Questão 1: Decida se a afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta:

"A soma de dois inteiros ímpares consecutivos é divisível por 4."

Resolução: Queremos verificar se dados dois inteiros ímpares consecutivos $2b+1$, e $2b+3$, onde $b \epsilon Z$, sua soma é divisível por 4. Temos $(2b+1)$+ $(2b+3) = 4b+4 = 4(b+1)$. Assim, como $(b+1) \epsilon Z$, temos que esta soma é divisível por 4. Portanto esta afirmação é verdadeira.

Questão 2: A soma de todos os números ímpares de três algarismos menos a soma de todos os números pares de três algarismos é um número par ou ímpar? Justifique sua resposta calculando esse número.

Solução: A quantidade de números pares e ímpares no intervalo [100,999] é $999 - 100 + 1 = 900$, logo teremos 450 números pares e 450 números ímpares. Seja $x = 101 + 103 + 105 + 107 + \ldots + 997 + 999$ e $y = 100 + 102 + 104 + 106 + \ldots + 996 + 997$. Portanto a diferença $x - y = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = 450$. Ou seja, PAR.

Questão 3: Considere a representação dos números naturais nas diversas bases. Utilize seu conhecimento sobre bases numéricas para avaliar qual número é maior em cada um dos itens abaixo:

a) $((10)_2)^{300}$ ou $((10)_3)^{200}$
b) $((10)_2)^{40}$ ou $((11)_2)^{18} \times ((10)_3)^{10}$
c) $((221)_3)^{22}$ ou $((100)_2)^{53}$
d) $((220)_4)^{27}$ ou $((2)_{10})^{135}$
e) $((21)_{11})^{20}$ ou $((111)_3)^{27}$

Solução: Primeiramente, observamos que o problema acima é equivalente a resolver os seguintes problemas em base 10.

a) 2^{300} ou 3^{200}
b) 2^{40} ou 3^{28}
c) 5^{44} ou 4^{53}
d) 40^{27} ou 2^{135}
e) 23^{20} ou 13^{27}

Analisando cada um dos itens:

a) $2^{300} = ((2)^3)^{100} = 8^{100} < 9^{100} = (3^2)^{100} = 3^{200}$
b) $2^{40} = (2^3)10 \times (2^3)^3 \times 2 < 9^{10} \times (3^2)^3 \times 3^2 = 3^{28}$
c) $4^{53} = 4^{52} \times 4 = (4^2)^{26} \times 4 > (3 \times 5)^{26} \times 4 = 3^{26} \times 5^{26} \times 4 = (3^3)^8 \times 3^2 \times 5^{26} \times 4 > (5^2)^8 \times 3^2 \times 5^{26} \times 4 > 5^{42} \times 3^2 \times 4 > 5^{42} \times 5^2 = 5^{44}$
d) $40^{27} = (4 \times 10)^{27} = 2^{54} \times 2^{27} \times 5^{27} = 2^{81} \times 5^{26} \times 5 > 2^{81} \times 4^{26} \times 4 = 2^{135}$

e) $23^{20} < 26^{20} = (2 \times 13)^{20} = 2^{20} \times 13^{20} = (2^3)^6 \times 2^2 \times 13^{20} < 13^6 \times 13 \times 13^{20} = 13^{27}$

Logo, os itens apresentados podem ser reescritos da seguinte forma:

a) $((10)_2)^{300} < ((10)_3)^{200}$
b) $((10)_2)^{40} < ((11)_2)^{18} \times ((10)_3)^{10}$
c) $((221)_3)^{22} < ((100)_2)^{53}$
d) $((220)_4)^{27} > ((2)_{10})^{135}$
e) $((21)_{11})^{20} < ((111)_3)^{27}$

Questão 4: Seja $x = 201$ na base 3. Efetue x^2, na mesma base.

Resolução: Na base 3, temos $x^2 = (201)^2 = (2 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 1 \times 3^0)^2 = (2 \times 3^2 + 1 \times 3^0)^2 = (2 \times 3^2)^2 + 2 \times (2 \times 3^2) \times 1 + (1 \times 3^0)^2 = 4 \times 3^4 + 4 \times 3^2 + 1 \times 3^0 = (3 + 1) \times 3^4 + (3 + 1) \times 3^2 + 1 \times 3^0 = 3 \times 3^4 + 1 \times 3^4 + 3 \times 3^2 + 1 \times 3^2 + 1 \times 3^0 = 1 \times 3^5 + 1 \times 3^4 + 1 \times 3^3 + 1 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 1 \times 3^0 = 111101.$