ENCONTRO 1 – OBMEP NA ESCOLA – N2 – ciclo 3

Assuntos a serem abordados: **Geometria**

- Congruências de triângulos.
- Paralelismo: soma dos ângulos internos de um triângulo, propriedades e caracterização dos quadriláteros notáveis (quadrado, retângulo, paralelogramo, trapézio e losango).

As referências que seguem serão as nossas fontes principais de apoio:

1) Elementos básicos de geometria plana – Parte 2: Videoaulas e Material Teórico referentes aos assuntos abordados.

http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=30

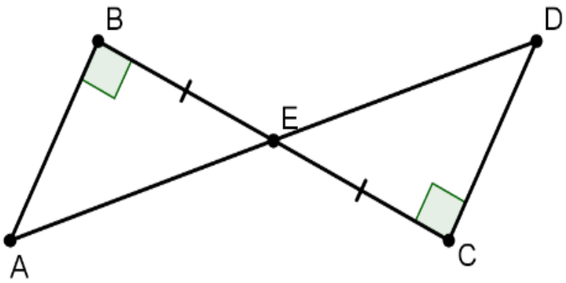
2) Elementos básicos de geometria plana – Parte 3: Videoaulas e Material Teórico referentes aos assuntos abordados.

http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=31

A seguir estamos disponibilizando uma lista com oito exercícios. O professor deverá discutir esses exercícios com seus alunos, acompanhando e auxiliando no entendimento das estratégias de resoluções apresentadas pelos alunos. É importante incentivar o envolvimento coletivo de todos nessas discussões das resoluções, cabendo ao professor enfatizar e aprofundar os conhecimentos matemáticos associados às questões apresentadas. Se todos os exercícios da lista forem resolvidos durante o tempo do encontro, então cabe ao professor propor exercícios adicionais sobre os assuntos abordados. Nesse sentido, os materiais de apoio indicados serão elementos auxiliares importantes.

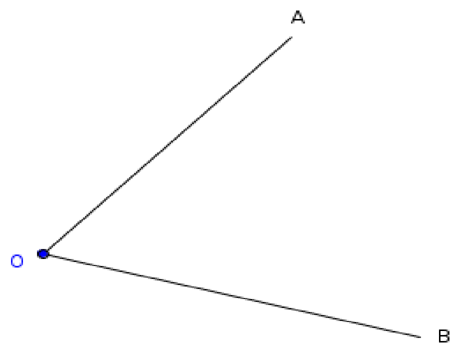
Destacamos que os assuntos abordados tratam da geometria de posição e quase sempre não envolvendo relações métricas. Os exercícios propostos estimulam o uso de construções geométricas via manipulações com esquadros ou régua (sem escalas) e compasso, integrando casos de congruências de triângulos e paralelismo de retas à exploração de relações angulares e caracterizações de quadriláteros notáveis.

QUESTÃO 1. Na figura que segue, todas as medidas são expressas em cm e sabe-se que: AB = 30, DE = 20, AE = 3x − 1 e CD = 2y + 8. Nessas condições, determine os valores de x e y.



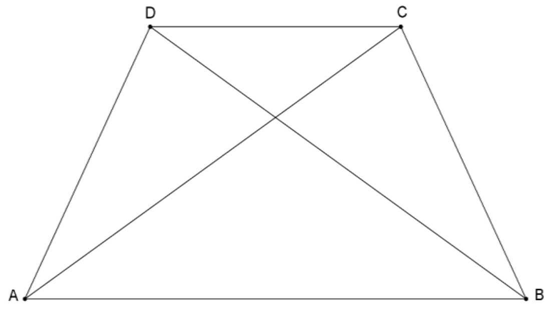
(Esse exercício encontra-se no Portal da Matemática, Caderno de Exercícios - Exercício 5 – Módulo: Elementos Básicos de Geometria Plana - Parte 2 - Congruência de Triângulos e Aplicações).

QUESTÃO 2. a) Construa com régua (sem escalas) e compasso a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$ representado na figura que segue:



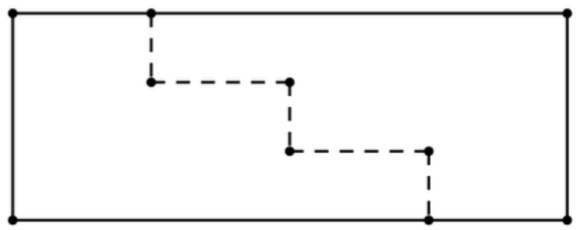
b) Utilizando congruência de triângulos justifique a sua construção (ou seja, prove que ela é consistente).

QUESTÃO 3. Na figura que segue, tem-se AC=BD e AD=BC.



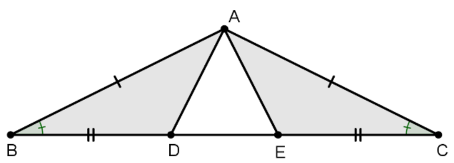
Usando congruência de triângulos, o recíproco do Teorema do Triângulo Isósceles e o Teorema dos Ângulos Alternos e Internos, mostre que ABCD é um trapézio isósceles. Em seguida, conclua que $A\widehat{D}C = B\hat{C}D$.

QUESTÃO 4. Um retângulo de papelão com 45 cm de altura foi cortado em dois pedaços iguais, nos segmentos pontilhados da figura. Com esses dois pedaços é possível montar um quadrado de lado maior que 45 cm. Qual é o comprimento da base do retângulo?



(Esse exercício encontra-se no Portal da Matemática, Caderno de Exercícios - Exercício 13 – Módulo: Elementos Básicos de Geometria- Parte 3 - Quadriláteros).

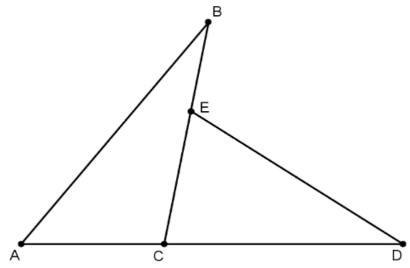
QUESTÃO 5. No triângulo isósceles ABC, de base BC, marcamos sobre o lado $\overline{BC}$os pontos D e E, de maneira que $\overline{BD} \equiv \overline{EC}$, como mostra a figura.



Mostre que os triângulos ADB e AEC são congruentes.

(Esse exercício encontra-se no Portal da Matemática, Exercício 9 – Módulo: Elementos Básicos de Geometria- Parte 2 – Congruência de Triângulos e Aplicações).

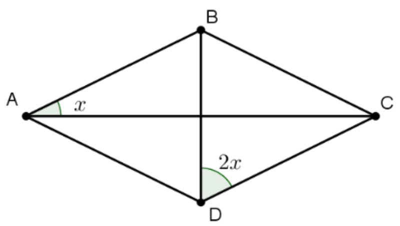
QUESTÃO 6. Uma professora lê o seguinte conjunto de instruções para os alunos de uma sala de aula: considere dois triângulos ABC e EDC congruentes e suponha que os vértices A, C e D são colineares e que os vértices B, E e C também o são. Então, solicita que um certo aluno vá até a lousa e faça um desenho geométrico representativo dessas instruções. O aluno elabora a figura a seguir:



Utilizando congruência de triângulos, mostre que o desenho está errado, pois a reta deve ser perpendicular à reta $\vec{BC}$.

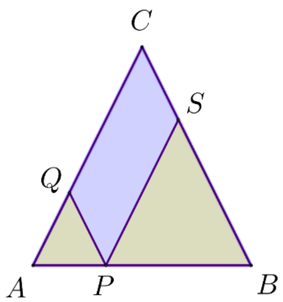
(Esse exercício encontra-se no Portal da Matemática, Exercício 14 – Módulo: Elementos Básicos de Geometria- Parte 2 – Congruência de Triângulos e Aplicações).

QUESTÃO 7. Calcule o valor do ângulo x no losango abaixo:

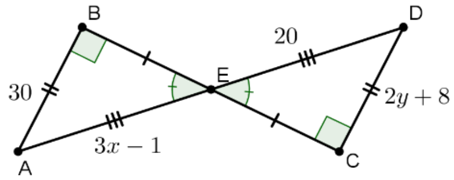


(Esse exercício encontra-se no Portal da Matemática, Exercício 5 – Módulo: Elementos Básicos de Geometria- Parte 3 – Quadriláteros).

QUESTÃO 8. Por um ponto P na base AB de um triângulo isósceles ABC traçamos retas paralelas aos lados congruentes CA e CB, formando desta forma um quadrilátero PQCS. Se AB=7 cm e CA=CB=10 cm, então encontre o valor do perímetro deste quadrilátero.

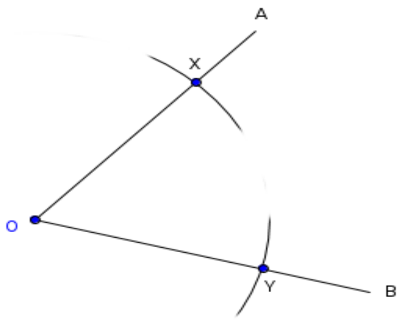


QUESTÃO 1. As informações da questão são representadas na figura que segue.

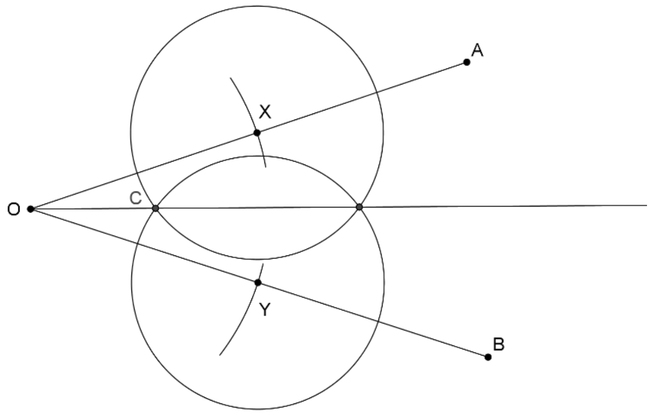


Temos $A\hat{B}E \equiv D\hat{C}E = 90°$, $BE = CE$ e $B\hat{E}A \equiv C\hat{E}D$, pois são opostos pelo vértice. Logo, ABE ≡ DCE, pelo caso ALA. Assim, igualando os lados homólogos temos que 2y + 8 = 30 e 3x − 1 = 20. O que mostra que y = 11 e que x = 7.

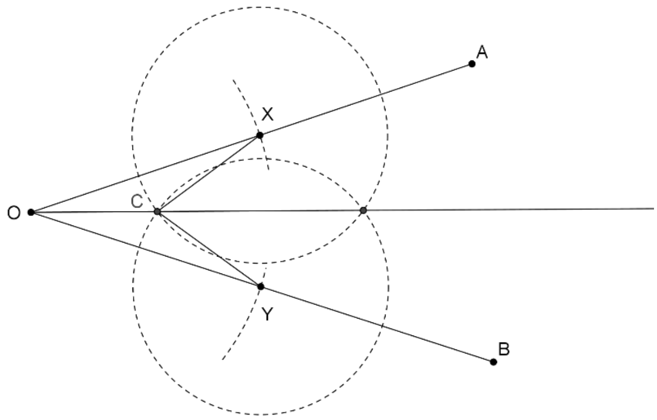
QUESTÃO 2. a) Centre o compasso em O e com a mesma abertura, marque os pontos X na semirreta $\overrightarrow{OA}$ e Y na semirreta $\overrightarrow{OB}$ de forma que o segmento $\overline{OX}$ é congruente ao segmento $\overline{OY}$.



Fixe uma abertura r no compasso e trace dois círculos de raio r e centros X e Y, que se intersectam num ponto C. Afirmamos que a semirreta $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz de $A\hat{O}B$.

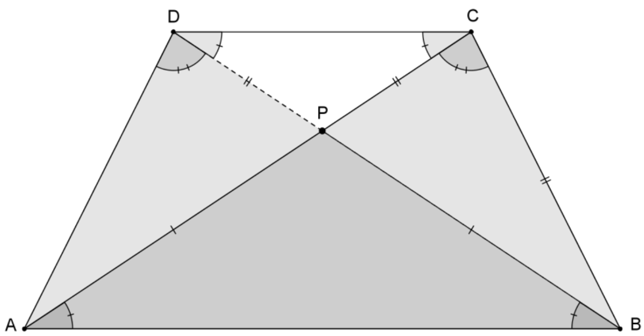


b) Vamos justificar, utilizando critérios de congruência, que a semirreta é realmente a bissetriz do ângulo B. Em relação aos triângulos XOC e YOC construídos



temos que $\overline{OX} = \overline{OY}$ e $\overline{XC} = \overline{OY}$. Como o lado $\overline{OC}$ é comum aos mesmos, segue do caso de congruência LLL, que os triângulos XOC e YOC são congruentes. Logo, temos as igualdades das medidas dos ângulos $X\hat{O}C = Y\hat{O}C$ ou, ainda, $A\hat{O}C = B\hat{O}C$.

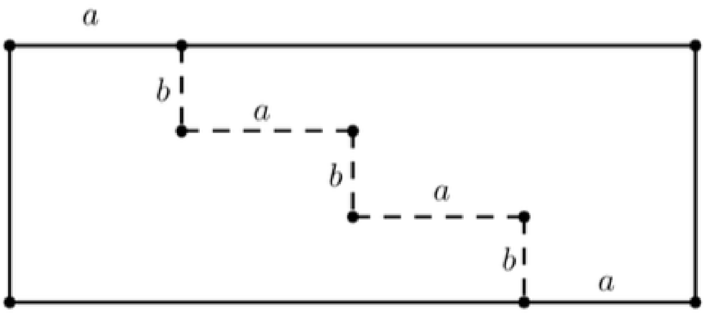
QUESTÃO 3.



Pelo critério LLL a correspondência ABD ⟷ BAC é uma congruência. Assim,

e A$\hat{C}B = B\hat{D}A$, logo, se P é a interseção dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, segue do recíproco do Teorema do Triângulo Isósceles que o triângulo APB é isósceles de base $A\bar{B}$. Consequentemente, o triângulo DPC é isósceles de base $D\bar{C}$, sendo que os ângulos das bases desses triângulos possuem a mesma medida. Assim, considerando transversal comum $\overleftrightarrow{BD}$ as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e segue do Teorema dos Ângulos Alternos que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e são paralelas e, portanto, ABCD é um trapézio. Como AB>CD e AD=BC trata-se de um trapézio isósceles e, portanto, os ângulos com vértices nas extremidades da base menor têm a mesma medida, ou seja, D.

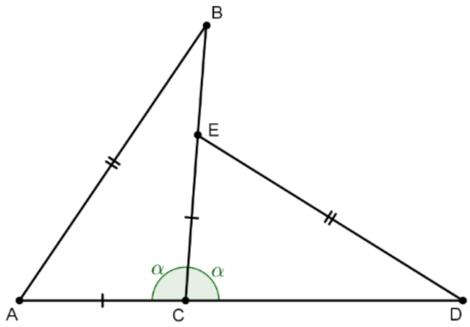
QUESTÃO 4. Para que seja possível o encaixe, alguns segmentos devem ter o mesmo comprimento. Vamos observar a figura.



Percebe-se que as dimensões do retângulo são 4a de comprimento por 3b = 45 cm de largura; as do quadrado serão 4b por 3a. Como b = 15 cm, o lado do quadrado será 60cm, segue que a = 20 e o lado do retângulo 4 x 20 = 80 cm.

QUESTÃO 5. Se o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$, então podemos afirmar que $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ e $ABC = ACB$. Por construção, $\overline{BD} \equiv \overline{EC}$. Sendo assim, utilizando o critério de congruência LAL, concluímos que são congruentes os triângulos ADB e AEC.

QUESTÃO 6. Como são congruentes os triângulos ABC e EDC, os pares de lados homólogos são: AC e CE, BC e DC, AB e ED. Além disso, temos que $A\hat{C}B = D\hat{C}E$, como mostra a figura.



Por outro lado, = 180^{o} , ou seja, ambos são iguais a 90^{o}. Portanto, as retas e são perpendiculares.

QUESTÃO 7. Como os lados opostos do losango são paralelos e como AC é transversal aos lados paralelos AB e DC, então pelo Teorema dos Ângulos Alternos Internos obtemos que o ângulo $B\hat{A}C$ é congruente ao ângulo $D\hat{C}A$. Além disso, as diagonais de um losango são segmentos perpendiculares. Chamando essa interseção das diagonais de O, temos, pela soma dos ângulos internos do triângulo DCO, que x + 2x + 90º = 180º, ou seja, que x = 30º.

QUESTÃO 8. Segue da definição que PQCS é um paralelogramo. Por uma versão do Teorema Recíproco dos Ângulos Alterno e Internos temos as igualdades e A. Sendo ABC um triângulo isósceles temos A. Logo, os triângulos APQ e BPS também são isósceles e, assim, QP = QA e SP = SB. Usando que os lados opostos de um paralelogramo são congruentes concluímos que seu perímetro é igual a CA + CB = 20 cm.

ENCONTRO 2 – OBMEP NA ESCOLA – N2 – ciclo 3

Assuntos a serem abordados: **Geometria**

- Resolução de exercícios envolvendo áreas e perímetros de figuras planas.
- Teorema de Pitágoras (via área) e aplicações.

As referências que seguem serão as nossas fontes principais de apoio:

- Apostila do PIC da OBMEP “Encontros de Geometria”, F. Dutenhefner, L. Cadar.
  http://www.obmep.org.br/docs/Geometria.pdf

- Teorema de Pitágoras e Aplicações: Videoaulas e Material Teórico referentes aos assuntos abordados.
  http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=78

- Material com exercícios resolvidos do Portal da Matemática:
  http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/t17109t5xtu0.pdf

- Apostila 3 do PIC da OBMEP “Teorema de Pitágoras e Áreas”, Eduardo Wagner.
  http://www.obmep.org.br/docs/apostila3.pdf

Quando da resolução das questões, é esperado que o aluno crie a habilidade do cálculo de áreas e perímetros de figuras planas simples, e também manipule problemas associados à mosaicos geométricos ou ladrilhamento do plano por quadriláteros notáveis.

QUESTÃO 1. Uma folha de papel quadrada de área 16 cm^2, branca de um lado e cinza de outro, foi dobrada como indicado ao lado. O ponto *O* é o centro do quadrado (ponto de encontro das diagonais) e M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

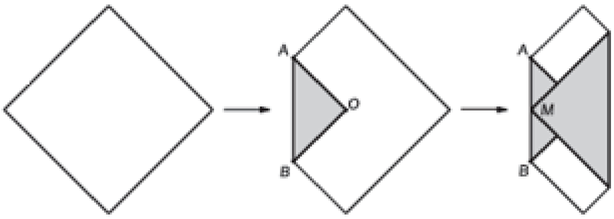


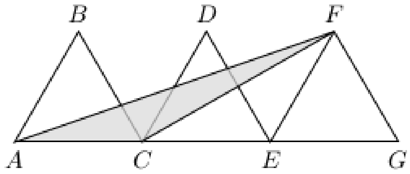
Figura I Figura II

a) Qual é a área da região branca na figura I?

b) Qual é a área da região branca na figura II?

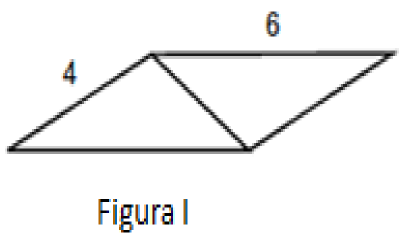
(Esse exercício encontra-se na Prova da OBMEP - 2ª Fase, 2012 – Nível 2 – Questão 2).

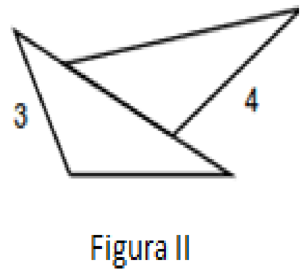
QUESTÃO 2. Na figura a seguir, ABC, CDE e EFG são triângulos equiláteros de área igual a 60 cm^2 cada. Se os pontos A, C, E e G são colineares, determine a área do triângulo sombreado AFC.



(Esse exercício encontra-se na apostila do PIC – OBMEP - "Encontros de Geometria", pág. 116, ex. 2).

QUESTÃO 3. Miguilim brinca com dois triângulos iguais cujos lados medem 3 cm, 4 cm e 6 cm. Ele forma figuras planas unindo um lado de um triângulo com um lado do outro, sem que um triângulo fique sobre o outro. Abaixo vemos duas das figuras que ele fez.





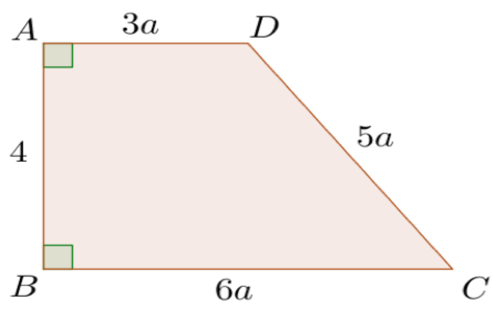
a) Quais os comprimentos dos lados que foram unidos nas Figuras I e II?

b) Calcule os perímetros das Figuras I e II.

c) Qual o menor perímetro de uma figura que Miguilim pode formar? Desenhe duas figuras que ele poderá formar com este menor perímetro.

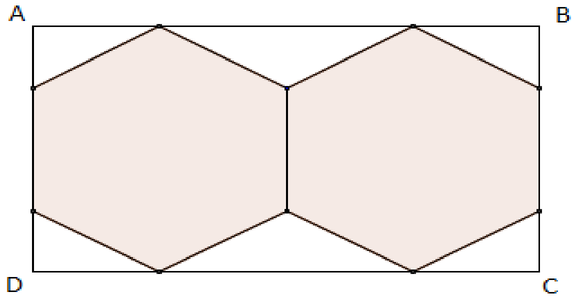
(Esse exercício encontra-se na apostila do PIC – OBMEP - “Encontros de Geometria”, pág. 91, ex. 3).

QUESTÃO 4. Considere o trapézio ABCD, conforme figura a seguir, em que os ângulos dos vértices A e B são retos. Sabendo que a medida de $\overline{AB}$ é 4 cm e que as medidas dos demais lados, em cm, são dados em função da constante fixa *a* (ver figura). Determine a medida do segmento $\overline{BD}$.



Sugestão: Construa uma reta auxiliar paralela à AB e utilize o teorema de Pitágoras.

QUESTÃO 5. Dentro do retângulo ABCD "cabem" exatamente dois hexágonos regulares como na figura a seguir.

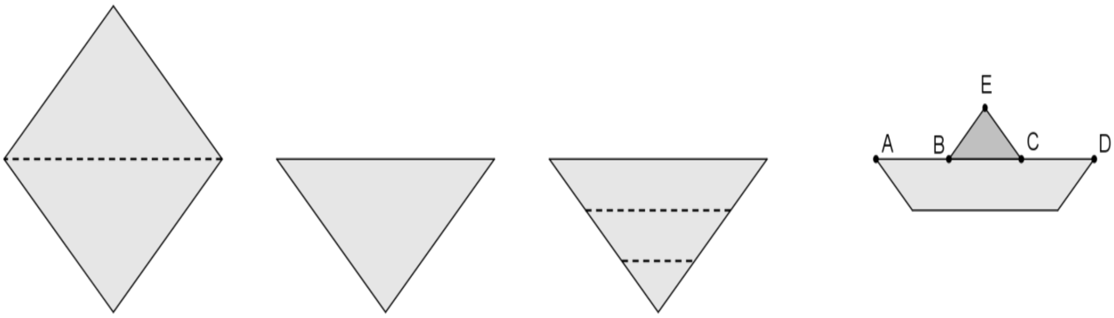


Se o retângulo tem 96 cm² de área, qual é a área sombreada, que é igual a soma das áreas dos dois hexágonos?

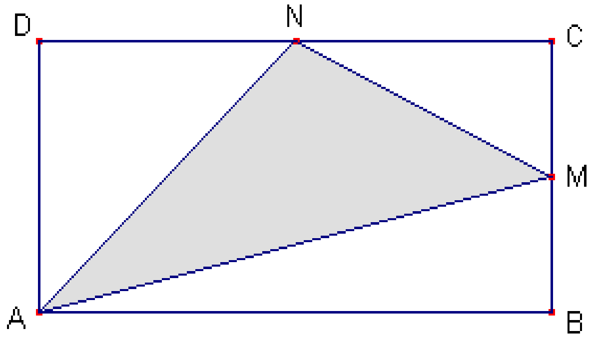
Sugestão: Construa um ladrilhamento do retângulo por triângulos, através da construção de segmentos paralelos aos lados do retângulo e do hexágono.

QUESTÃO 6. Para fazer o perfil de um barquinho, começamos dobrando uma folha quadrada de papel ao meio, obtendo um triângulo. Depois marcamos dobras de modo que a altura do triângulo fica divida em três partes iguais e, finalmente dobramos na primeira marca para cima, conforme esquema da figura a seguir. Os segmentos AB, BC, CD possuem a mesma medida e o triângulo BCE tem 2 cm^2 de área.

Qual é a medida do lado da folha quadrada inicial em cm?



QUESTÃO 7. Na figura a seguir M e N são pontos médios dos lados de um retângulo. A área do triângulo sombreado AMN é igual a qual fração da área do retângulo ABCD?



QUESTÃO 8. Qual é a área da região hachurada dentro do quadrado maior a seguir, usando como unidade a área de um quadradinho? Qual é o perímetro da figura? Quantos quadradinhos podem ser acrescentados à figura de modo a obter o máximo de área sem alterar o perímetro?