos-aulas de Aritmética acima descritos. Para auxiliar o trabalho, iremos indicar quatro problemas a serem discutidos e convidamos o professor a selecionar o restante:

**(I) Exercício 4, página 29, da apostila da Apostila do PIC da OBMEP “Encontros de Aritmética”, F. Dutenhefner e L. Cadar.**

A figura abaixo representa o traçado de uma pista de corrida.



Os postos A, B, C e D são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha. Por exemplo, uma corrida de 17 quilômetros pode ser realizada com partida em D e chegada em A.

- Quais são os postos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?
- E para uma corrida de 100 quilômetros, quais são estes postos?
- Mostre que é possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.

**Solução:** A resposta encontra-se na página 30 da Apostila do PIC da OBMEP “Encontros de Aritmética”, F. Dutenhefner e L. Cadar.

**(II) Problema 3.33 que encontra-se na página 62 da Apostila 1 da OBMEP, “Iniciação à Aritmética”, A. Hefez.**

Determine o resto da divisão por 3 do número  $4^{100}+32^{30}$ .

**Solução:** Para obter a solução deste problema é importante que o professor explore as tabelas que regem os restos da divisão por 3 das somas e produtos dos números naturais (ver página 62, da apostila “Iniciação à Aritmética”, A. Hefez). Na sequência, aplique a solução que encontra-se na página 121, da apostila “Iniciação à Aritmética”, A. Hefez.

**(IV) Problema proposto no vídeo “Algoritmo da Divisão Euclidiana”, que encontra-se no [Portal da Matemática](#).**

Formalize matematicamente o Algoritmo da Divisão Euclidiana.

**Solução:** Para obter a solução deste problema, assista na íntegra o vídeo Algoritmo da Divisão Euclidiana, que encontra-se no [Portal da Matemática](#)

### 3ª Semana: encontro entre professores e alunos.

Assunto a ser abordado: **Contagem 4** - Aplicações do princípio multiplicativo – combinações.

Estudos a serem desenvolvidos com os alunos: antes da realização do encontro, é importante que o professor tenha lido os materiais impressos, englobando aspectos teóricos e exercícios, bem como tenha assistido a todos os vídeos anteriormente indicados. Incentive os seus alunos a fazerem o mesmo. Vale ressaltar que a Apostila “Métodos de Contagem e Probabilidade” já foi utilizada nos ciclos anteriores e nela foram apresentados os aspectos teóricos associados aos princípios de contagem. Destacamos que o nosso foco de interesse é direcionar o aluno para o estudo de combinações simples (sem repetições de elementos) sem o uso de fórmulas. Desejamos que os exercícios sejam abordados como uma consequência direta do uso do princípio multiplicativo, mostrando claramente que se trata de um caso particular desse princípio, essa ideia já foi utilizada no passado quando tratamos de permutações. Observe que o material presente no Portal da Matemática (ver referência 2) é uma fonte interessante para uma consulta complementar sobre o assunto, salientamos que em <http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/8bn2l4ghpggcw.pdf> vários exercícios

podem ser encontrados e utilizados pelo professor. Destacamos também o texto “Círculos Matemáticos – Experiência Russa”, capítulo 11 (parcialmente), em que são encontrados vários exercícios e deduções úteis envolvendo números binomiais.

Exercícios a serem discutidos com os alunos: deverá ser abordado de 6 a 8 problemas durante o encontro presencial. Esse número poderá ser ampliado caso o professor considere viável. Esses problemas devem estar relacionados com o princípio multiplicativo direcionado ao caso particular dos agrupamentos usualmente chamados de combinações simples. Reiteramos a importante que os estudos presenciais estejam em conformidade com os textos ou vídeos-aulas associadas ao assunto em foco. Para auxiliar o trabalho, iremos indicar cinco problemas a serem discutidos e convidamos o professor a selecionar o restante:

(I) **Exemplo final**, presente na vídeoaula do **Portal da Matemática**, intitulada ‘Problemas de Contagem – Parte 1’, enfatizando que se  $q+p=n$ , então  $C_{n,p}=C_{n,q}$ .

(II) **Exercício 5**, página 36 da apostila ‘**Métodos de Contagem e Probabilidade**’, indicado na referência 1 dos textos. A resposta/solução encontra-se na página 65 da apostila.

(III) **Segundo exemplo (último)**, presente na vídeoaula do **Portal da Matemática** intitulada ‘Problemas de contagem – parte 5’.

(IV) **Problema 5.2, página 11, no livro “Um Círculo Matemático de Moscou”, S. Dorichenko.** A resposta encontra-se na página 85 do referido livro.

(V) **Problema 9, página 119, no livro “Círculos Matemáticos - A Experiência Russa”, D. Fomin e outros, capítulo 11.** A solução se encontra na página 270 do referido livro.

#### **4ª Semana: encontro entre professores e alunos**

Assuntos a serem abordados: **Geometria 4** – Critérios de congruência de triângulos.

Textos a serem estudados com os alunos: antes da realização do encontro, é importante que o professor tenha lido os materiais impressos, englobando aspectos teóricos e

exercícios, bem como tenha assistido a todos os vídeos anteriormente indicados. Incentive os seus alunos a fazerem o mesmo. As referências (1) e (2), apresentadas na parte de textos de geometria, exploram critérios de congruência e são interessantes materiais de fácil acesso aos alunos, por favor, informe os mesmos sobre a existência desses materiais. Observe que estamos evitando a citação de textos de geometria que não estejam ao alcance dos alunos. Fique atento para apresentar argumentações geométricas que destaquem as validades dos critérios de congruência, justificando claramente os mesmos. Observe que alguns exercícios que foram tratados nos ciclos passados poderiam ser refeitos, até com maior grau de simplicidade nas resoluções, quando utilizamos os conceitos de congruência.

Exercícios a serem discutidos com os alunos: seguindo a mesma dinâmica anterior, espera-se que o professor proponha e discuta de 6 a 8 exercícios com os seus alunos. Tais problemas devem estar relacionados com o tema em foco. A seguir apresentaremos várias sugestões de exercícios que podem ser abordados pelo professor em sua atividade presencial:

**(I) relativamente ao livro “Um Círculo Matemático de Moscou”, S. Dorichenko,** segue uma questão.

- **problema 8.9** – enunciado na página 18, com solução presente na página 97;

**(II) relativamente a referência (3),** Portal da Matemática: 8º Ano do Ensino Fundamental – Módulo Elementos Básicos de Geometria Plana - Parte 2, *Congruência de Triângulos e Aplicações* ([link](#)), seguem seis questões:

- **problemas 1, 2, 5, 8, 9 e 14.**

**(III) relativamente à referência (5),** [Banco de Questões da OBMEP](#), seguem duas questões:

- **exercício 24 (OBMEP-Banco de Questões 2016)** – enunciado na página 19, com solução presente na página 84;

- **exercício 27 (OBMEP-Banco de Questões 2015)** – enunciado na página 56, com solução presente na página 157.

**(IV) relativamente à referência (1),** Seção 2.3 da Apostila 3 do PIC da OBMEP, <http://www.obmep.org.br/docs/apostila3.pdf> seguem duas questões:

- **exercício 2** – enunciado na página 46, com solução presente na página 66;

- **exercício 5** – enunciado na página 47, com solução presente na página 68.