Soluções das Questões – 1º SIMULADO – Nível 3

QUESTÃO 1

a) A solução é feita em seis passos, assinalado cada um deles em vermelho.

1º passo

1	2		
3	4		
	3	1	
			2

2º passo

1	2		
3	4	2	
	3	1	
	1		2

3º passo

1	2		
3	4	2	1
	3	1	4
	1		2

4º passo

1	2		3
3	4	2	1
2	3	1	4
			2

5º passo

1	2	4	3
3	4	2	1
2	3	1	4
4	1		2

6º passo

1	2	4	3
3	4	2	1
2	3	1	4
4	1	3	2

b) Não. No quadradinho assinalado com X não podemos colocar nem o 3 nem o 4 porque a 2ª linha já contém esses números. Por outro lado também não podemos colocar nem 1 nem 2 porque a última coluna já contém esses números.

1	2		
3	4		X
			2
			1

c) De acordo com o item (b), temos quatro opções para preencher o quadrado D, que são

3	4
2	1

4	3
2	1

2	3
4	1

2	4
3	1

Como no item (b), vemos que opção sombreada não é possível, uma vez que não teremos como preencher o quadradinho assinalado com X.

1	2		
3	4		
	X	3	1

Logo, para preencher o quadrado D só restam as 3 opções

2	3
4	1

3	4
2	1

4	3
2	1

Uma vez preenchido o quadrado D, os quadrados B e C podem ser preenchidos de modo único. Logo, temos 3 maneiras para completar o quadrado original, que são

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

1	2	4	3
3	4	1	2
2	1	3	4
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

d) Para preencher o quadrado A, na ordem crescente 1, 2, 3 e 4 temos a seguinte situação:

- podemos colocar o 1 em qualquer das 4 posições;
- colocado o 1, temos 3 posições para o 2;
- colocados o 1 e o 2, temos 2 posições para o 3;
- colocados o 1, o 2 e o 3 temos apenas uma posição para o 4.

Logo, o quadrado A pode ser preenchido de $4\times 3\times 2\times 1 = 24$ maneiras.

Preenchido o quadrado A, vamos agora preencher o quadrado D:

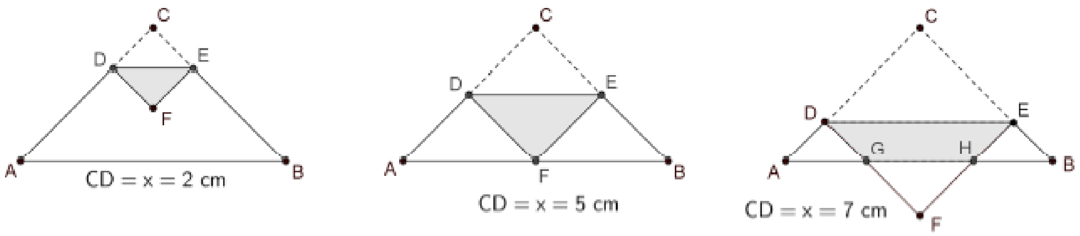
- podemos colocar o 1 em qualquer das 4 casas;
- uma vez colocado o 1, usando o mesmo argumento que no item (c), vemos que existem 3 meneiras de completar o quadrado D.

Logo, temos $24\times 4\times 3 = 288$ modos de preencher os quadrados A e D. Sabemos que, estando esses dois quadrados preenchidos, só temos uma maneira de preencher os quadrados B e C. Logo, o número total de quadrados especiais é 288.

QUESTÃO 2

Para simplificar a exposição, vamos indicar a área de uma figura colocando seu nome entre parêntesis; por exemplo, (ABC) denota a área do triângulo ABC (em cm^2).

a) A figura abaixo ilustra as situações $x=2$, $x=5$ e $x=7$; nelas F representa a posição de C após a dobra.

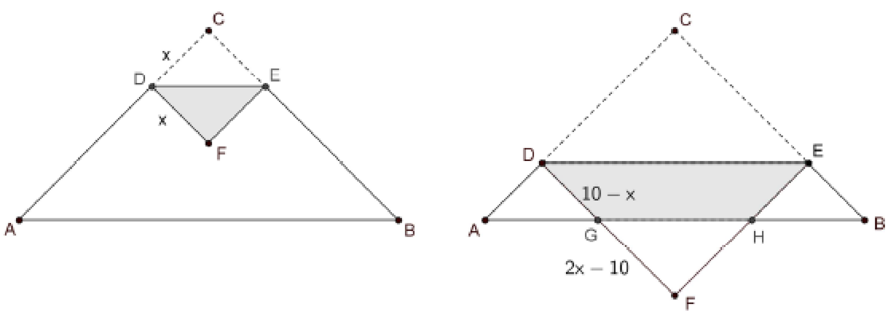


Como o triângulo ABC é retângulo em C e a dobra é paralela ao lado AB, segue que $CDFE$ é um quadrado de lado $CD = x$ cm; a área do triângulo DEF é metade da área do quadrado $CDFE$. Temos $(CDFE)=x^2$ e então $(DEF)=\dfrac{x^2}{2}$.

Para $x=2$ o triângulo DEF representa a região de sobreposição, logo, $f(2)=\dfrac{2^2}{2}=2$; analogamente, temos $f(5)=\dfrac{25}{2}$.

No caso $x=7$, a área de sobreposição, representada pelo trapézio $DEHG$, é igual a $(DEF)-(GHF)$. O triângulo ADG é isósceles com $AD=DG=3$ cm; como $DF=7$ temos $GF=4$. Logo $(DEHG)=(DEF)-(GHF)=\dfrac{7^2}{2}-\dfrac{4^2}{2}=\dfrac{33}{2}$ cm^2, ou seja, $f(7)=\dfrac{33}{2}$.

b) A figura abaixo, à esquerda, ilustra a região de sobreposição para $0<x\le 5$; à direita temos a região de sobreposição para $5<x<10$.



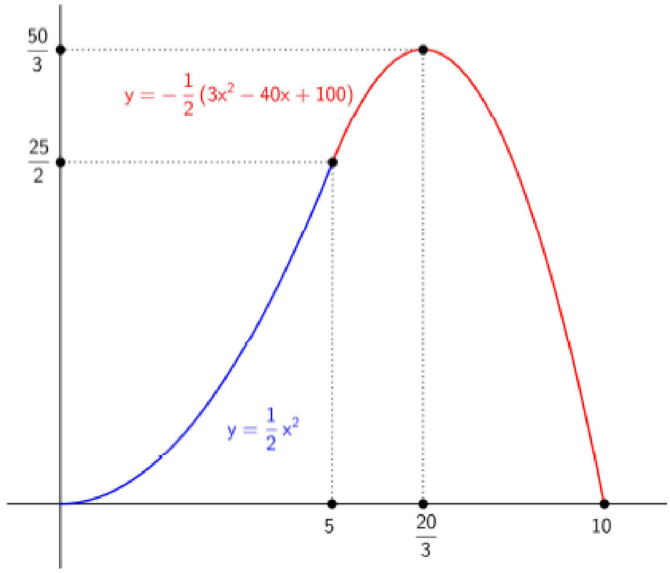
No primeiro caso, *CDFE* é um quadrado de lado x e a área de *DEF* é metade da área desse quadrado, ou seja, $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$. No segundo caso, o triângulo *ADG* é isósceles com $AD=DG=10-x$; logo $GF=DF-DG=x-(10-x)=2x-10$ e temos $f(x)=(DEHG)=(DEF)-(GHF)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{(2x-10)^2}{2}=\dfrac{1}{2}(-3x^2+40x-100)$.

Pode-se também calcular

$$(DEGH)=(ABC)-(DEC)-(ADG)-(EBH)=(ABC)-(DEC)-2(ADG);$$

deixamos esse cálculo para o(a) leitor(a).

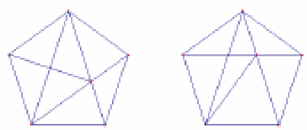
c) O gráfico de f aparece abaixo.



d) Observamos primeiro que $-\dfrac{1}{2}(3x^2-40x+100)=-\dfrac{1}{2}(3x-10)(x-10)$; essa fatoração pode ser obtida a partir das raízes de $3x^2-40x+100$, que são $\dfrac{10}{3}$ e 10.

Quando $0<x\le 5$ o maior valor de $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$ é $f(5)=\dfrac{25}{2}$. Por outro lado, quando $5<x<10$ o maior valor de $f(x)=-\dfrac{1}{2}(3x-10)(x-10)$ é atingido no vértice da parábola, cuja abscissa é o ponto médio das raízes, ou seja, é $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{10}{3}+10\right)=\dfrac{20}{3}$; temos $f\left(\dfrac{20}{3}\right)=\dfrac{50}{3}$. Como $f(5)=\dfrac{25}{2}<\dfrac{50}{3}=f\left(\dfrac{20}{3}\right)$, o maior valor possível da área de sobreposição é $\dfrac{50}{3}$.

QUESTÃO 3 (a) A figura à direita mostra duas soluções para o problema.



(b) *1ª solução*: A figura do enunciado mostra que ao traçar as cinco diagonais do pentágono obtemos 10 triângulos e um novo pentágono central. A repetição desse processo n vezes (pensamos na repetição de 0 vezes como não tendo feito nada) tem como resultado $10n$ triângulos e um pentágono central, que podemos dividir em 3, 5, 7, 9, ou 11 triângulos como mostrado no enunciado. Desse modo, podemos triangular legalmente o pentágono em $10n+r$ triângulos onde r pode ser 1, 3, 5, 7 ou 9; como qualquer número ímpar se escreve dessa forma segue que podemos triangular legalmente o pentágono em qualquer número ímpar de triângulos. Por exemplo, para triangular legalmente o pentágono em 229 triângulos escrevemos $229=10\times 22+9$, efetuamos o processo de divisão por diagonais 10 vezes e finalmente dividimos o pentágono central em 9 triângulos.

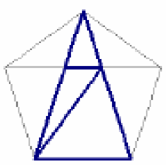


Figura I

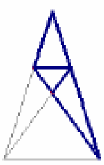
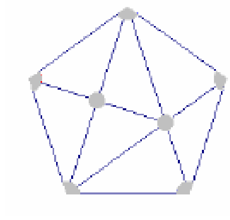


Figura II

2ª solução: a figura I à esquerda mostra uma divisão do pentágono em sete triângulos, onde destacamos uma parte em traço mais grosso. Podemos dividir legalmente essa parte de modo a gerar dois triângulos adicionais, como na figura II. Esse processo pode ser repetido na parte análoga destacada nessa última figura, gerando mais dois triângulos e outra figura análoga onde o processo pode ser repetido novamente, e assim por diante gerando dois novos triângulos em cada etapa. Isso mostra que, começando de uma triangulação com 7 triângulos, podemos obter qualquer número ímpar de triângulos.

(c) *1ª solução*: consideremos um pentágono triangulado legalmente, e sejam n o número de triângulos e m o número de pontos legais interiores dessa divisão. A soma dos ângulos de todos os triângulos é $180n$ graus. Por outro lado, essa soma é igual à soma dos ângulos em volta dos pontos legais interiores mais a soma dos ângulos internos do pentágono, ou seja, é igual a $360m+540$ graus. Logo $180n = 360n + 540$, ou seja, $n = 2m+3$ que é um número ímpar.



Exemplificamos essa demonstração com a figura ao lado, onde $n = 7$ e $m = 2$.

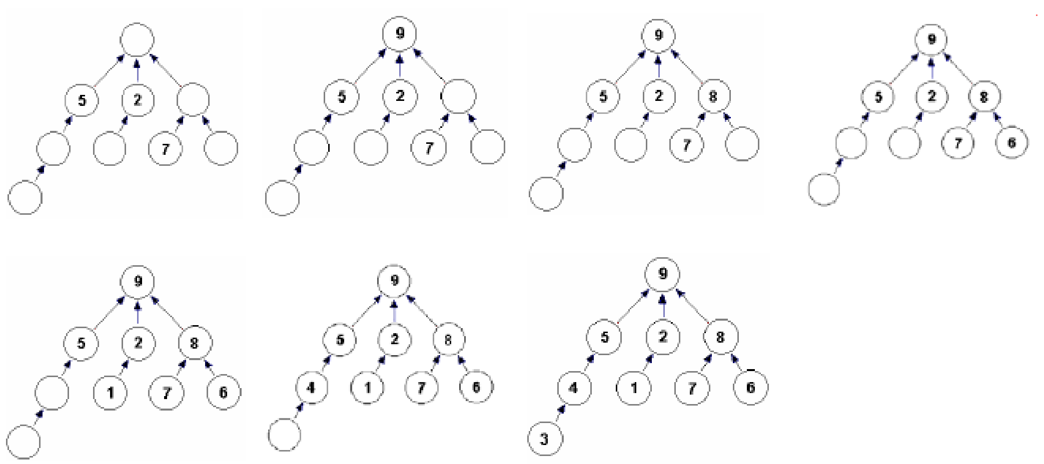
2ª solução: consideremos como acima um pentágono triangulado legalmente em n triângulos, e seja m o número total de lados desses triângulos. Ao contar os lados desses triângulos um por um, teremos dois casos: (i) contar um lado comum a dois triângulos e (ii) contar um dos lados do pentágono. No primeiro caso, cada lado é contado duas vezes; no segundo caso temos apenas os lados do pentágono. Obtemos então $m = \frac{3n-5}{2} + 5$; como m e n são números inteiros segue que $\frac{3n-5}{2}$ também é inteiro, ou seja, $3n-5$ é par, donde n é ímpar. A figura usada na solução anterior exemplifica essa demonstração no caso $n = 7$ e $m = 13$.

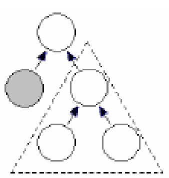
QUESTÃO 4

a) Só existe uma maneira de preencher o diagrama, como mostramos a seguir.

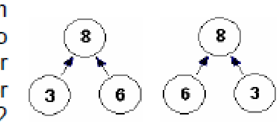
- O número 9 não pode ficar abaixo de nenhum número, logo deve ficar no topo.
- Acima do número 7 só podemos colocar o 9 e 8. Como o 9 já está no topo, o 8 ficará acima do 7.
- O número 6 não pode ficar abaixo do 5 nem do 2, logo ficará abaixo do 8 , ao lado do 7.
- O número 1 é o único que pode ficar abaixo do 2.
- Os números 3 e 4 devem ficar abaixo do 5, com o 3 debaixo do 4.

A seqüência de figuras a seguir ilustra as etapas deste raciocínio.





b) *1ª solução*: Primeiro vamos examinar o diagrama menor de três bolinhas marcadas pelo triângulo pontilhado, à esquerda. Para que ele fique bem preenchido com quaisquer três números positivos distintos, o maior número deve ficar no topo e os outros dois poderão ser colocados nos dois círculos de baixo de 2 maneiras diferentes. Por exemplo, se os números forem 3, 6 e 8, podemos dispô-los das 2 maneiras ilustradas à direita.



Para que o diagrama completo do problema fique bem preenchido com os números de 1 a 5, o 5 deve ficar no topo. A casa sombreada pode ser preenchida com qualquer número de 1 a 4. As três casas restantes, marcadas com o triângulo pontilhado, formam o diagrama analisado acima e poderão então ser preenchidas de 2 maneiras, com os três números restantes. Resumindo, podemos preencher o diagrama do seguinte modo:

- preenchemos o círculo do topo com o 5: 1 possibilidade;
- preenchemos a casa sombreada com 1, 2, 3 ou 4 : 4 possibilidades;
- preenchemos as três casas que faltam com os três algarismos restantes: 2 possibilidades.

Logo o diagrama pode ser preenchido de $1\times 4\times 2=8$ maneiras diferentes. Notamos que este raciocínio se aplica para quaisquer cinco números positivos distintos. Isto será importante na resolução do próximo item.

2ª solução: Notamos primeiro que o 5 deve sempre ocupar a bolinha de cima. O 4 deve então ocupar uma das duas bolinhas abaixo do 5, e então

- se o 4 ocupar a bolinha sombreada, o 3 deve ocupar a outra bolinha abaixo do 5, e o 1 e o 2 podem ser colocados de duas maneiras diferentes nas duas bolinhas que sobram; temos duas possibilidades neste caso;
- se o 4 ocupar a outra bolinha abaixo do 5, a casa sombreada pode ser ocupada por qualquer dos números de 1 a 3, e os outros dois números podem ser colocados nas duas últimas bolinhas vazias; neste caso temos $3\times 2=6$ possibilidades.

Deste modo, o número de maneiras de preencher o diagrama é $2+6=8$.

QUESTÃO 5

a) O valor da área de cada painel é igual ao total de lâmpadas vermelhas que o mesmo usa. Logo, em um painel de 5 metros por 8 metros há $5\times 8=40$ lâmpadas vermelhas.

b) Um painel de 5 metros por 8 metros contém 6 linhas horizontais e 9 linhas verticais, que formam entre si $6\times 9=54$ interseções. De acordo com o enunciado, em cada uma dessas interseções é colocada uma lâmpada azul; logo há 54 lâmpadas azuis.

c) *1ª solução*: Em um painel de m metros por n metros, o número de lâmpadas azuis que há na borda coincide com o valor do seu perímetro, que é igual a $2(m+n)$. Por argumentos análogos aos usados nos itens (a) e (b), vemos que este painel usa $mn=72$ lâmpadas vermelhas e $(m+1)(n+1)=90$ lâmpadas azuis. Da última igualdade segue que $mn+(m+n)+1=90$ e então temos $m+n=90-mn-1=90-72-1=17$. Assim, o número de lâmpadas azuis que estão na borda do painel é $2(m+n)=2\cdot 17=34$.

2ª solução: A área do painel é 72 (total de lâmpadas vermelhas), assim as possíveis dimensões do painel são as seguintes (em metros): 1×72, 2×36, 3×24, 4×18, 6×12 e 8×9. A mesma argumentação usada no item (b) mostra apenas 8×9 corresponde a um painel que tem um total de 90 lâmpadas azuis, pois $90=(8+1)(9+1)$. Como o número de lâmpadas azuis que há na borda coincide com o valor do perímetro do painel, temos então que há $2(8+9)=34$ lâmpadas azuis na borda do painel.

QUESTÃO 6

a) Seja n a distância a ser percorrida por Adonis e Basílio. O algoritmo da divisão de Euclides nos permite escrever $n=8a+r=7b+s$ onde $0\leq r\leq 7$ e $0\leq s\leq 6$; segue que $A(n)=a+r$ e $B(n)=b+s$. Por exemplo, $14=8\times 1+6=7\times 2+0$, donde $A(14)=1+6=7$ e $B(14)=2+0=2$. O restante da tabela pode ser preenchido analogamente.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$A(n)$	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	8	2
$B(n)$	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	7	2	3	4

b) Para achar um desses números, basta fazer uma tabela como a do item anterior para valores de n entre 200 e 240.

n	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213
$A(n)$	25	26	27	28	29	30	31	32	26	27	28	29	30	31
$B(n)$	32	33	34	29	30	31	32	33	34	35	30	31	32	33

n	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227
$A(n)$	32	33	27	28	29	30	31	32	33	34	28	29	30	31
$B(n)$	34	35	36	31	32	33	34	35	36	37	32	33	34	35

n	228		229	230	**231**	232	233	234	235	236	237	**238**	**239**	240
$A(n)$	32		33	34	**35**	29	30	31	32	33	34	**35**	**36**	30
$B(n)$	36		37	38	**33**	34	35	36	37	38	39	**34**	**35**	36

Essa tabela mostra que 231, 238 e 239 são os valores de n entre 200 e 240 tais que $A(n) > B(n)$. Observamos que a feitura dessa tabela não é tão trabalhosa como parece, pois o padrão dos valores de $A(n)$ e $B(n)$ é claro; por exemplo, basta calcular $A(n)$ para os múltiplos de 8 e a linha correspondente a $A(n)$ é preenchida como segue:

n	$8k$	$8k+1$	$8k+2$	$8k+3$	$8k+4$	$8k+5$	$8k+6$	$8k+7$	$8(k+1)$
$A(n)$	k	$k+1$	$k+2$	$k+3$	$k+4$	$k+5$	$k+6$	$k+7$	$k+1$

Observação análoga vale para a linha correspondente a $B(n)$.

c) Das expressões $n = 8a + r = 7b + s$ temos $A(n) = a + r = \dfrac{n-r}{8} + r = \dfrac{n+7r}{8}$ e $B(n) = b + s = \dfrac{n-s}{7} + s = \dfrac{n+6s}{7}$. Desse modo, $A(n) = B(n)$ se escreve como $\dfrac{n+7r}{8} = \dfrac{n+6s}{7}$; simplificando essa expressão chegamos a $n = 49r - 48s$. O maior valor possível para $49r - 48s$ é obtido colocando $r = 7$ e $s = 0$, ou seja, o número procurado é $d = 49 \times 7 = 343$.

Fica como exercício para o(a) leitor(a) mostrar que $A(n) < B(n)$ para $n > 343$.