1º Encontro: Algoritmo da Divisão e Paridade

1- Os Naturais

Os números naturais formam um conjunto cujos elementos são descritos de forma ordenada como segue:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...

i. Os números naturais permitem contar objetos, inclusive subconjuntos do próprio conjunto dos naturais. Por exemplo, de 1 a n, inclusive, existem exatamente n números naturais.

ii. Quando um natural a aparece na sequência, acima mencionada, antes do número b, ou seja à esquerda de b, escrevemos $a < b$ e dizemos que a é menor que b, ou ainda, escrevemos $b > a$ e dizemos que b é maior que a.

$$\cdots \rightarrow a \rightarrow \cdots \rightarrow b \rightarrow \cdots$$

Por exemplo, $1 < 2$, $5 < 7$, $9 > 6$

iii. Se a aparece antes de b e b aparece antes de c, então a aparece antes de c (propriedade transitiva).

$$\cdots \rightarrow a \rightarrow \cdots \rightarrow b \rightarrow \cdots \rightarrow c \rightarrow \cdots$$

Em símbolos:

$$\boxed{\text{Se } a < b \text{ e } b < c, \text{ então } a < c}$$

Escrevemos também $a \le b$ para representar a situação:

$a < b$ ou $a = b$.

iv. A ordem nos naturais é total, o que significa que dado dois números naturais a e b temos verificada uma e apenas uma das três seguintes possibilidades.

$$\boxed{a < b, \quad a = b, \quad \text{ou} \quad a > b}$$

v. Potenciação

Dados dois números naturais $a \neq 0$ e n qualquer, definimos a operação de potenciação como segue:

$$a^n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ a, & \text{se } n = 1, \\ \underbrace{a.a. \dots .a}_{n \text{ fatores}}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Por exemplo,

$2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 2 \times 2 = 4$, $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$, $0^2 = 0$

vi. A potenciação possui as seguintes propriedades:

(a) $1^n = 1$ (b) $a^n . a^m = a^{n+m}$

(c) $(a^n)^m = a^{n.m}$ (d) $a^n . b^n = (ab)^n$

vii. Existem fórmulas para escrever a potência de uma soma.

(a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(c) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(d) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

2- Os inteiros e suas propriedades

No conjunto dos números naturais a operação $b - a$ só é definida quando $b \geq a$. O jeito que os matemáticos encontraram para que seja sempre definido o número $b - a$ foi a de ampliar o conjunto dos números naturais formando um novo conjunto $\mathbb{Z}$ chamado de conjunto dos números inteiros, cujos elementos são dados ordenadamente como segue:

... – 3, – 2, – 1, 0, 1, 2, 3, 4, ...

i. Os números à esquerda do zero são chamados de ***números negativos*** e os à direita são chamados de ***números positivos***.

ii. Os pares de números 1 e –1, 2 e –2, e 3 –3, etc., são chamados de números ***simétricos***.

iii. O elemento 0, que não é positivo, nem negativo, é o seu próprio simétrico.

iv. Em $\mathbb{Z}$ temos uma relação de ordem que estende a relação de ordem de $\mathbb{N}$, onde declaramos $a < b$ quando a está a esquerda de b. Esta relação continua transitiva e total.

v. Representamos por $-a$ o simétrico de a, seja ele positivo, negativo ou nulo, temos sempre que

$$-(-a) = a.$$

Múltiplos Inteiros de um Número

Dado um inteiro a, consideramos o conjunto dos múltiplos inteiros de a:

$$a\mathbb{Z} = \{a \times d;\ d \in \mathbb{Z}\}$$

Propriedades:

i. 0 é múltiplo de a;

ii. Se m é um múltiplo de a, então $-m$ é múltiplo de a.

iii. Um múltiplo de um múltiplo de a é um múltiplo de a.

iv. Se m e m' são múltiplos de a, $m + m'$ e $m - m'$ são também múltiplos de a.

v. Se m e m' são múltiplos de a, então **e x m + *f* x *m'*** é múltiplo de a quaisquer que sejam os inteiros e e f.

Divisores

Diremos que um número inteiro d é um ***divisor*** de outro inteiro a, se a é ***múltiplo*** de d; ou seja, se $a = d \times c$, para algum inteiro c.

i. Quando a é múltiplo de d dizemos também que a é divisível por d ou que d divide a. simbolicamente: $d \mid a$.

Assim, por exemplo, temos que

$1 \mid 6$, $2 \mid 6$, $3 \mid 6$, $6 \mid 6$, $-6 \mid 6$, $-3 \mid 6$, $-2 \mid 6$, $-1 \mid 6$

Além disso, se $d \notin \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$, então $d \mid 6$.

ii. Temos também que $1 \mid a$ e $d \mid 0$, para todo $d \neq 0$, pois 0 é múltiplo de qualquer número.

iii. Note também que se $d \mid a$, então $-d \mid a$, $d \mid -a$, $-d \mid -a$.

iv. Note que se a e d são números naturais, com $a \neq 0$ e se $d \mid a$, então $d \leq a$. De fato, sendo a um múltiplo natural não nulo do número natural d, sabemos que $a \geq d$.

Máximo divisor comum

Dados dois inteiros a e b não simultaneamente nulos, o maior divisor comum de a e b será chamado de máximo divisor comum de a e b e denotado por mdc(a, b).

i. Note que mdc(a, b) = mdc(b, a).

ii. O problema de determinar o mdc de dois números é bem simples quando os números são pequenos, pois neste caso podemos listar todos os divisores desses números e escolher o maior deles, que será o seu mdc.

Por exemplo, para calcular o mdc(12, 18), determinamos os divisores de 12, que são:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$$

e os divisores de 18, que são:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$$

Tomando o maior divisor comum, obtemos:

mdc(12, 18) = 6.

iii. Um número d é divisor comum de a e b, não ambos nulos, se, e somente se, ele é divisor comum de a e de $b - a$. Ou seja,

$$\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(a, b - a)$$

que permite ir reduzindo sucessivamente o cálculo do mdc de dois números ao cálculo do mdc de números cada vez menores.

Exemplo: Cálculo do mdc(3 264, 1 234)

mdc(3 264, 1 234) = mdc(1 234, 3 264 – 1 234) =
= mdc(1 234, 2 030) = mdc(1 234, 2 030 – 1234) =
= mdc(1 234, 796) = mdc(796, 1 234 – 796) =
= mdc(796, 438) = mdc(796 – 438, 438) =
= mdc(358, 438) = mdc(358, 438 – 358) =
= mdc(358, 80) = mdc(358 – 80, 80) =
= mdc(278, 80) = mdc(198, 80) =
= mdc(118, 80) = mdc(38, 80) =
= mdc(38, 42) = mdc(38, 4) =
= mdc(34, 4) = mdc(30, 4) =
= mdc(26, 4) = mdc(22, 4) =
= mdc(18, 4) = mdc(14, 4) =
= mdc(10, 4) = mdc(6, 4) = 2

Algoritmo da divisão

Uma das propriedades mais importantes dos números naturais é a possibilidade de dividir um número por outro com resto pequeno. Essa é a chamada divisão euclidiana.

É importante que os alunos adquiram a habilidade de utilizar corretamente o Algoritmo da divisão de Euclides e de utilizá-lo na resolução de problemas.

Ao ser efetuada uma divisão, por exemplo a divisão indicada abaixo de 54 por 13, obtemos quociente 4 e resto 2.

$$\begin{array}{r|l} 54 & 13 \\ \cline{2-2} -\ \underline{52} & 4 \\ 2 & \end{array}$$

Assim, a divisão euclidiana de 54 por 13 se expressa como:

$$54 = 4 \times 13 + 2.$$

Esta igualdade também pode ser pensada do seguinte modo. Suponhamos que você tenha 54 bolinhas e deseje separá-las em grupos de 13. Agrupando de 13 em 13 é possível organizar estas bolinhas em 4 grupos, totalizando 4 x 13 = 52 bolinhas, sobrando 2 bolinhas que não podem formar um grupo de 13 bolinhas.

No algoritmo da divisão de Euclides, ao dividir um número natural a por um número natural b, com $b > 0$, e a qualquer, encontramos um quociente q e um resto r tal que $a = b.q + r$, com $0 \leq r < b$. Veja o esquema,

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

O número ***a*** é chamado ***dividendo***, o número ***b divisor***, os números ***q*** e ***r*** são chamados, respectivamente, ***quociente*** e ***resto*** da divisão de ***a*** por ***b***.

- ❖ Note que dados dois números naturais ***a*** e ***b***, nem sempre ***a*** é ***múltiplo*** de ***b***, este será o caso se, e somente se, ***r*** = 0. Neste caso o número ***a*** é ***divisível*** por ***b***.
- ❖ Os ***possíveis restos*** da divisão de um número qualquer por ***b*** são os números ***0, 1, ..., b – 1***.
- ❖ Por exemplo, os possíveis restos da divisão de um número inteiro por ***2*** são ***r = 0*** ou ***r = 1***.

Se um dado número inteiro quando dividido por 2 deixa resto ***r = 0***, ele é ***divisível por 2***, ou seja, ele é ***par***.
Se, ao contrário, esse número deixa ***resto 1*** quando dividido por 2, ele é ***ímpar***.

Assim, um número é ***par*** se é da forma **2q** e é ***ímpar*** se é da forma ***2q + 1***, para algum inteiro ***q***.

Par ou ímpar?

Vamos agora saber como lidar com os restos da divisão de números inteiros por um número natural dado.

1. A soma de dois números pares é par. De fato, os dois números podem ser escritos na forma **2a** e **2b**, cuja soma é **2(a + b)**, logo par.
2. A soma de dois números ímpares é par. De fato, os números são da forma **2a + 1** e **2b + 1**, cuja soma é **2(a + b + 1)**, logo par.
3. A soma de um número par com um número ímpar é ímpar. De fato, um dos números é da forma **2a** e o outro **2b + 1**, cuja soma é **2(a + b) + 1**, logo ímpar.

A ***paridade***, isto é, a qualidade de ser ***par*** ou ***ímpar***, da **soma de dois números** só **depende da paridade dos números** e não dos números em si.

4. O produto de dois números pares é par. De fato, os números sendo da forma **2a** e **2b**, temos que seu produto é **4ab** e, portanto, múltiplo de **4**, logo par.
5. O produto de um número par por um número ímpar é par. De fato, um número da forma **2a** e um número da forma **2b + 1** têm produto igual a **2a(2b + 1)**, que é par.
6. O produto de dois números ímpares é ímpar. De fato, sendo os números da forma **2a + 1** e **2b + 1**, o seu produto é **2(2ab + a + b) + 1**, logo ímpar.

Novamente como no caso da soma, temos que a ***paridade*** do produto de dois números só **depende** da **paridade desses números** e não dos números em si.

Assim podemos decidir a paridade de um expressão complexa envolvendo produtos e somas de inteiros do modo a seguir.

Atribuindo o símbolo $\bar{0}$ aos números pares e o símbolo $\bar{1}$ aos números ímpares, as observações acima nos fornecem as seguintes tabelas que regem a paridade das somas e produtos dos números inteiros.

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Por exemplo,
Determine a paridade do número 20^{10} x 11^{200} + 21^{19}.
Vamos substituir 20 por $\bar{0}$, por ser par, e os números 11 e 19 por $\bar{1}$, por serem ímpares. Obtemos, assim, a expressão

$$\bar{0}^{10} x\ \bar{1}^{200} + \bar{1}^{19},$$

Que operada segundo as tabelas acima nos dá $\bar{1}$ como resultado. Portanto, o número dado é ímpar.

Questões propostas

Q1. Você pode encontrar cinco números ímpares cuja soma seja 100?

Q2. Existem dois números pares consecutivos?

Q3. Existem dois números ímpares consecutivos?

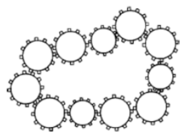
Q4. Existe um número natural que não é par nem ímpar?

Q5. O que podemos dizer da soma de uma quantidade par de números ímpares, é par ou ímpar?

Q6. O que podemos dizer da soma de uma quantidade ímpar de números ímpares, é par ou ímpar?

Q7. (Fomin, capítulo 1, problema 16) É possível trocar uma nota de 25 rublos em dez notas com valores 1, 3 ou 5 rublos?

Q8. (Fomin, capítulo 1, problema 1) Onze engrenagens estão colocadas em um plano, arrumadas em uma cadeia como está ilustrado na figura a seguir. Todas as engrenagens podem rodar simultaneamente?



Q9. (Fomin, capítulo 1, problema 17) Pedro comprou um caderno com 96 folhas e numerou-as de 1 a 192. Vitor arrancou 25 folhas do caderno de Pedro e somou os 50 números que encontrou escritos nas folhas. Esta soma poderia ser igual a 1990?

Q10. (Fomin, capítulo 1, problema 20) Os números de 1 a 10 estão escritos em uma linha. Pode-se colocar os sinais de “+" e de “–“ entre eles de modo que o valor da expressão resultante seja igual a zero?

Q10a. Continuando o exercício anterior, vamos imaginar que os números de 1 a 11 estão escritos em uma linha. Pode-se colocar os sinais de “+" e de “–“ entre eles de modo que o valor da expressão resultante seja igual a zero?

Q10b. Como desafio mostre que sempre que a soma dos números de 1 até n é par, então é possível separar os números de 1 até n em dois subgrupos de números de igual soma.

Relacionado com este desafio podem ser levantadas várias questões, como as exemplificadas a seguir.

(a) Qual é o valor da soma 1 + 2 + 3 + ... + 2014? Esta soma é par ou é ímpar?

(b) Qual é a soma dos múltiplos de 3 entre 1 e 301.

(c) Calcule as somas 1 + 2 + 3 + ... + 20, 1 + 2 + ... + 50 e 21 + 22 + 23 + ... + 50.

(d) Para quais valores de n a soma dos números de 1 até n é par?

(e) Indique como o exercício 10a poderia ser revolvido para a lista dos números de 1 até 100.

Q11. (Fomin, capítulo 1, problema 21) Um gafanhoto pula ao longo de uma linha. No seu primeiro pulo, ele anda 1 cm, no segundo 2 cm, no terceiro 3 cm, e assim sucessivamente. Cada pulo o leva para a direita ou para a esquerda. Mostre que após 1985 pulos, o gafanhoto não pode retornar a sua posição inicial.

Q12. Efetue a divisão euclidiana nos seguintes casos:

a) de 43 por 3 b) de 43 por 5 c) de 233 por 4

d) de 1453 por 10, por 100, por 1 000 e por 10 000

Q13. Efetue a divisão euclidiana nos seguintes casos:

a) de –43 por 3 b) de –43 por 5 c) de –233 por 4

d) de –1453 por 10, por 100, por 1 000 e por 10 000

Q14. Mostre que o dobro de um número ímpar é par mas nunca múltiplo de 4.

Q15. Determine a paridade do seguintes número:

$$(123\ 275 + 346\ 231)^{234} + (3451 + 4532)^{542}$$

Q16. Mostre que para todos ***a*** inteiro e ***n*** natural não nulos, os números ***a*** e a^n tem mesma paridade.

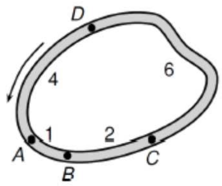
Q17. Qual é a paridade da soma dos números naturais de 1 a 10? E de seu produto?

Q18. Encontre o número natural que ao ser dividido por 7 resulta num quociente 4 e resto o maior possível.

Q19. Encontre os números naturais que, quando divididos por 8 deixam o resto igual ao dobro do quociente.

Q20. Na divisão de dois números inteiros, o quociente é 16 e o resto é o maior possível. Se a soma do dividendo e do divisor é 125, determine o resto.

Q21. (Obmep 2006 – N3Q2 – 2ª fase) A figura abaixo representa o traçado de uma pista de corrida.



Os postos A, B, C e D são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha. Por exemplo, uma corrida de 17 quilômetros pode ser realizada com partida em D e chegada em A.

(a) Quais são os postos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?

(b) E para uma corrida de 100 quilômetros, quais são estes postos?

(c) Mostre que é possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.

Q22. (Obmep 2011 – N3Q2 – 2ª fase) Começando com qualquer número natural não nulo é sempre possível formar uma sequência de números que termina em 1, seguindo repetidamente as instruções abaixo:

- se o número for ímpar, soma-se 1;
- se o número for par, divide-se por 2.

Por exemplo, começando com o número 21, forma-se a seguinte sequência:

$$21 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

Nessa sequência aparecem nove números; por isso, dizemos que ela tem comprimento 9. Além disso, como ela começa com um número ímpar, dizemos que ela é uma sequência ímpar.

a) Escreva a sequência que começa com 37.

b) Existem três sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. Escreva essas sequências.

c) Quantas são as sequências pares e quantas são as sequências ímpares de comprimento 6? E de comprimento 7?

d) Existem ao todo 377 sequências de comprimento 15, sendo 233 pares e 144 ímpares. Quantas são as sequências de comprimento 16? Dessas, quantas são pares? Não se esqueça de justificar sua resposta.