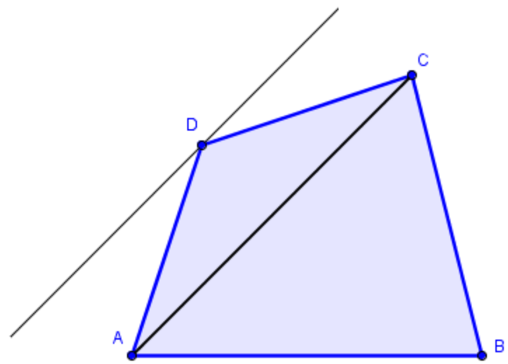
Aula 3 – 2º Encontro

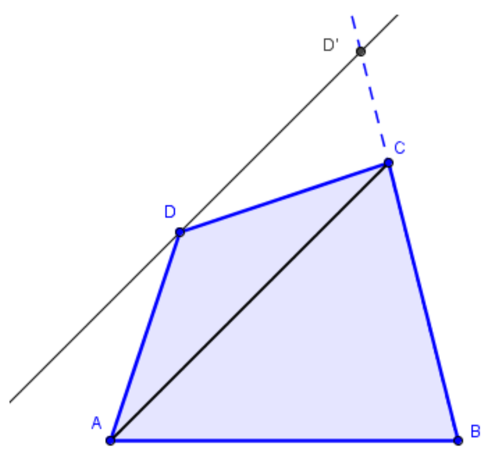
Propriedades de áreas de triângulos

20/08/2016

1) Primeiramente vamos traçar a diagonal $\boldsymbol{AC}$ e em seguida uma paralela a essa diagonal passando por $\boldsymbol{D}$.



Prolongando o segmento $\boldsymbol{BC}$ até que encontre a paralela num ponto $\boldsymbol{D'}$

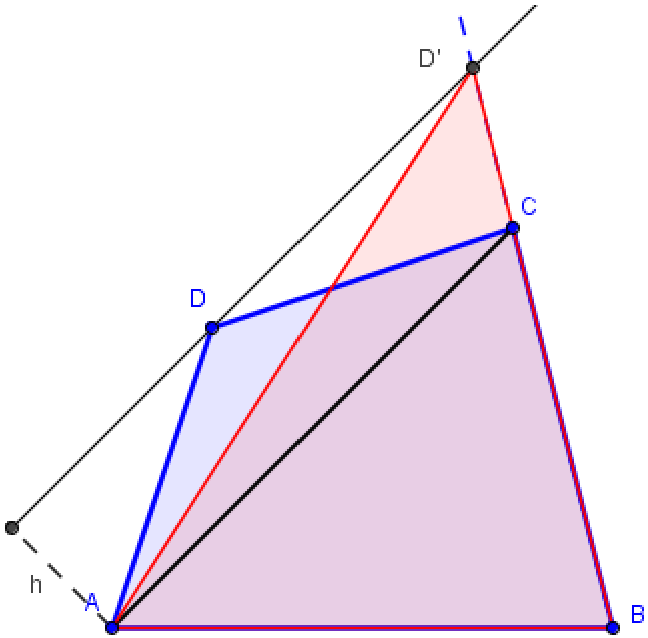


O triângulo $D'AB$ possui a mesma área que o quadrilátero $ABCD$, pois:

$$[\boldsymbol{ABCD}] = [\boldsymbol{ABC}] + [\boldsymbol{ACD}]$$

e

$$[\boldsymbol{D'AB}] = [\boldsymbol{ABC}] + [\boldsymbol{ACD'}]$$



Observe que $[\boldsymbol{ACD}]$ e $[\boldsymbol{ACD'}]$

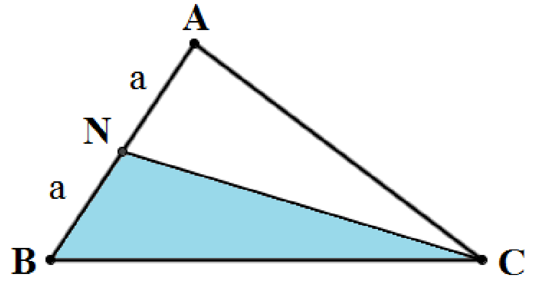
Possuem mesma área, pois ambos

Tem a mesma base $\boldsymbol{AC}$ e mesma

altura **h.**

2)

a) Como N é ponto médio os segmentos $AN\ e\ BN$ são iguais, chamemos **a.**

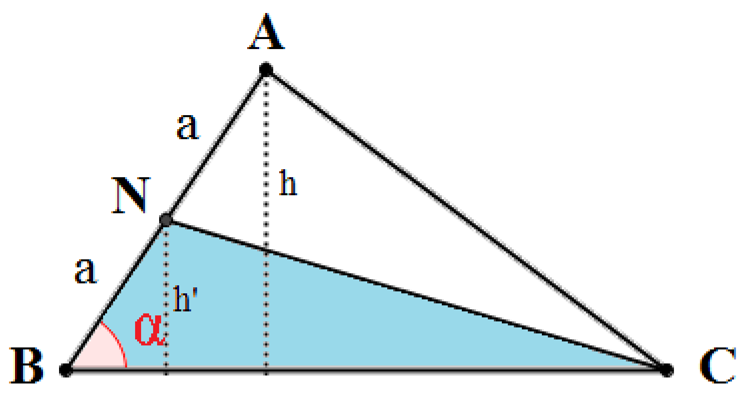


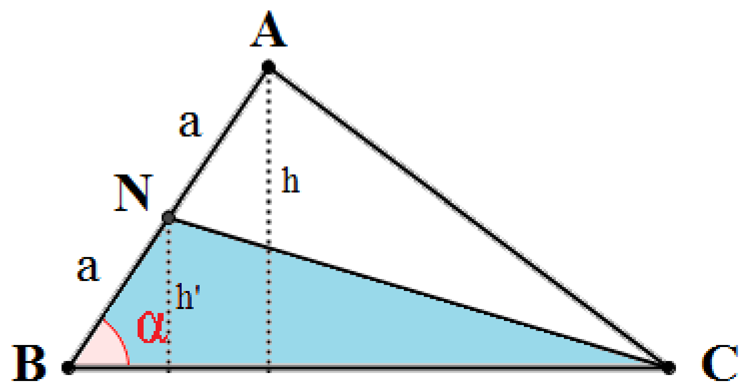
Observe que os triângulos $\boldsymbol{ABC}$ e $\boldsymbol{NBC}$ possuem um ângulo em comum, chamemos **α.**

Note que ao traçarmos as alturas h e h' temos o seguinte :

$$\mathbf{\sin\alpha = \frac{h'}{a} \Rightarrow h' = a\,.\sin\alpha}$$

$$\mathbf{\sin\alpha = \frac{h}{2a} \Rightarrow h = 2a\,.\sin\alpha}$$





Calculando as áreas temos:

$$[NBC] = \frac{BC \times h'}{2} = \frac{BC \times a\,.\sin\alpha}{2} = \frac{aBC\,.\sin\alpha}{2}$$

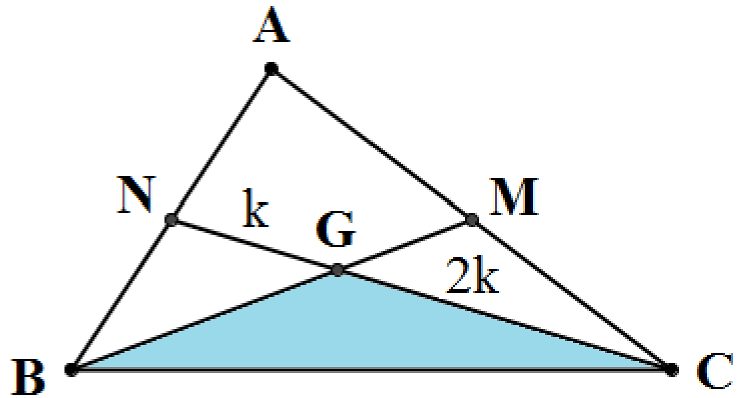
$$[ABC] = \frac{BC \times h}{2} = \frac{BC \times \cancel{2}a\,.\sin\alpha}{\cancel{2}} = aBC.\sin\alpha$$

Assim temos a razão das áreas:

$$\frac{[NBC]}{[ABC]} = \frac{\frac{\cancel{aBC\sin\alpha}}{2}}{\cancel{aBC\sin\alpha}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{[NBC]}{[ABC]} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{[NBC]}{120cm^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow [NBC] = 60cm^2$$

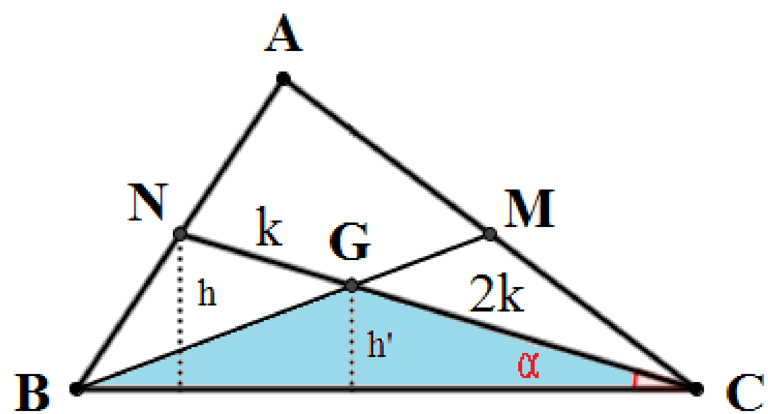
b) Observe que G é o baricentro, então $\boldsymbol{CG = \frac{2}{3}CN}$ e $\boldsymbol{GN = \frac{1}{3}CN}$

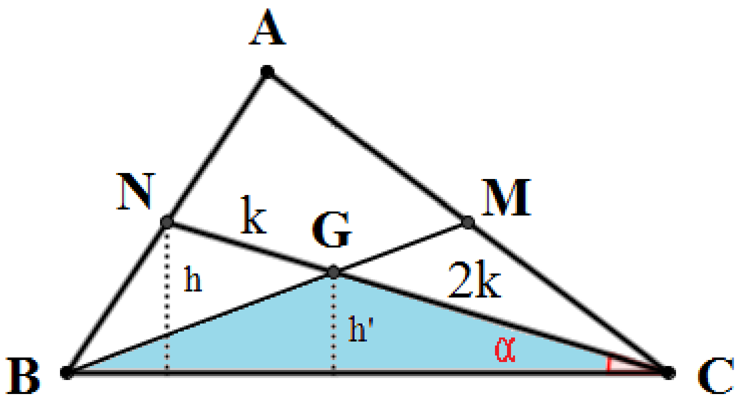


Analogamente ao item a), podemos observar que os triângulos $\boldsymbol{NBC}$ e $\boldsymbol{GBC}$ possuem um ângulo em comum, logo podemos aplicar a fórmula que nos da a altura de cada triângulo, isto é

$$\mathbf{\sin\alpha = \frac{h'}{2k} \Rightarrow h' = 2k \, . \sin\alpha}$$

$$\mathbf{\sin\alpha = \frac{h}{k} \Rightarrow h = 3k \, . \sin\alpha}$$





Calculando as áreas temos:

$$[GBC] = \frac{BC \times h'}{2} = \frac{BC \times \cancel{2}k \,.\, \sin\alpha}{\cancel{2}} = kBC \,.\, \sin\alpha$$

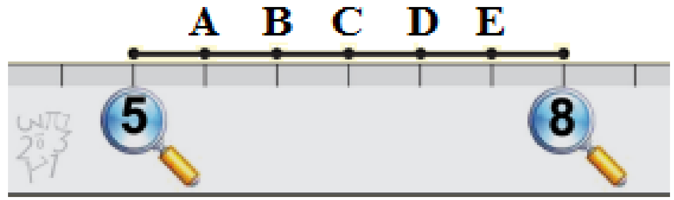
$$[NBC] = \frac{BC \times h}{2} = \frac{BC \times 3k \,.\, \sin\alpha}{2} = \frac{3kBC \,.\, \sin\alpha}{2}$$

Assim temos a razão das áreas:

$$\frac{[GBC]}{[NBC]} = \frac{\cancel{kBC \,.\, \sin\alpha}}{\frac{\cancel{3kBC \,.\, \sin\alpha}}{2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{[GBC]}{[NBC]} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{[GBC]}{60cm^2} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow [GBC] = 40cm^2$$

3)



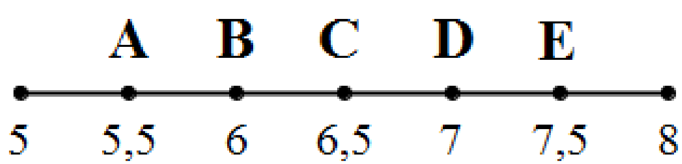
O comprimento do segmento é

$$\mathbf{8 - 5 = 3}\ \boldsymbol{cm}$$

Como ele foi dividido em 6 partes iguais, cada uma das partes mede

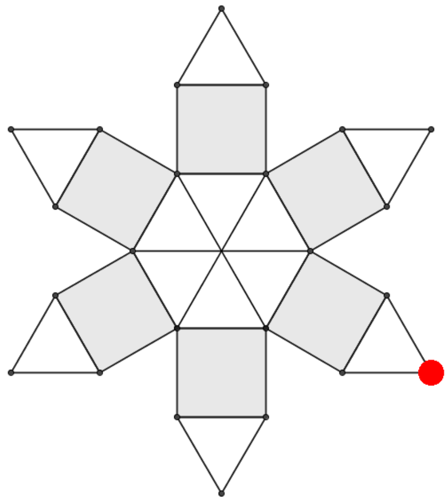
$$\mathbf{3 \div 6 = 0{,}5}\ \boldsymbol{cm}$$

Logo temos



Portanto o ponto $\boldsymbol{B}$ corresponde a marca $\mathbf{6}\boldsymbol{cm}$ na régua.

4)



Como a região cinza é formada por seis quadrados, a área de cada um desses quadrados é igual a

$$24 \div 6 = 4cm^2$$

Como a área de um quadrado de lado l é dada por l^2, vemos que cada um dos quadrados da figura tem $2cm$ de lado.

Por uma contagem direta vemos que uma volta completa na borda da flor contém

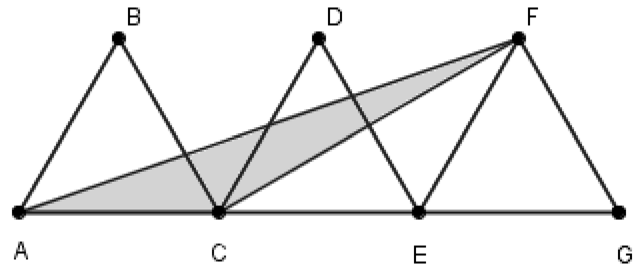
$$6 \times 4 = 24 \text{ segmentos}$$

E como os triângulos são equiláteros, todos os segmentos são de mesma medida, isto é, $2cm$

Logo para dar uma volta completa na flor, a abelha percorreu uma distância igual a

$$24 \times 2 = 48cm$$

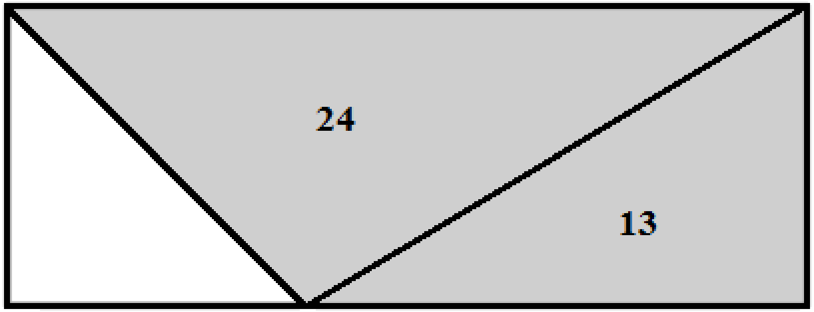
5)



O triângulo $\boldsymbol{AFC}$ possui a mesma base e mesma altura que os triângulos $\boldsymbol{ABC}$, $\boldsymbol{CDE}$ e $\boldsymbol{EFG}$.

Portanto, todos estes quatro triângulos possuem a mesma área de $\mathbf{60cm^2}$

6)

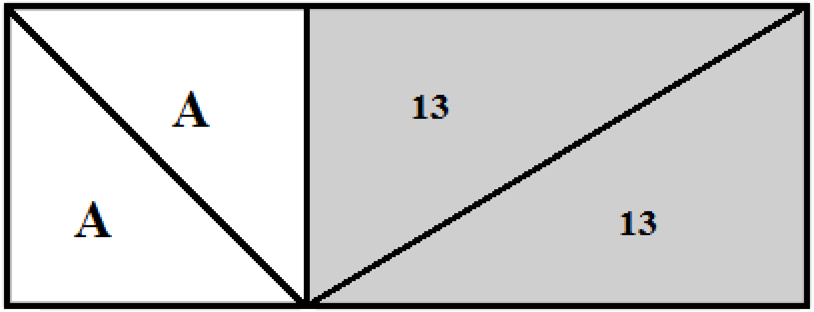


Observe que ao traçarmos uma reta dividindo o triângulo de área 24, sua área é a soma das áreas de um triângulo de área 13 com um triângulo de área desconhecida (chamamos $\boldsymbol{A}$), isto é,

$$\boldsymbol{A + 13 = 24}$$

$$\boldsymbol{A = 24 - 13}$$

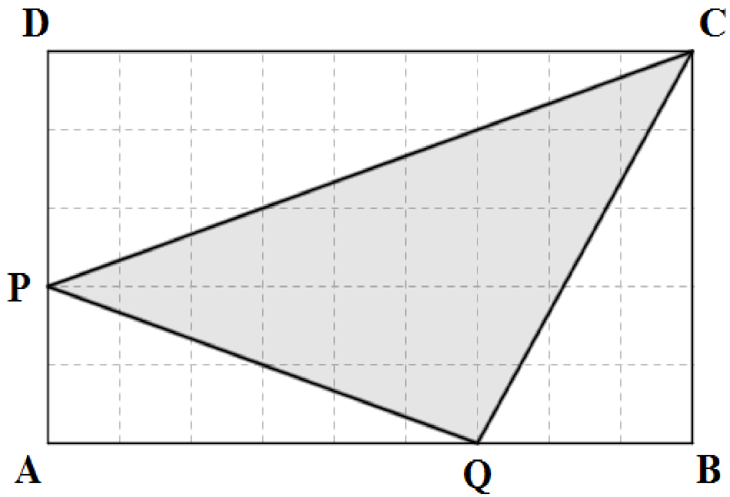
$$\boldsymbol{A = 11}$$



Portanto o terceiro triângulo tem área $\boldsymbol{A = 11}$

7) Em algumas situações, para o cálculo de uma área, é mais fácil considerar uma região maior e subtrair dela pedaços que não fazem parte da região que se pretende calcular a área.

No caso deste problema, para calcular a área do triângulo $\boldsymbol{CPQ}$ podemos subtrair da área do retângulo $\boldsymbol{ABCD}$ as áreas dos triângulos brancos $\boldsymbol{CDP}$, $\boldsymbol{PAQ}$ e $\boldsymbol{QBC}$.



Calculando as áreas temos:

$$[ABCD] = 9 \times 5 = 45$$

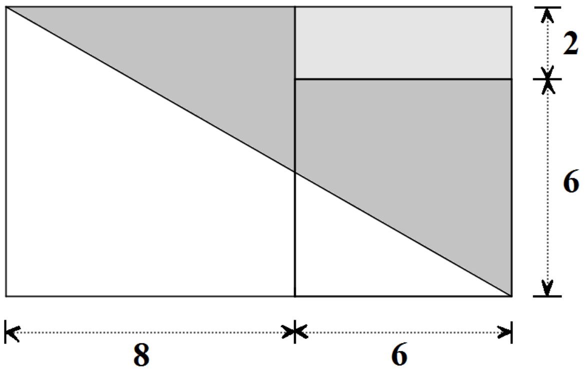
$$[CPD] = \frac{9 \times 3}{2} = 13,5$$

$$[PAQ] = \frac{6 \times 2}{2} = 6$$

$$[QBC] = \frac{3 \times 5}{2} = 7,5$$

Portanto $$[CPQ] = 45 - 13,5 - 6 - 7,5 = 18$$

8)



Se juntarmos à região cinza o retângulo cujos lados medem $6cm$ e $8cm$, como na figura acima, teremos um novo retângulo com lados medindo $14cm$ e $8cm$ cuja área é

$$\mathbf{14 \,.\, 8 = 112cm^2}$$

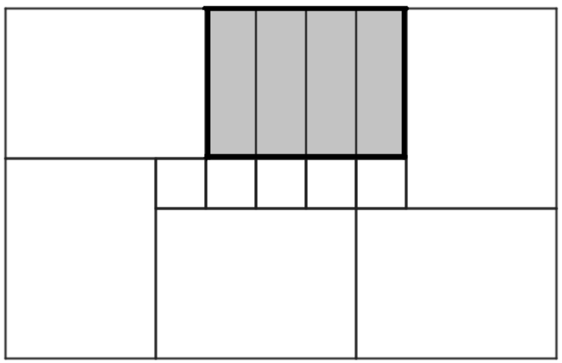
A área desejada é igual a diferença entre a área da metade desse último retângulo e a área do retângulo cinza claro que foi acrescentado, que é

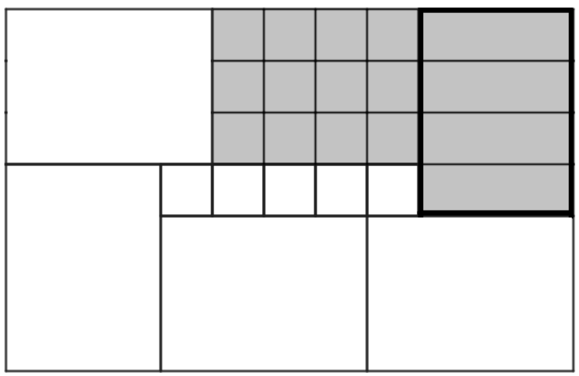
$$\mathbf{2 \,.\, 6 = 12cm^2}$$

Portanto a área desejada é

$$\mathbf{\frac{112}{2} - 12 = 56 - 12 = 44cm^2}$$

9) Do retângulo cinza destacado, concluímos que um dos lados do retângulo mede 4 vezes o lado do quadrado. Assim, como ilustrado na figura da direita, o outro lado do retângulo mede 3 vezes o lado do quadrado.

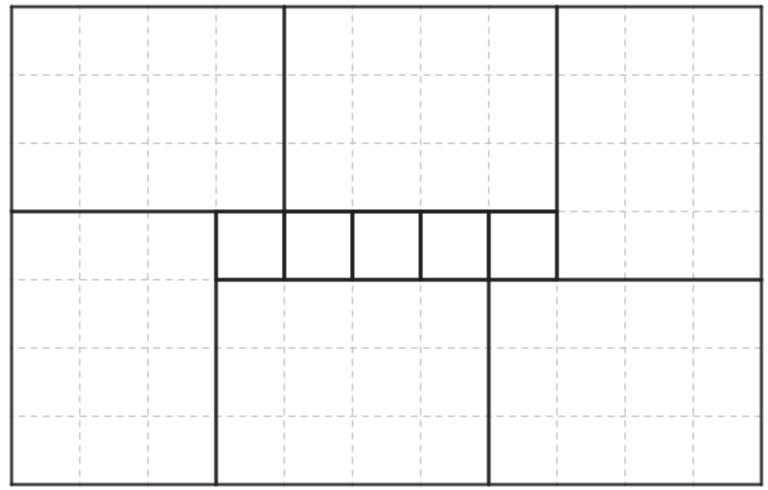




Segue daí que podemos dividir o retângulo em

$$\mathbf{11\,.\,7 = 77}\ \text{quadrados}$$

Como indicado na figura a seguir:



O perímetro desse retângulo é $\mathbf{11+11+7+7=36}$ vezes o lado do quadrado. Mas sabemos que o perímetro total é $324cm$, ou seja, o lado da quadrado é

$$\mathbf{324 \div 36 = 9\ cm}$$

E a área do retângulo é

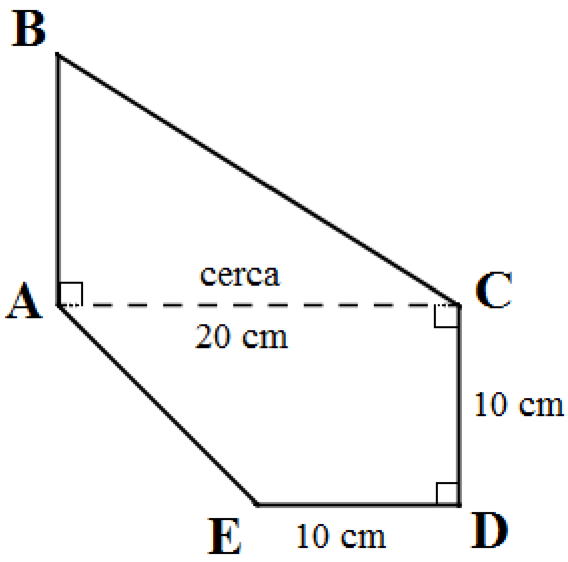
$$\mathbf{11 \times 7 \times 9^2 = 6237cm^2}$$

10)

a) O terreno é formado por um triângulo ABC e por um trapézio $ACDE$.

O triângulo ABC tem área igual a $120m^2$.

O trapézio $ACDE$ tem base maior $AC = 20m$, tem base menor $DE = 10m$ e tem altura $CD = 10m$.



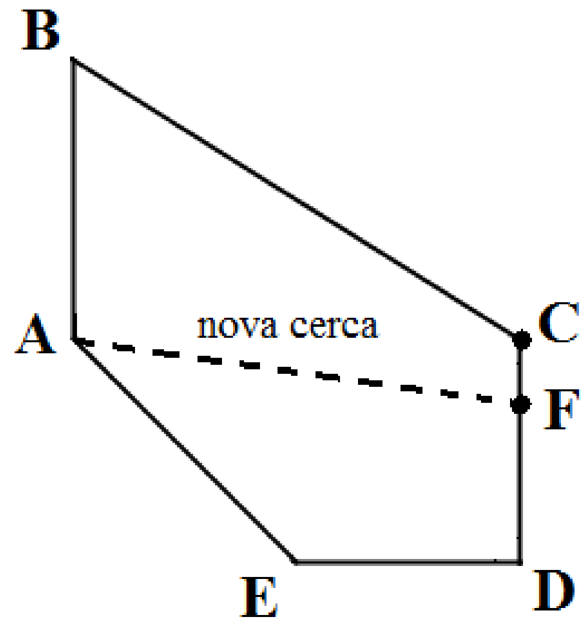
Logo

$$[ACDE] = \frac{(20+10)10}{2} = 150m^2$$

Portanto a área total do terreno é

$$[ABC] + [ACDE] = 120 + 150 = 270m^2$$

b) Como o terreno tem $270m^2$, ao dividi-lo em duas partes $ABCF$ e $AFDE$ de áreas iguais, cada uma dessas partes deve ter área igual a $\mathbf{\frac{270}{2} = 135}\boldsymbol{m^2}$



Note que $ABCF$ é um trapézio de base maior $AB = 12m$, base menor CF e altura $AC = 20m$. Calculando a área deste trapézio pela fórmula usual e a igualando a $135m^2$, obtemos:

$$[\boldsymbol{ABCF}] = \frac{(\mathbf{12} + \boldsymbol{CF})\cancel{\mathbf{20}}}{\cancel{\mathbf{2}}} = \mathbf{135} \;\Rightarrow\; \mathbf{10}\boldsymbol{CF} = \mathbf{135} - \mathbf{120}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{CF} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{10}} = \mathbf{1,5}\boldsymbol{m}$$