Material Teórico - Módulo Equações e Sistemas de Equações Fracionárias

Equações Fracionárias

Oitavo Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Equações algébricas fracionárias

Dadas expressões algébricas E e F em uma variável x, **resolver a equação** $E = F$ significa encontrar todos os valores reais de x para os quais as expressões E e F tenham sentido e a igualdade $E = F$ seja verdadeira. Os valores reais de x que tornam a igualdade verdadeira são chamados **raízes** da equação e o conjunto formado por todas as raízes é chamado **conjunto verdade** ou **conjunto solução** da equação. Quando pelo menos uma das expressões algébricas E ou F envolve frações algébricas, dizemos que $E = F$ é uma **equação algébrica fracionária** ou, mais simplesmente, uma **equação fracionária**. São exemplos de equações algébricas:

$$\frac{1}{x} - 2 = \frac{3}{x}, \quad \frac{x+3}{2x-1} = 7 \quad \text{e} \quad \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x-1} = 0.$$

Para resolver equações algébricas, começamos reduzindo as frações algébricas que fazem parte de sua composição a um mesmo denominador. Em seguida, procuramos as raízes no conjunto onde as frações algébricas fazem sentido. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1. *Resolva a equação fracionária abaixo em $\mathbb{R}$.*

$$\frac{3}{x-1} + \frac{4x}{x+1} = 4.$$

Solução. Observe inicialmente que devemos ter $x \neq 1$ e $x \neq -1$, pois para $x = 1$ a fração algébrica $\frac{3}{x-1}$ não faz sentido e para $x = -1$ a fração algébrica $\frac{4x}{x+1}$ não faz sentido. Utilizando as técnicas para somar frações algébricas reduzindo-as a um mesmo denominador, vistas no módulo anterior, temos:

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{x-1} + \frac{4x}{x+1} = 4 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{4x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{4(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} \\
&\Leftrightarrow 3(x+1) + 4x(x-1) = 4(x-1)(x+1) \\
&\Leftrightarrow 3x + 3 + 4x^2 - 4x = 4(x^2 - 1) \\
&\Leftrightarrow 3x + 3 + \cancel{4x^2} - 4x = \cancel{4x^2} - 4 \\
&\Leftrightarrow 3x - 4x = -4 - 3 \\
&\Leftrightarrow -x = -7 \\
&\Leftrightarrow x = 7.
\end{aligned}$$

Como $7 \neq -1, 1$, concluímos que o conjunto solução da equação dada é $S = \{7\}$. □

Exemplo 2. *Encontre as soluções, em $\mathbb{R}$, da equação fracionária abaixo:*

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)^3} + \frac{1}{(x-1)^3(x-2)^2} = 0.$$

Solução. Para que a equação faça sentido, devemos ter $x \neq 1$ e $x \neq 2$ (pois, do contrário, pelo menos um dos denominadores se anularia).

Multiplicando o numerador e o denominador da fração algébrica $\frac{1}{(x-1)^2(x-2)^3}$ por $x-1$ e multiplicando o numerador e o denominador da fração algébrica $\frac{1}{(x-1)^3(x-2)^2}$ por $x-2$, obtemos a equação equivalente

$$\frac{1 \cdot (x-1)}{(x-1)^2(x-2)^3(x-1)} + \frac{1 \cdot (x-2)}{(x-1)^3(x-2)^2 \cdot (x-2)} = 0$$

ou, ainda,

$$\frac{x-1+x-2}{(x-1)^3(x-2)^3} = 0.$$

Portanto,

$$x - 1 + x - 2 = 0$$

o que nos dá $2x - 3 = 0$ e, por fim, $x = \frac{3}{2}$.

Novamente aqui, como $\frac{3}{2} \neq 1, 2$, o conjunto solução da equação é $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$. □

Exemplo 3. *Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação fracionária*

$$\frac{2}{x^2-1} - \frac{x+3}{x+1} = -1.$$

Solução. Observe que $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$. Portanto, para reduzirmos as frações algébricas que compõem a equação acima a um mesmo denominador, basta que multipliquemos o numerador e o denominador da segunda fração algébrica por $x-1$. Assim fazendo, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{x^2-1} - \frac{x+3}{x+1} = -1 \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{x^2-1} - \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{-1 \cdot (x^2-1)}{x^2-1} \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{x^2-1} - \frac{(x+3)(x-1)}{x^2-1} = \frac{-1 \cdot (x^2-1)}{x^2-1} \\
&\Leftrightarrow 2 - (x+3)(x-1) = -1 \cdot (x^2-1) \\
&\Leftrightarrow 2 \cancel{-x^2} - 3x + x + 3 = \cancel{-x^2} + 1 \\
&\Leftrightarrow -2x = -4 \\
&\Leftrightarrow x = 2.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 4. *Resolva a equação fracionária*

$$\frac{x+2}{x-3} = \frac{x-2}{x+3}.$$

Solução. Para reduzir as frações algébricas $\frac{x+2}{x-3}$ e $\frac{x-2}{x+3}$ a um mesmo denominador, multiplicamos os membros da primeira por $x+3$ e os da segunda por $x-3$. Fazendo isso, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x-3}=\frac{x-2}{x+3} &\Leftrightarrow \frac{(x+2)(x+3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x+3)(x-3)}\\ &\Leftrightarrow (x+2)(x+3)=(x-2)(x-3)\\ &\Leftrightarrow \cancel{x^2}+2x+3x+\cancel{6}=\cancel{x^2}-2x-3x+\cancel{6}\\ &\Leftrightarrow 10x=0\\ &\Leftrightarrow x=0.\end{aligned}$$

Novamente aqui, o valor 0 encontrado para x é distinto dos valores que devem ser evitados para que as frações envolvidas tenham sentido. Portanto, $S=\{0\}$. □

Exemplo 5. *Sejam a e b números reais tais que $ab\neq 0$ e $|a|\neq|b|$. Em relação à equação*

$$\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b},$$

pdoe-se afirmar que o número de elementos de seu conjunto-verdade, em $\mathbb{R}$, é igual a:

(a) 0.

(b) 1.

(c) 2.

(d) 3.

(e) 4.

Solução. Somando as frações que aparecem nos dois lados da equação obtemos:

$$\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{a(x-a)}{ab}+\frac{b(x-b)}{ab}=\frac{b(x-b)}{(x-a)(x-b)}+\frac{a(x-a)}{(x-a)(x-b)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{a(x-a)+b(x-b)}{ab}=\frac{a(x-a)+b(x-b)}{(x-a)(x-b)}.$$

Agora, dividiremos a análise do problema em duas possibilidades:

(i) Primeiramente, tentaremos encontrar as soluções que satisfazem $a(x-a)+b(x-b)\neq 0$. Nesse caso, a última equação acima é sucessivamente equivalente a

$$\begin{aligned}(x-a)(x-b)=ab &\Leftrightarrow x^2-(a+b)x+\cancel{ab}=\cancel{ab}\\ &\Leftrightarrow x^2=(a+b)x.\end{aligned}$$

Observe que $x=0$ é uma solução da última equação. Entretanto, se $x\neq 0$, podemos multiplicar ambos os membros dessa última equação por $\frac{1}{x}$ para obter $x=a+b$. Note que a hipótese $|a|\neq|b|$ implica $a+b\neq 0$, o que prova que, de fato, $x=a+b$ é uma segunda solução.

Por fim, note que os valores obtidos para x não anulam os denominadores das frações envolvidas. Realmente, $x=0$ não anula $x-a$ nem $x-b$ uma vez que, por hipótese, $ab\neq 0$; o mesmo sucede com $x=a+b$.

(ii) Como segunda possibilidade, suponha que $a(x-a)+b(x-b)=0$. Então, temos:

$$\begin{aligned}a(x-a)+b(x-b)=0 &\Leftrightarrow ax-a^2+bx-b^2=0\\ &\Leftrightarrow (a+b)x=a^2+b^2\\ &\Leftrightarrow x=\frac{a^2+b^2}{a+b}.\end{aligned}$$

Note que $\frac{a^2+b^2}{a+b}\neq a+b$ pois, caso contrário, teríamos:

$$\begin{aligned}\frac{a^2+b^2}{a+b}=a+b &\Leftrightarrow a^2+b^2=(a+b)^2\\ &\Leftrightarrow a^2+b^2=a^2+2ab+b^2\\ &\Leftrightarrow ab=0,\end{aligned}$$

o que não pode acontecer, uma vez que estamos supondo $ab\neq 0$. Da mesma forma, $\frac{a^2+b^2}{a+b}\neq 0$.

Também, $x=\frac{a^2+b^2}{a+b}$ não anula os denominadores $x-a$ ou $x-b$. Por exemplo, com $x=\frac{a^2+b^2}{a+b}$, temos

$$\begin{aligned}x-a &=\frac{a^2+b^2}{a+b}-a=\frac{a^2+b^2}{a+b}-\frac{a(a+b)}{a+b}\\ &=\frac{b^2-ab}{a+b}=\frac{b(b-a)}{a+b},\end{aligned}$$

e $b(b-a)\neq 0$, já que estamos assumindo $ab\neq 0$ e $|a|\neq|b|$.

Portanto, há três soluções distintas para a equação fracionária em questão, o que fornece o item (d) como a alternativa correta. □

Observação 6. *O leitor atento deve ter percebido que a estratégia inicial de solução do exemplo anterior foi completamente diferente daquelas utilizadas nos demais exemplos vistos até agora. Isso se deve ao fato de que, se tivéssemos começado reduzindo todas as frações envolvidas a um mesmo denominador, teríamos obtido sucessivamente (verifique!)*

$$\begin{aligned}&\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}\\ \Leftrightarrow\ &\frac{a(x-a)^2(x-b)+b(x-a)(x-b)^2}{ab(x-a)(x-b)}\\ &=\frac{ab^2(x-b)+a^2b(x-a)}{ab(x-a)(x-b)}.\end{aligned}$$

Assim, deveríamos procurar as possíveis soluções resolvendo a equação

$$a(x-a)^2(x-b)+b(x-a)(x-b)^2=$$

$$= ab^2(x-b) + a^2b(x-a).$$

Ora, uma vez que $a \neq -b$ por hipótese, tal equação é de terceiro grau *(verifique mais essa afirmação!), o que nos faz cogitar a busca de um caminho alternativo para resolver o problema.*

Exemplo 7. *Resolva a equação fracionária abaixo em $\mathbb{R}$:*

$$\frac{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}}{\frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1}} = 1.$$

Solução. Inicialmente, observe que, para a equação fracionária dada ter sentido, devemos ter $x-1 \neq 0$, $x+1 \neq 0$ e $\frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1} \neq 0$. Assim, $x \neq -1, 1$ e

$$\frac{2(x+1) + 2(x-1)}{(x-1)(x+1)} \neq 0$$

ou, o que é o mesmo, $x \neq 0$.

Suponha, pois, $x \neq -1, 0, 1$. Temos:

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} &= \frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)} - \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}\\ &= \frac{x^2+2x+1}{x^2-1} - \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}\\ &= \frac{\cancel{x^2}+2x+\cancel{1}-\cancel{x^2}+2x-\cancel{1}}{x^2-1}\\ &= \frac{4x}{x^2-1}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1} &= \frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)}\\ &= \frac{2x+2}{x^2-1} + \frac{2x-2}{x^2-1}\\ &= \frac{4x}{x^2-1}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}}{\frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1}} = 1 &\Leftrightarrow \frac{\frac{4x}{x^2-1}}{\frac{4x}{x^2-1}} = 1\\ &\Leftrightarrow \frac{\cancel{4x}}{\cancel{x^2-1}} \cdot \frac{\cancel{x^2-1}}{\cancel{4x}} = 1\\ &\Leftrightarrow 1 = 1.\end{aligned}$$

Essa última igualdade é sempre verdadeira, contanto que todas as passagens realizadas tenham sido válidas. Como isso sucede se e só se $x \neq -1, 0, 1$, concluímos que todo número real diferente de -1, 0 e 1 é solução da equação. Desse modo, o conjunto-solução da equação fracionária dada é $S = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$. □

O próximo exemplo mostra que, ao modelarmos uma situação problema *algebricamente*, podemos reduzir a análise da situação à resolução de uma equação fracionária.

Exemplo 8. *Na escola A, 360 alunos foram distribuídos em algumas salas de aula. Na escola B, 504 alunos também foram distribuídos em algumas salas de aula. Sabendo que, após a distribuição, havia quatro salas de aula a mais na escola B e que o número de alunos em cada sala é o mesmo, calcule a quantidade de salas de aula da escola B.*

Solução. Denominando x a quantidade de salas de aula da escola A, temos que a quantidade de salas de aula da escola B é igual a $x+4$. Por outro lado, como a quantidade de alunos em cada sala é a mesma (tanto na escola A quanto na escola B), temos que

$$\frac{360}{x} = \frac{504}{x+4}.$$

O que devemos fazer agora é encontrar as soluções inteiras e positivas da equação fracionária acima (haja vista que uma sala de aula não pode ter um número não inteiro e positivo de alunos).

Observe que, uma vez que estamos à procura de soluções positivas, os denominadores das frações algébricas que compõem a equação acima são sempre positivos. Agora, multiplicando os termos da primeira fração algébrica por $x+4$ e os da segunda por x, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{360}{x} = \frac{504}{x+4} &\Leftrightarrow \frac{360}{x} - \frac{504}{x+4} = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{360(x+4)}{x(x+4)} - \frac{504x}{x(x+4)} = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{360(x+4) - 504x}{x(x+4)} = 0\\ &\Leftrightarrow 360x + 1440 - 504x = 0\\ &\Leftrightarrow 144x = 1440\\ &\Leftrightarrow x = \frac{1440}{144} = 10.\end{aligned}$$

Portanto, o número de salas de aula da escola B é $x+4 = 10+4 = 14$. □

Exemplo 9. *Sabendo que*

$$\frac{1+x}{x-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x},$$

para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, podemos afirmar que:

(a) $A + B = 5$.

(b) $A - B = 5$.

(c) $B - A = 2$.

(d) $A + B = 3$.

(e) $A - B = 2$.

Solução. Temos:

$$\frac{1+x}{x-x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{1-x}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{1+x}{x(1-x)}-\frac{A(1-x)}{x(1-x)}-\frac{Bx}{x(1-x)}=0$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{1+x-A(1-x)-Bx}{x(1-x)}=0.$$

Como $x \neq 1$ e $x \neq 0$, a última igualdade acima é equivalente a

$$1+x-A(1-x)-Bx=0,$$

que por sua vez equivale a

$$(1+A-B)x+1-A=0.$$

Se denotarmos por $p(x)$ o polinômio $(1+A-B)x+1-A$, a validade da última igualdade acima para todo real $x \neq 0, 1$ nos diz que $p(x)$ é identicamente nulo. Portanto, seus coeficientes são todos nulos, e segue daí que $1-A=0$ e $1+A-B=0$, ou seja, $A=1$ e $B=2$.

Logo, concluímos que $A+B=3$, de sorte que a alternativa correta é (d). □

Os três últimos exemplos que apresentamos a seguir são um tanto mais sofisticados. Observe que, estritamente falando, o primeiro deles não se reduz à análise de equações algébricas fracionárias. Todavia, o corpo de ideias empregadas em sua solução é essencialmente o mesmo, razão pela qual o apresentamos aqui.

Exemplo 10. *Seja k um número real positivo. Mostre que a solução, em x, da equação $k^2-kx+1=0$, dada em função de k, é maior do que ou igual a 2.*

Solução. Inicialmente, note que a equação dada é de *primeiro grau* em x, com

$$k^2-kx+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{k^2+1}{k}.$$

Agora, veja que

$$\begin{aligned}\frac{k^2+1}{k}\geq 2 &\Leftrightarrow \frac{k^2+1}{k}\geq\frac{2k}{k}\\ &\Leftrightarrow \frac{k^2+1}{k}-\frac{2k}{k}\geq 0\\ &\Leftrightarrow \frac{k^2-2k+1}{k}\geq 0\\ &\Leftrightarrow \frac{(k-1)^2}{k}\geq 0.\end{aligned}$$

Como $k>0$ e $(k-1)^2$, sendo o quadrado de um número real, é sempre não negativo, concluímos que a última desigualdade acima é verdadeira para todo $k>0$. Portanto, a solução $x=\frac{k^2+1}{k}$ é sempre maior ou igual a 2. □

Exemplo 11. *Encontre números reais A e B tais que*

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+1}$$

para todo inteiro positivo n.

Solução. Reduzindo as frações a um mesmo denominador, obtemos:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+1}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{A(2n+1)}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{B(2n-1)}{(2n-1)(2n+1}=0$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{1-A(2n+1)-B(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}=0.$$

Daí, devemos ter

$$1-A(2n+1)-B(2n-1)=0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ ou, ainda,

$$-(2A+2B)n+1-A+B=0 \qquad (1)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora, observe que, se $2A+2B \neq 0$, a equação de primeiro grau (em x)

$$-(2A+2B)x+1-A+B=0 \qquad (2)$$

tem uma única solução, qual seja, $x=\frac{1-A+B}{2A+2B}$. Mas, como queremos que a igualdade (1) seja válida *para todo* $n \in \mathbb{N}$, concluímos que (2) deve ter não uma única, mas *uma infinidade* de soluções. Portanto, $2A+2B=0$ e, voltando a (1) (ou a (2), conforme prefira o leitor), $1-A+B=0$. Resolvendo o sistema linear

$$\begin{cases} 2A+2B=0 \\ -A+B=-1 \end{cases},$$

concluímos que $A=\frac{1}{2}$ e $B=-\frac{1}{2}$. □

Exemplo 12. *Calcule o valor da expressão numérica*

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{2015\cdot 2017}.$$

Solução. Pelo exemplo anterior, temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 3}&=\frac{1}{(2\cdot 1-1)\cdot(2\cdot 1+1)}=\frac{1/2}{2\cdot 1-1}-\frac{1/2}{2\cdot 1+1}\\ &=\frac{1/2}{1}-\frac{1/2}{3}.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\frac{1}{3\cdot 5} = \frac{1}{(2\cdot 2-1)\cdot(2\cdot 2+1)} = \frac{1/2}{2\cdot 2-1} - \frac{1/2}{2\cdot 2+1}$$
$$= \frac{1/2}{3} - \frac{1/2}{5}.$$

Prosseguindo com o mesmo raciocínio, obtemos a sequência de igualdades abaixo:

$$\frac{1}{3\cdot 5} = \frac{1/2}{3} - \frac{1/2}{5}$$
$$\frac{1}{5\cdot 7} = \frac{1/2}{5} - \frac{1/2}{7}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{2015\cdot 2017} = \frac{1/2}{2015} - \frac{1/2}{2017}.$$

Somando membro a membro todas essas igualdades e efetuando os cancelamentos possíveis, chegamos finalmente a:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{2015\cdot 2017} = \frac{1/2}{1} - \frac{1/2}{2017}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4034}$$
$$= \frac{2016}{4034} = \frac{1008}{2017}.$$

□

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas três sessões de 50min para discutir todo o conteúdo presente nesse material. Mais uma vez alerte os alunos quanto à necessidade de prestar bastante atenção durante o processo de redução de frações algébricas a um mesmo denominador, uma vez que um erro ao longo do mesmo compromete toda a solução de um problema. Antes de iniciar a resolução de cada equação, deixe bem claro quais são os números reais para os quais a equação não faz sentido, pois esses valores já devem ser excluídos do conjunto solução.

As referências colecionadas a seguir contém muitos problemas e exemplos relacionados ao conteúdo do presente material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais*, 2ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. G Iezzi. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 6: Complexos, Polinômios e Equações.* São Paulo, Atual Editora, 2012.