Aula 01 – Ciclo 03

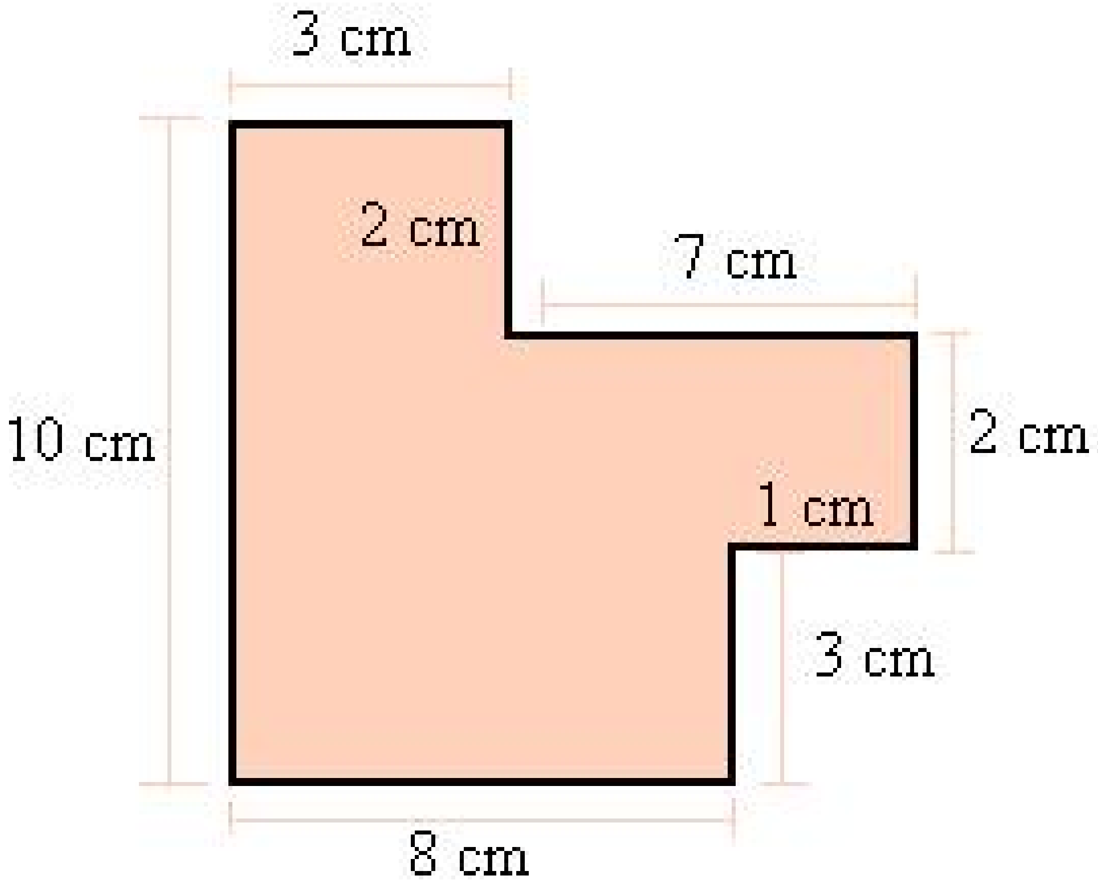
Professora Laís Pereira

EMEF Antônio Aires de Almeida

Gravataí

Área e Perímetro

Área e perímetro são duas medidas distintas, onde a área é a medida de uma superfície e o perímetro é a medida do comprimento de um contorno.



O perímetro da figura é a soma de todos os seus lados:

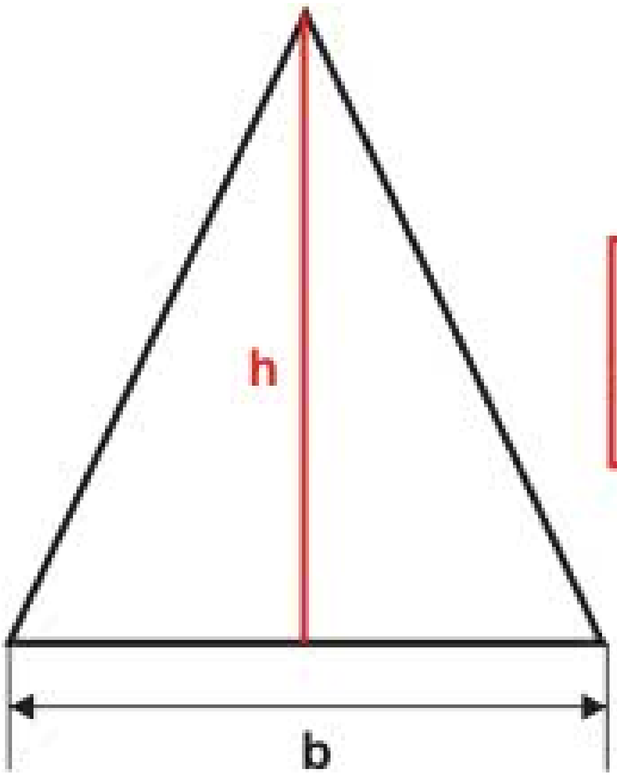
P = 10 + 8 + 3 + 1 + 2 + 7 + 2 +3

P = 36

O **metro quadrado**,
simbolizado por **m²**, é uma unidade de medida de tamanho reconhecida pelo Sistema Internacional de Unidades. A medida corresponde a um quadrado com um metro de comprimento em cada lado.

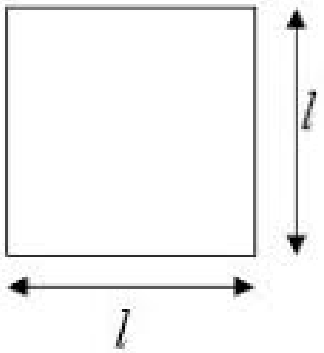
Vamos construir um metro quadrado!

Área do triângulo



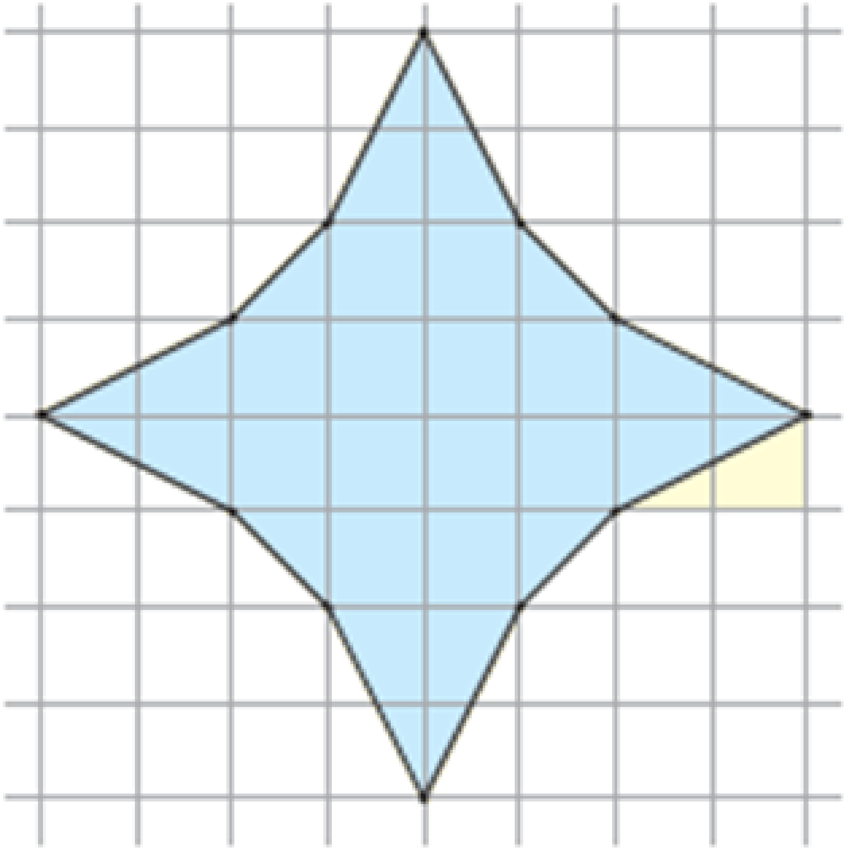
$$\boxed{\text{Área} = \frac{b.h}{2}}$$

Área do quadrado

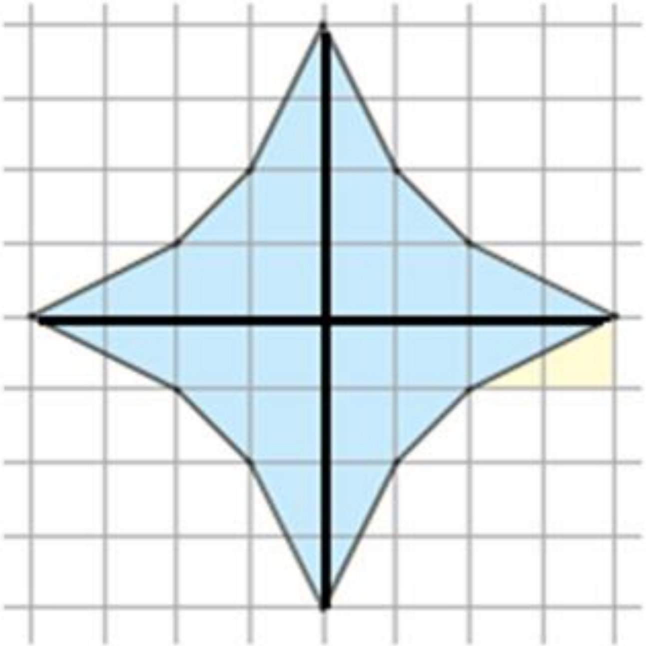


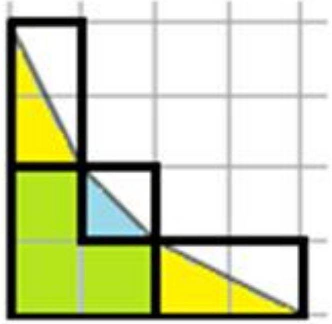
$$A_{\square} = l \cdot l \quad \rightarrow \quad A_{\square} = l^2$$

Exercício 1. A área da figura sombreada é igual à soma das áreas de quantos quadradinhos do quadriculado?

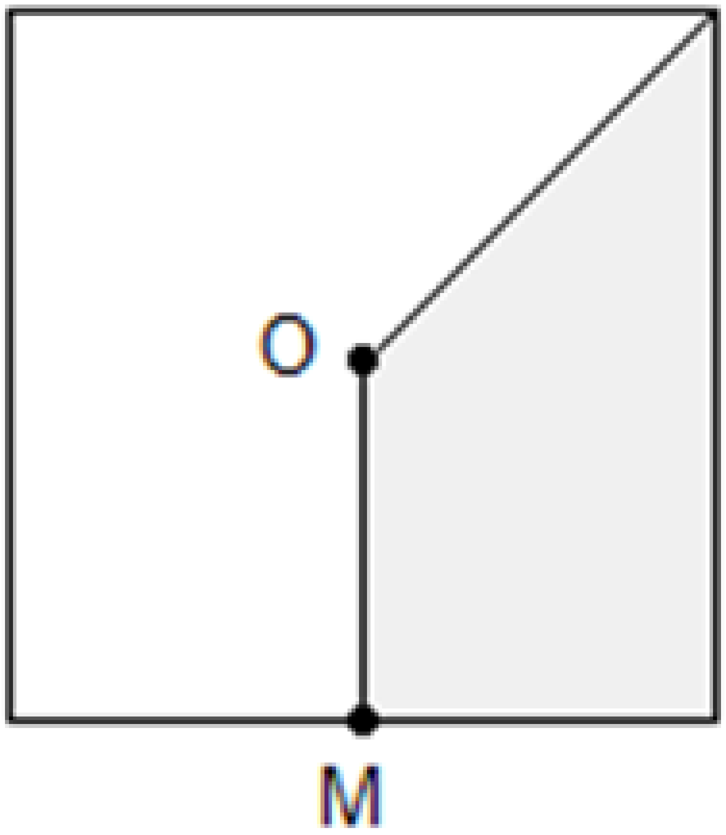


Solução do exercício 1. Podemos dividir a figura dada em quatro regiões congruentes. Observe que podemos dividir cada uma dessas quatro regiões como indicado a seguir. Esta divisão indica que esta região tem 3 quadradinhos inteiros (verdes), tem meio quadradinho azul e as duas partes amarelas podem formar dois quadradinhos. Logo a área desta região equivale a área de $3 + 0{,}5 + 2 = 5{,}5$ quadradinhos. Multiplicando por 4, vemos que a figura dada tem área igual a $4 \times 5{,}5 = 22$ quadradinhos.

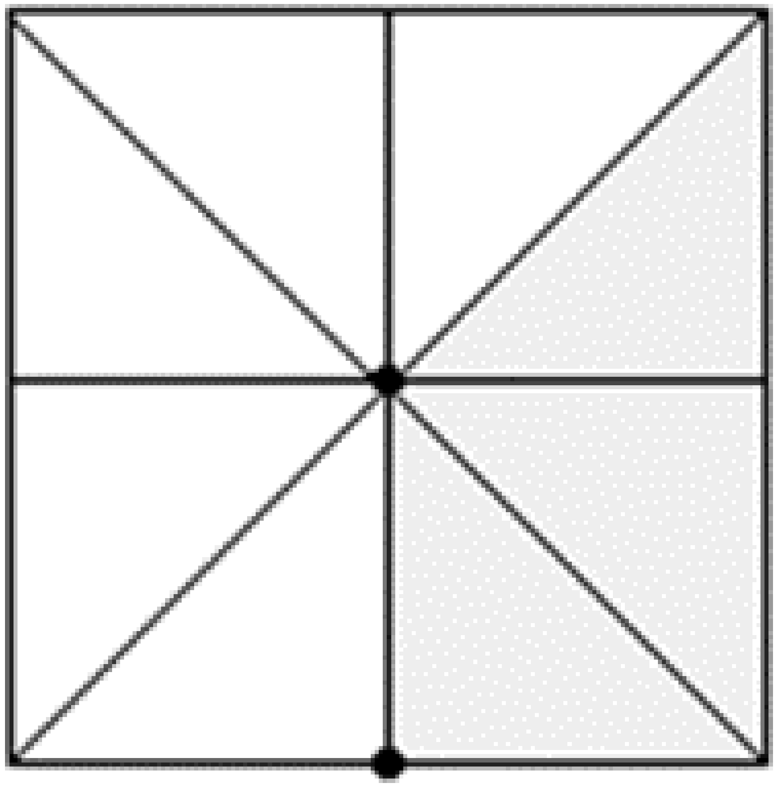




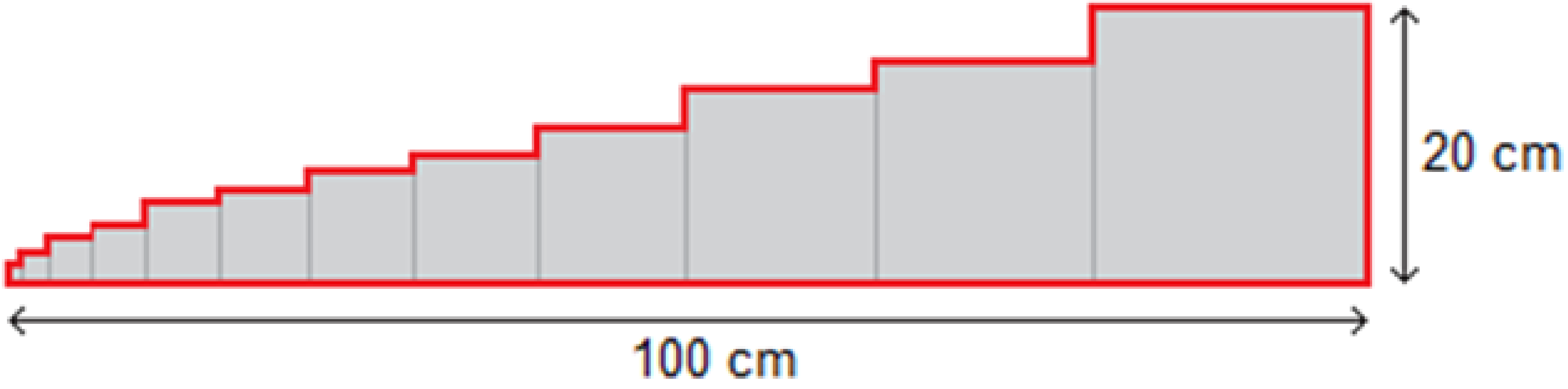
Exercício 2. A figura mostra um quadrado de centro O e área 20 cm^2. O ponto M é o ponto médio de um dos lados. Qual é a área da região sombreada?



Solução do exercício 2. A figura a seguir mostra que um quadrado pode ser dividido em 8 triângulos congruentes. Como a região sombreada corresponde a 3 desses triângulo, a sua área é igual a $3 \times \frac{20}{8} = 7{,}5$ cm².

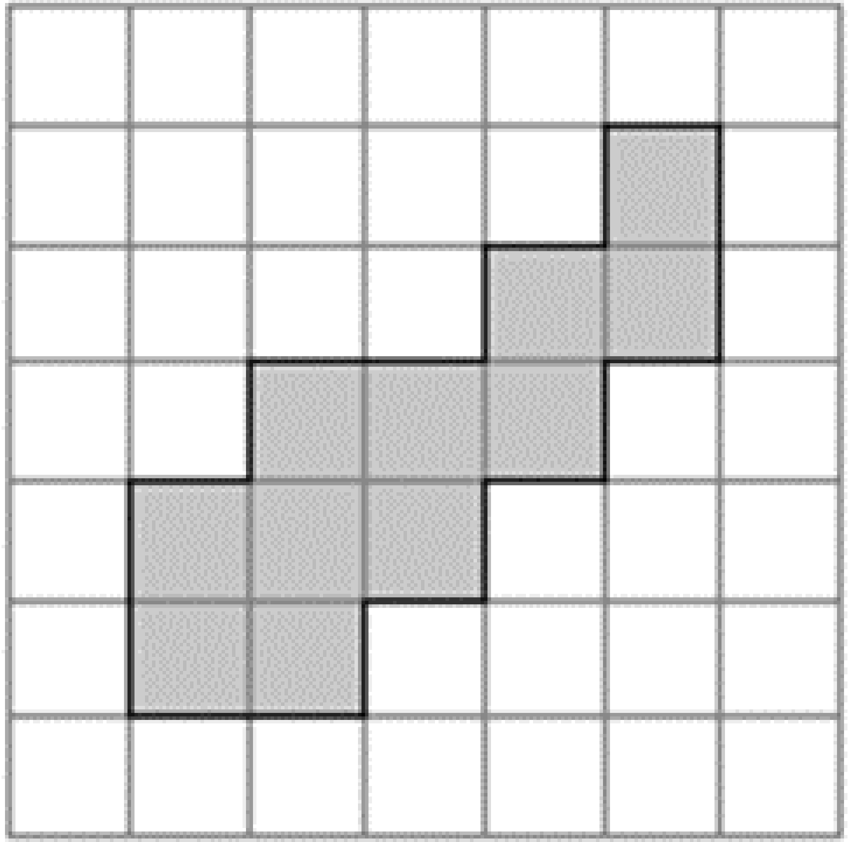


Exercício 3. Vários quadrados foram dispostos um ao lado do outro, em ordem crescente de tamanho, formando uma figura com 100 cm de base. O lado do maior quadrado mede 20 cm. Qual é o perímetro (medida do contorno em vermelho) da figura formada por esses quadrados?

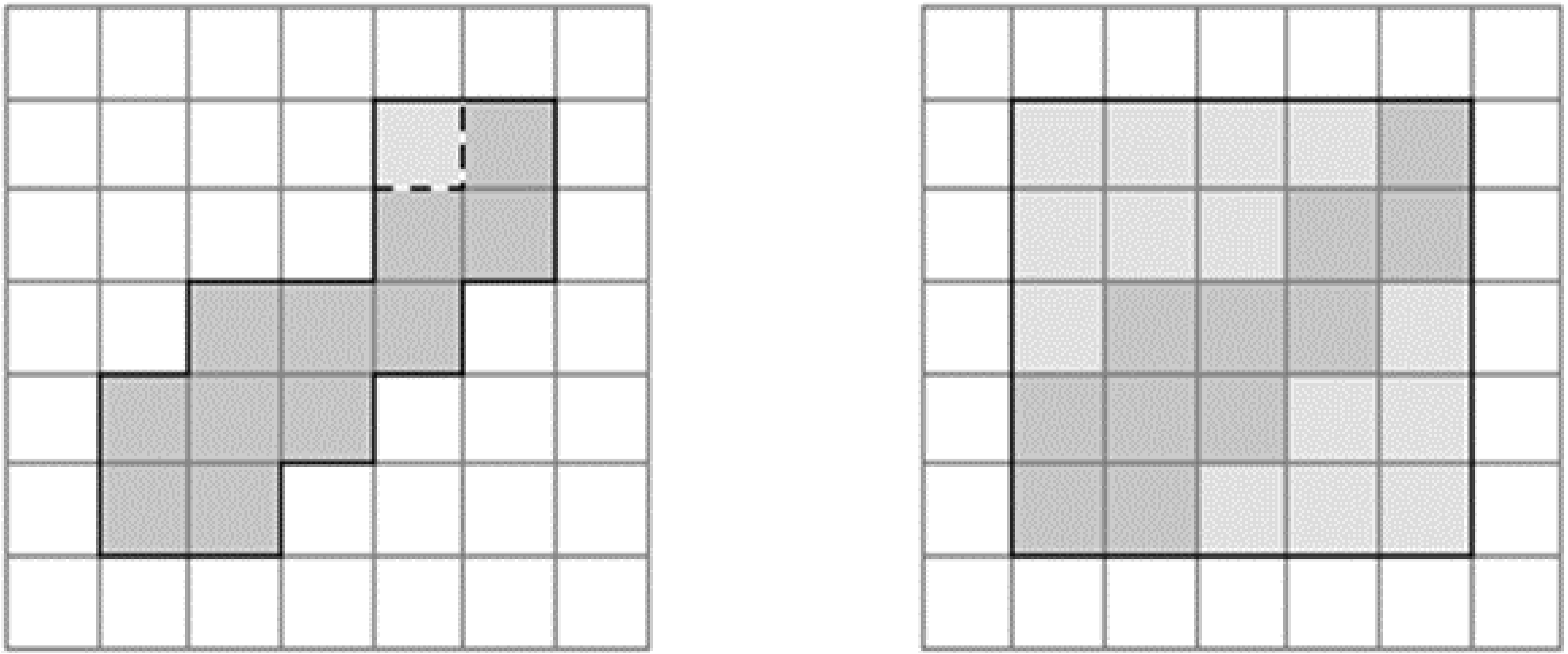


Solução do exercício 3. Para calcular o perímetro da figura, observamos que o contorno é formado por dois segmentos cujas medidas são 100 cm e 20 cm, um conjunto de segmentos horizontais (que estão acima da base de 100 cm) e um conjunto de segmentos verticais (que estão à esquerda do lado do quadrado maior de 20 cm). A soma dos comprimentos dos segmentos horizontais corresponde à soma dos comprimentos dos lados dos quadrados que foram dispostos lado a lado na parte inferior da figura, e essa soma é 100 cm. Por outro lado, a soma dos comprimentos dos segmentos verticais é igual ao comprimento do lado do quadrado maior, isto é, 20 cm. O perímetro é, portanto, 100 + 20 + 100 + 20 = 240 cm.

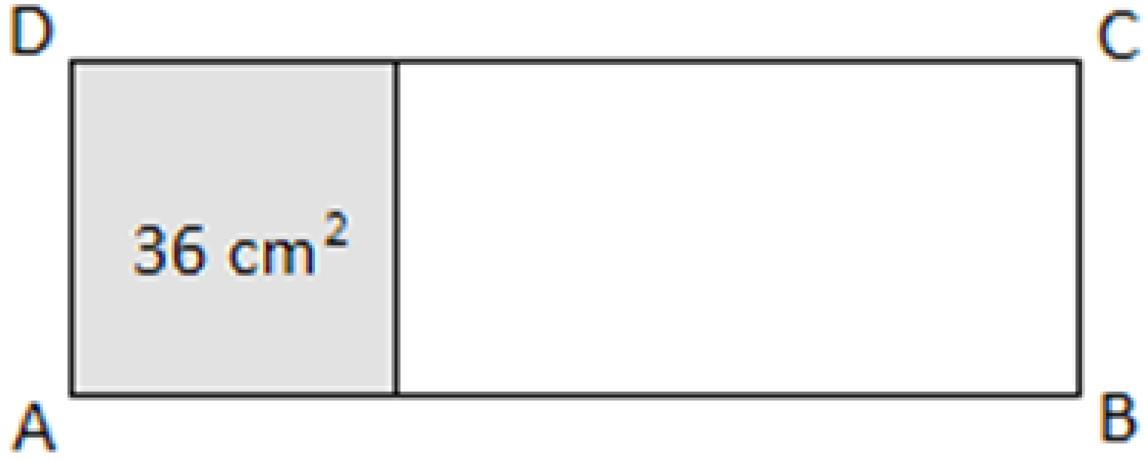
Exercício 4. A figura sombreada ao lado foi desenhada em uma malha de quadrados de lado 1 cm. Qual é a área e qual é o perímetro desta figura? Quantos quadradinhos podem ser acrescentados à figura de modo a obter o máximo de área sem alterar o perímetro?



Solução do exercício 4. Por uma contagem direta verifica-se que a figura é formada por 11 quadradinhos e que o contorno da figura é formado por 20 segmentos de comprimento 1. Daí a figura tem área 11 e perímetro 20. Analisando agora a figura a seguir à esquerda vemos que se acrescentamos um quadradinho colado na figura, aumentamos a sua área em uma unidade, mas não alteramos o seu perímetro, pois só trocamos dois segmentos (pontilhados) que já faziam parte do contorno da figura por outros dois segmentos. Podemos ir acrescentando estes quadradinhos até formar um quadrado de lado 5. Portanto, podemos acrescentar mais 14 quadradinhos na figura dada sem alterar o seu perímetro, como está indicado na figura a seguir e à direita.



Exercício 5. A região cinza na figura é um quadrado de área 36 cm^2 que corresponde a 3/8 da área do retângulo ABCD. Qual é o perímetro desse retângulo?



Solução do exercício 5. (Prova OBMEP – 2008 – N1Q8 – 1ª fase) Como a área de um quadrado de lado a é a^2 e o quadrado tem área 36 cm^2, segue que seu lado mede $AD = 6$ cm. Temos que

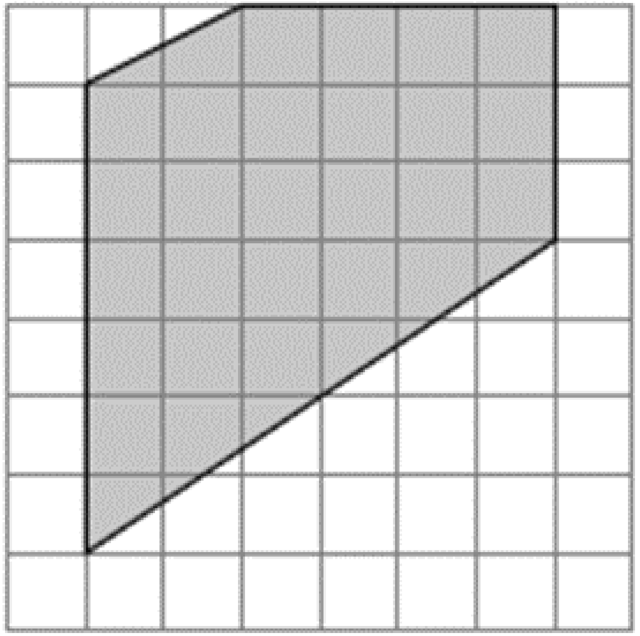
$$\frac{3}{8} \text{ área} \rightarrow 36 \text{ cm}^2$$

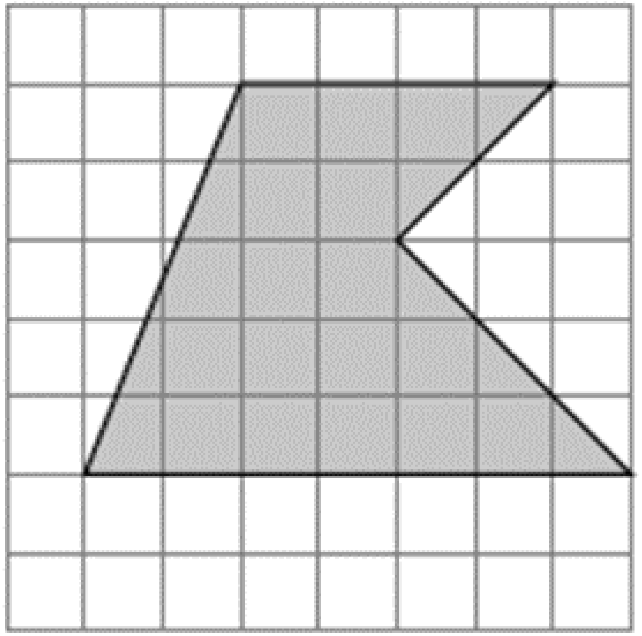
$$\frac{1}{8} \text{ área} \rightarrow 36 \div 3 = 12 \text{ cm}^2$$

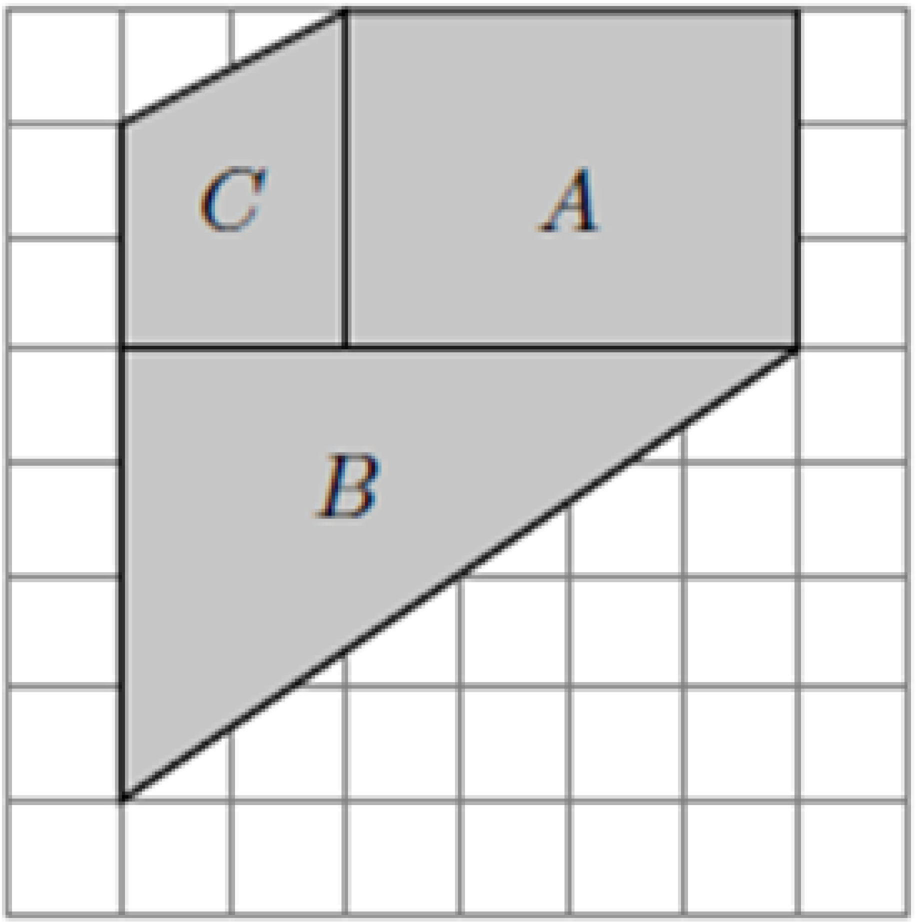
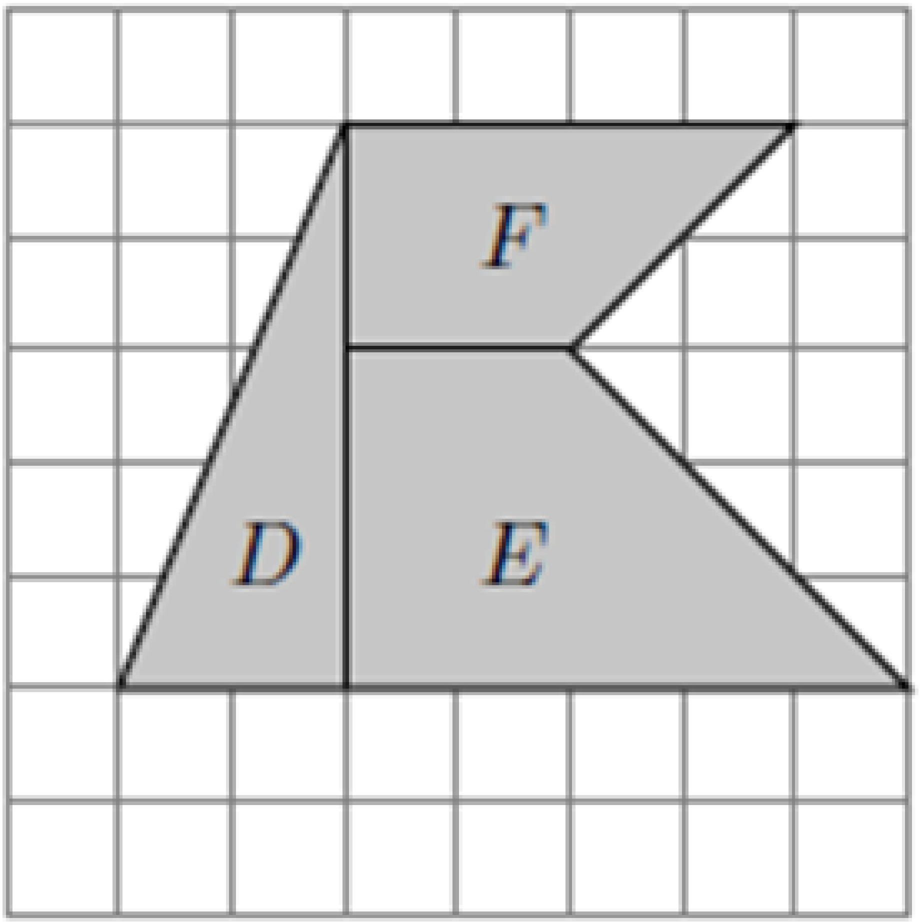
$$\frac{8}{8} \text{ área} \rightarrow 12 \times 8 = 96 \text{ cm}^2$$

Logo o retângulo $ABCD$ tem 96 cm^2 de área e sua altura AD mede 6 cm. Como a área de um retângulo é o produto da base vezes a altura, obtemos $AB \times 6 = 96$ e daí $AB = 96 \div 6 = 16$ cm. Logo o perímetro do retângulo é $2 \times (6 + 16) = 44$ cm.

Exercício 6. Decompondo em figuras geométricas mais simples, calcule a área de cada uma das seguintes figuras, desenhadas em uma malha de quadrados de lado 1.



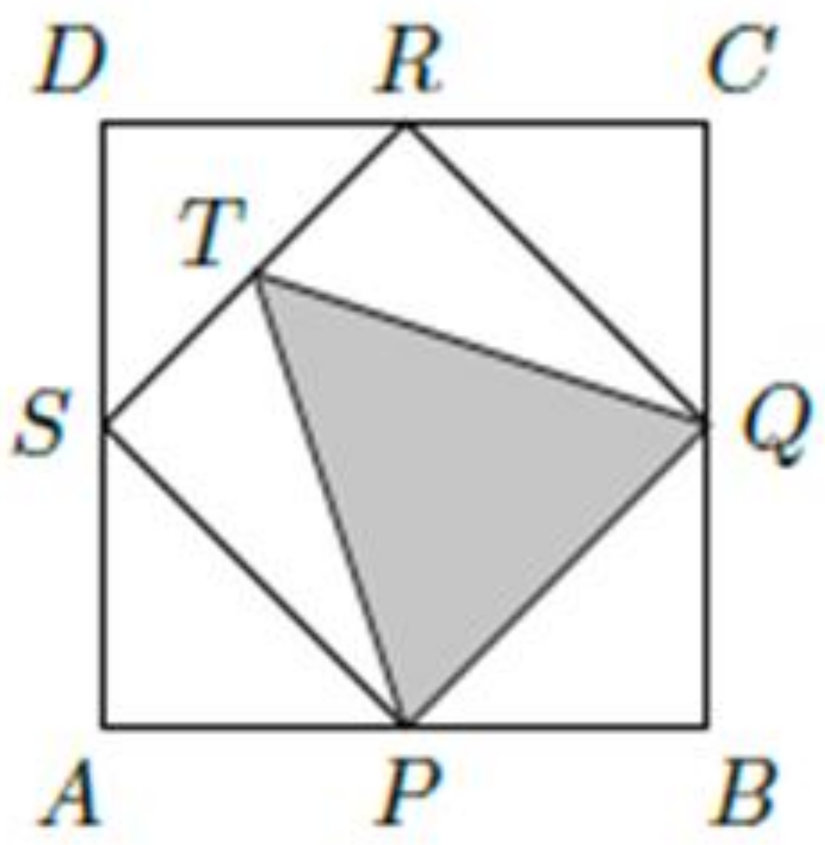



C
A
B

F
D
E

A figura da esquerda está decomposta em um retângulo A de lados 3 e 4; um triângulo retângulo B de catetos 6 e 4; e um trapézio C de bases 2 e 3 e de altura 2. Portanto, as áreas são: $\acute{a}rea\ (A) = 3 \times 4 = 12$, $\acute{a}rea\ (B) = \frac{6 \times 4}{2} = 12$ e $\acute{a}rea\ (C) = \frac{(2+3) \times 2}{2} = 5$. Deste modo, a área da figura da esquerda é 12+12+5=29.

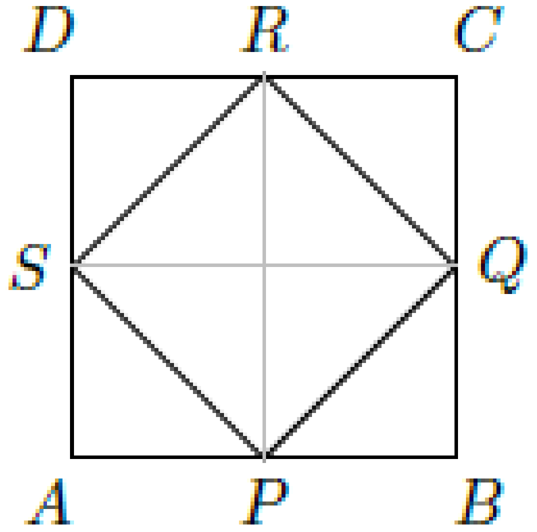
A figura da direita está decomposta em um triângulo retângulo D de catetos 2 e 5; um trapézio E de bases 5 e 2 e de altura 3; e um trapézio F de bases 2 e 4 e de altura 2. Dai $\acute{a}rea(D) = \frac{2 \times 5}{2} = 5$, $\acute{a}rea(E) = \frac{(5+2) \times 3}{2} = 10{,}5$ e $\acute{a}rea(F) = \frac{(2+4) \times 2}{2} = 6$. Deste modo, a área da figura da direita é $5 + 10{,}5 + 6 = 21{,}5$.

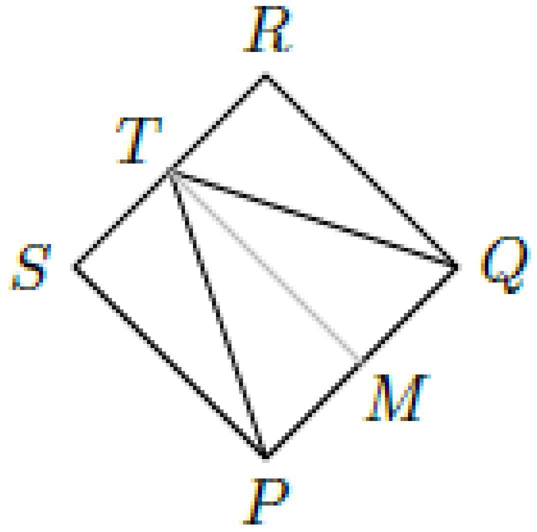
Exercício 7. Na figura, o quadrado ABCD tem área 40 cm^2. Os pontos P, Q, R e S são pontos médios dos lados do quadrado e T é o ponto médio do segmento RS. Qual é a área do quadrilátero PQRS? Qual é a área do triângulo PQT?



Solução do exercício 7. (Prova OBMEP 2009 – N1Q10 – 1ª fase) Este exercício também é exemplo 2 – página 99 – apostila encontros de geometria)

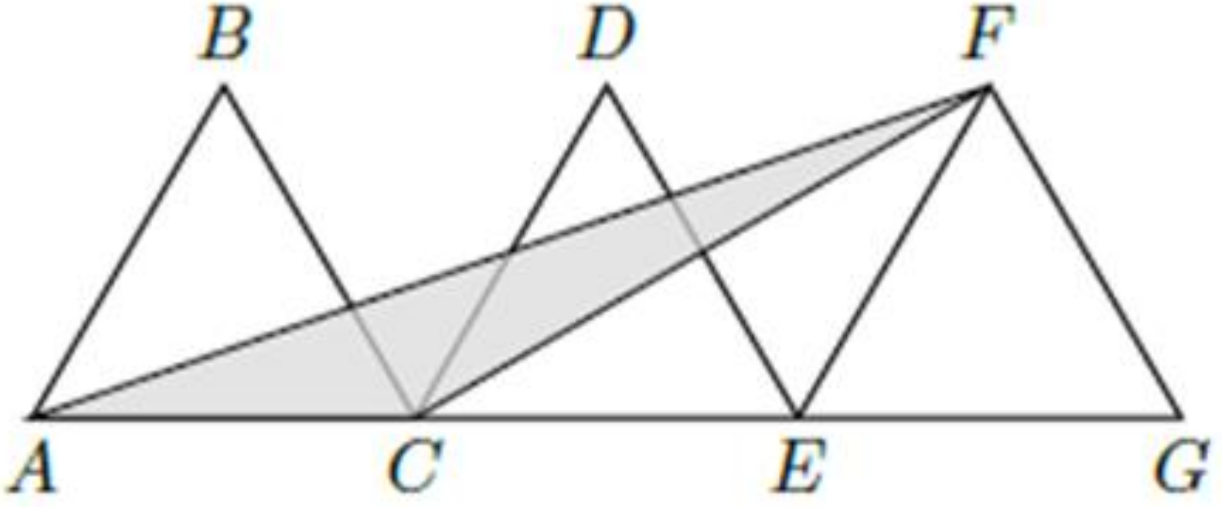
Traçando os segmentos PR e QS, vemos que o quadrado ABCD é formado por oito triângulos retângulos iguais e que o quadrado PQRS é formado por quatro destes triângulos. Portanto, a área do quadrado PQRS é a metade da área do quadrado ABCD, ou seja, $\frac{40}{2} = 20$ cm^2.





Traçando o segmento TM, sendo M o ponto médio de PQ, vemos que o quadrado PQRS é formado por quatro triângulos retângulos iguais e o triângulo PQT é formado por dois destes triângulos. Logo a área do triângulo PQT é a metade da área do quadrado PQRS, ou seja, $\frac{20}{2} = 10$ cm^2.

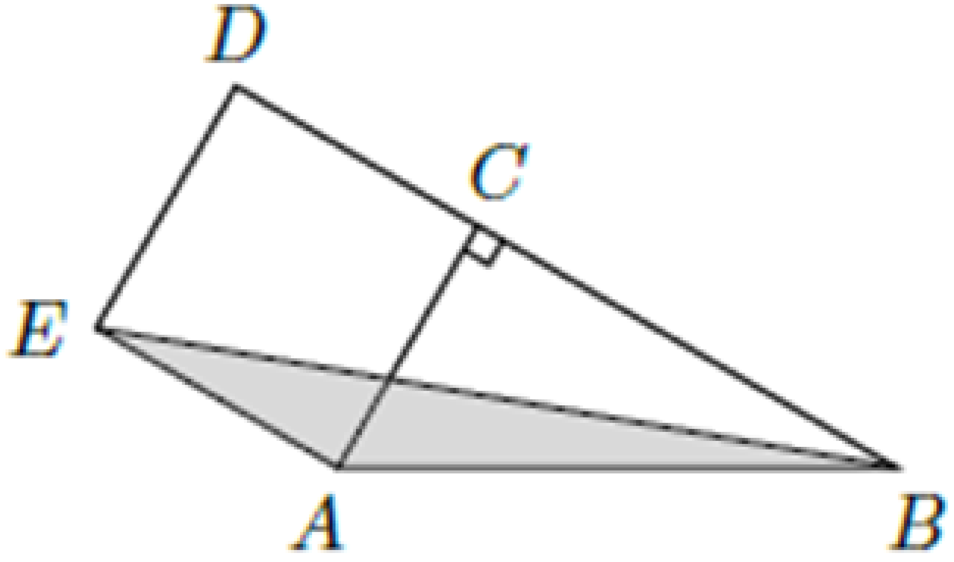
Exercício 8. Na figura a seguir, ABC, CDE e EFG são triângulos equiláteros com 60 cm^2 de área cada um. Se os pontos A, C, E e G são colineares, determine a área do triângulo AFC.



Solução do exercício 8. (exemplo 2 – página 116 – apostila encontros de geometria)

Os exercícios 5 e 6 desta lista exploram a seguinte propriedade: se dois triângulos possuem respectivamente a mesma base e a mesma altura, então estes triângulos possuem a mesma área. No caso deste exercício 5, o triângulo AFC possui a mesma base e a mesma altura dos triângulos ABC, CDE e EFG. Portanto, todos estes quatro triângulos possuem a mesma área 60 cm^2.

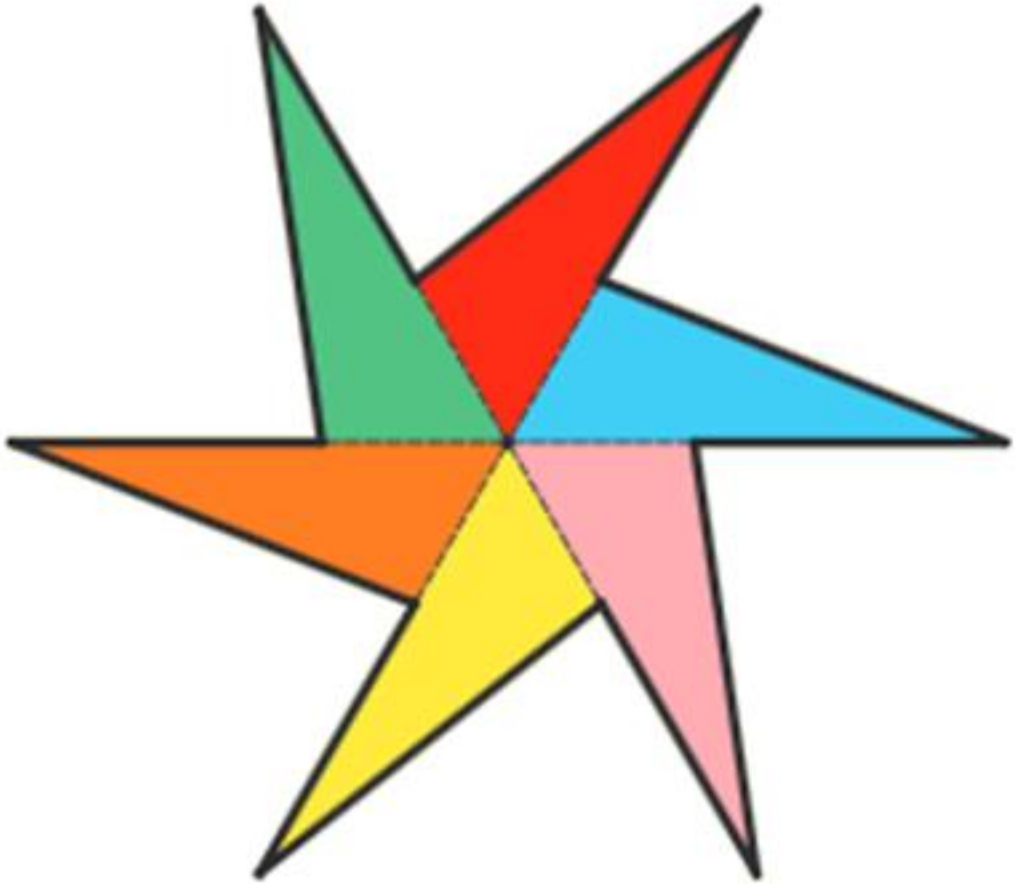
Exercício 9. Na figura a seguir, ACDE é um quadrado com 14 cm^2 de área. Qual é a área do triângulo ABE?



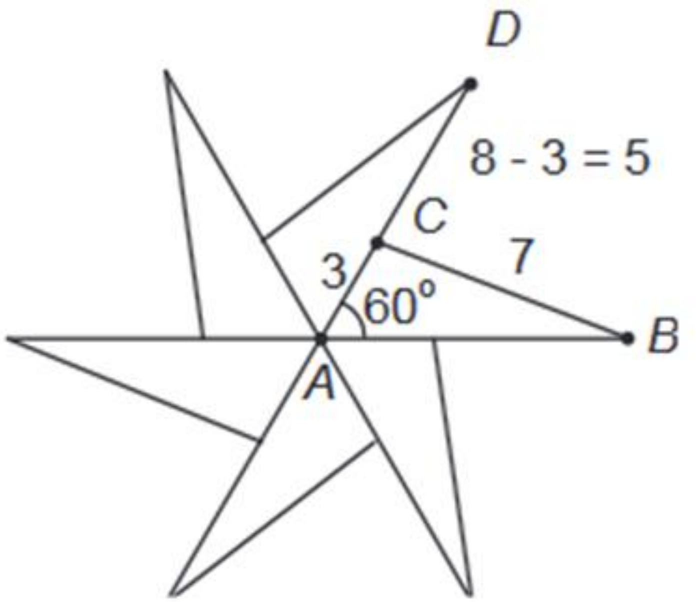
Solução do exercício 9. (exercício 1 – página 112 – apostila encontros de geometria)
As retas AE e BD são paralelas. Daí os triângulos ABE e ADE possuem base AE e altura ED e, portanto, possuem a mesma área. O triângulo ADE tem metade da área do quadrado ACDE. Daí

$$área(ABE) = área(ADE) = \frac{área(ACDE)}{2} = \frac{14}{2} = 7 \text{ cm}^2.$$

Exercício 10. A figura a seguir foi construída com triângulos de lados 3 cm, 7 cm e 8 cm. Qual é o perímetro da figura?



Solução do exercício 10. ([Prova OBMEP 2016 – N1Q4 – 1ª fase])

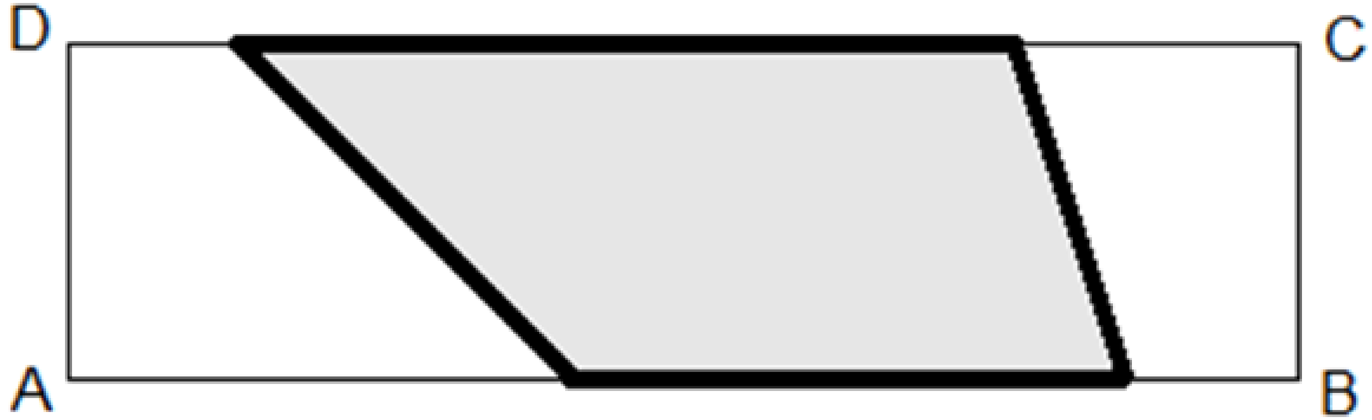


1ª solução. Observemos, em primeiro lugar, que o lado BC do triângulo, como na figura ao lado, mede 7 cm; já o lado AB, sendo maior que o lado AC, mede 8 cm e o lado AC, sendo o menor, mede 3 cm. Segue, então, que o segmento CD mede 8 - 3 = 5 cm e o perímetro da figura é $(6\times 7)+(6\times 5)=72$ cm.

2ª solução. O perímetro de cada um dos triângulos é 3 + 7 + 8 = 18 cm. Cada um deles tem o lado de 3 cm apoiado em um lado menor do outro triângulo. Tanto esse lado quanto a parte correspondente do outro triângulo não contam para o perímetro da figura. Deste modo, cada triângulo deixa de acrescentar 6 cm ao perímetro da figura que é, então, $(6\times 18)-(6\times 6)=72$ cm.

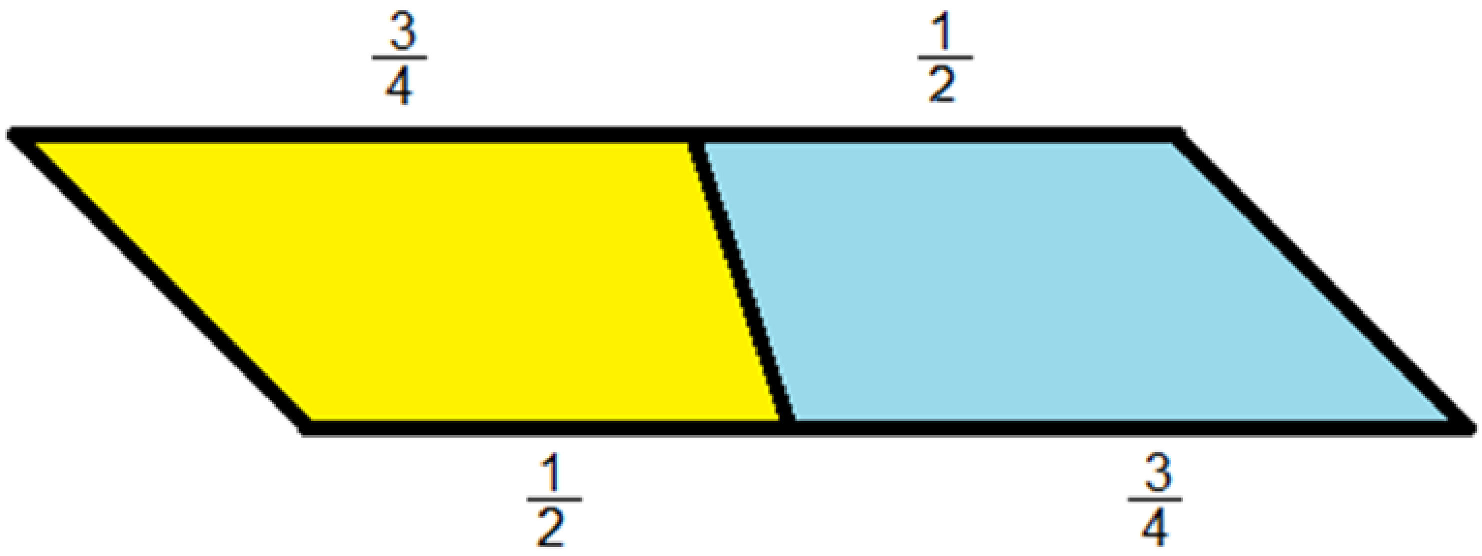
Observemos também que, como os seis ângulos que têm vértice A na figura anterior são iguais, e eles somam 360^o, então cada um deles mede $360^o \div 6 = 60^o$. É notável que, em um triângulo de lados 3, 7 e 8, o ângulo entre o menor lado e o maior lado meça 60^o.

Exercício 11. Na figura a seguir, ABCD é um retângulo com 864 cm^2 de área. O trapézio destacado tem vértices sobre os lados do retângulo e ele é tal que a sua base menor tem metade e a sua base maior tem três quartos do comprimento do lado maior do retângulo. Qual é a área do trapézio?

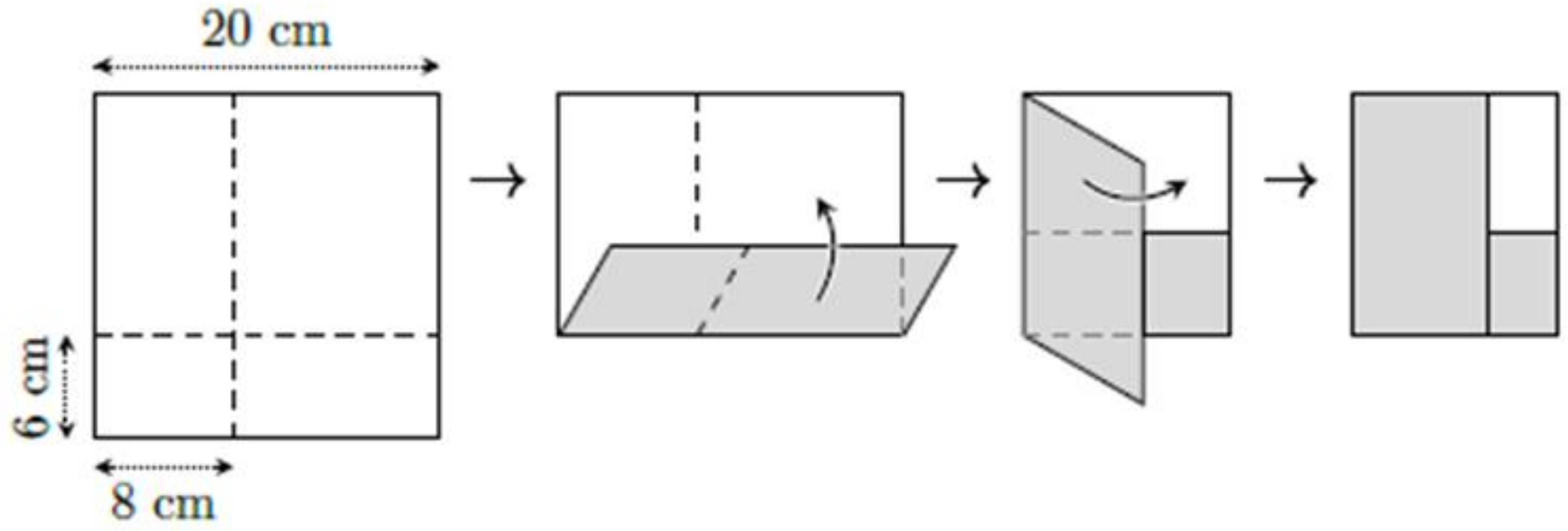


Solução do exercício 11.

Com duas cópias do trapézio podemos formar um paralelogramo que tem a mesma altura do retângulo ABCD e que tem como base $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$ da base desse retângulo. Logo a área desse paralelogramo é igual a $\frac{5}{4}\times 864 = 1080$ cm². Como o paralelogramo tem o dobro da área do trapézio, concluímos que a área do trapézio é igual a $\frac{1080}{2}=540$ cm².



Exercício 12. Um quadrado de papel de 20 cm de lado, com a frente branca e o verso cinza, foi dobrado ao longo das linhas pontilhadas, como na figura. Qual é a área da parte branca que ficou visível?



Solução do exercício 12. (Prova OBMEP 2010 – N2Q8 – 1ª fase) Este exercício também é exemplo 2 – página 99 – apostila encontros de geometria)

A figura mostra os comprimentos, em centímetros, de alguns segmentos ao longo da sequência de dobras. Ao final, vemos que a região branca é um retângulo de lados de comprimentos 4 cm e 8 cm. A área do retângulo branco é então $4 \times 8 = 32$ cm^2.