

CÁLCULO DO mdc : ALGORITMO DE EUCLIDES

Propriedade: *Sejam a e b números naturais com $a < b$.*

a) Se d é um divisor comum de a e de b , então d também é divisor de $b - a$.

b) Se d é um divisor de a e de $b - a$, então d é um divisor de b .

c) Se d é um divisor comum de a e de b , então d também é um divisor de $a + b$.

Exemplos:

1) Consideremos os números 84 e 35. Temos que 7 é divisor de ambos. Ainda, $84 - 35 = 49$ e $84 + 35 = 119$ também são divisíveis por 7.

2) O número 4 é um divisor de 20 e de 48. Consequentemente, é divisor de $48 - 20 = 28$ e de $48 + 20 = 68$.

Observação: Os divisores comuns de a e de b são iguais aos divisores comuns de a e de $b - a$.

Exemplo: Se $a = 18$ e $b = 60$ calcule os conjuntos $D(a)$, $D(b)$ e $D(b - a)$ dos divisores de a , de b e de $b - a$. Em seguida, calcule $D(a) \cap D(b)$ e $D(a) \cap D(b - a)$.

Propriedade: *Se a e b são números naturais com $a < b$, então $mdc(a, b) = mdc(a, b - a)$.*

Exemplos:

1) Calcule $mdc(18, 60)$.

Solução:

$$\begin{aligned} \text{mdc}(18, 60) &= \text{mdc}(18, 60 - 18) = \text{mdc}(18, 42) = \text{mdc}(18, 42 - 18) = \\ &= \text{mdc}(18, 24) = \text{mdc}(18, 24 - 18) = \text{mdc}(18, 6) = 6 \end{aligned}$$

2) Calcule $\text{mdc}(459, 595)$.

Solução:

$$\begin{aligned} \text{mdc}(459, 595) &= \text{mdc}(459, 595 - 459) = \text{mdc}(459, 136) = \\ &= \text{mdc}(136, 459) = \text{mdc}(136, 459 - 136) = \text{mdc}(136, 323) = \\ &= \text{mdc}(136, 323 - 136) = \text{mdc}(136, 187) = \text{mdc}(136, 187 - 136) = \\ &= \text{mdc}(136, 51) = \text{mdc}(51, 136) = \text{mdc}(51, 136 - 51) = \\ &= \text{mdc}(51, 85) = \text{mdc}(51, 85 - 51) = \text{mdc}(51, 34) = \\ &= \text{mdc}(34, 51) = \text{mdc}(34, 51 - 34) = \text{mdc}(34, 17) = 17 \end{aligned}$$

Observação: Perceba que $\text{mdc}(18, 60)$ pode ser obtido pelo cálculo do mdc de 18 e o resto da divisão de 60 por 18. Analogamente, $\text{mdc}(51, 136)$ pode ser obtido pelo cálculo do mdc de 51 e do resto da divisão de 136 por 51.

Propriedade: Se $a < b$ são números naturais e se r é o resto da divisão de b por a , então $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(a, r)$.

Exercícios:

1) Calcule $\text{mdc}(162, 372)$.

Solução:

→ O resto da divisão de 372 por 162 é 48.

Assim, $\text{mdc}(162, 372) = \text{mdc}(162, 48)$.

→ O resto da divisão de 162 por 48 é 18.

Assim, $\text{mdc}(162, 372) = \text{mdc}(162, 48) = \text{mdc}(48, 18)$.

→ o resto da divisão de 48 por 18 é 12.

Assim, $\text{mdc}(162, 372) = \text{mdc}(162, 48) = \text{mdc}(48, 18) = \text{mdc}(18, 12)$.

→ O resto da divisão de 18 por 12 é 6.

Assim, $\text{mdc}(162, 372) = \text{mdc}(162, 48) = \text{mdc}(48, 18) = \text{mdc}(18, 12) = \text{mdc}(12, 6) = 6$

Portanto, $\text{mdc}(162, 372) = 6$.

2) Calcule $\text{mdc}(339, 1407)$.

3) Calcule $\text{mdc}(2282, 7063)$.