Soluções das Questões – 2º SIMULADO – Nível 3

QUESTÃO 1

a) Somar as somas das linhas é o mesmo que somar todos os números no quadrado; assim, a soma das somas das linhas é $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$. O mesmo se pode dizer da soma das somas das colunas, e concluímos que a soma de todas as somas é $2\times 45=90$. Logo a soma que está faltando é $90-(9+13+14+17+18)=90-71=19$.

b) *1ª solução:* Se todas as somas fossem pares, as somas das três linhas seriam pares e sua soma seria par. Mas isso é impossível pois, como vimos acima, a soma das somas das três linhas é 45, que é um número ímpar.

2ª solução: Ao distribuir os números no quadrado, uma linha pode ter no máximo três números ímpares. Por outro lado, há cinco números ímpares de 1 a 9, a saber, 1,3,5,7 e 9. As maneiras de escrever 5 como soma de inteiros menores ou iguais a 3 são $5=2+3=1+1+3=1+2+2$. Como em qualquer dessas somas aparecem as parcelas 1 ou 3, concluímos que pelo menos uma linha de um quadrado preenchido conterá um ou três números ímpares, sendo os restantes pares. Em qualquer caso, obtemos uma linha cuja soma é ímpar.

c) Vamos estender um pouco essa solução para determinar não apenas um, mas todos os quadrados que têm as somas dadas. Antes de começar, notamos que trocar a ordem de duas linhas (ou de duas colunas) não altera as somas de um quadrado.

O seis números do resultado final devem ser separados em dois grupos de três números cada, cujas somas sejam iguais a 45. No primeiro grupo, cada número é a soma de uma linha e, no outro, a soma de cada coluna. De acordo com o item anterior, cada grupo deve conter um número ímpar; logo 7 e 13 devem ficar em conjuntos diferentes. Segue imediatamente que a única possibilidade é separar as somas nos grupos 7,16, 22 e 13,14,18; podemos então supor que as somas das linhas são 7,16,22 e as somas das colunas são 13,14,18.

Como a única maneira de obter a soma 7 é $1+2+4=7$, podemos começar a preencher o quadrado como à direita. Suponhamos que a soma da segunda linha seja 22; as únicas possibilidades para a soma 22 são $5+8+9=22$ e $6+7+9=22$, que vamos considerar separadamente.

1	2	4	7

1	2	4	7
		8	22
		6	16
		18	

Suponhamos primeiro que na segunda linha aparecem os números 5, 8 e 9. Aqui o 5 não pode aparecer na coluna do 4, pois $4+5=9$ e para obter uma das somas 13, 14 ou 18 nessa coluna o terceiro número deveria ser 4, 5 ou 9, respectivamente, o que não pode acontecer pois o 4 já foi usado enquanto que 5 e 9 aparecem na segunda linha; argumento análogo mostra que o 9 também não pode aparecer na coluna do 4, ou seja, o 8 aparece abaixo do 4. Como $4+8=12$ e tanto o 1 como o 2 já foram usados, a soma dessa coluna não pode ser 13 ou 14; logo a soma é 18. Podemos agora completar o quadrado das seguintes maneiras:

1	2	4	7
5	9	8	22
7	3	6	16
13	14	18	

1	2	4	7
9	5	8	22
3	7	6	16
13	14	18	

Deixamos para o(a) leitor(a) mostrar que, quando na segunda linha aparecem os números 6, 7 e 9, as possibilidades são

1	2	4	7
7	9	6	22
5	3	8	16
13	14	18	

1	2	4	7
9	6	7	22
8	5	3	16
18	13	14	

1	2	4	7
9	7	6	22
3	5	8	16
13	14	18	

1	2	4	7
9	7	6	22
8	5	3	16
18	13	14	

Desse modo, existem apenas seis quadrados com as somas do enunciado, a menos de troca de posição de linhas , (troca de posição de colunas e troca das linhas pelas colunas.

QUESTÃO 2

Sabemos que a pontuação máxima por rodada é de 3x5=15 pontos. Podemos descobrir quantas rodadas é possível obter com pontuações máximas sem ultrapassar 134 pontos fazendo a divisão de 134 por 15.

$$134 = 8 \times 15 + 14 = 120 + 14$$

Assim são necessárias 8 rodadas e ainda sobram 14 pontos.

Pelo item b) são necessárias, no mínimo, 2 rodadas para obter 14 pontos.

Logo, no mínimo, são necessárias 8+2=10 rodadas para obter 134 pontos.

<u>Outra Solução</u>

item a)

Observemos que uma das flechas atingiu a região interna, que vale 5 pontos, caso contrário, Michel obteria, no máximo, 9 pontos nesta rodada. Consequentemente, as outras flechas atingiram a região de 3 pontos. Assim, os pontos obtidos com as flechas foram 5,3 e 3, não necessariamente nesta ordem.

Item b)

Conforme a tabela abaixo, os únicos pontos entre 0 e 15 que Michel não pode obter, em apenas uma rodada, são 1 e 14.

0=0+0+0	4=2+2+0	8=2+3+3=3+5+0	12=2+5+5
1	5=5+0+0=2+3+0	9=2+2+5=3+3+3	13=3+5+5
2=2+0+0	6=2+2+2=3+3+0	10=2+3+5=5+5+0	14
3=3+0+0	7=2+5+0	11=3+3+5	15=5+5+5

Isto se deve aos seguintes fatos:

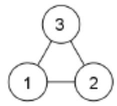
- a menor pontuação, diferente de zero, é igual a 2. Logo é impossível obter apenas1 ponto em uma única rodada;
- 15 pontos são obtidos, de modo único, quando as três flechas atingirem a região central do alvo. Se uma das flechas não atingir a região central, no máximo Michel obteria 13 pontos em uma rodada. Logo, não é possível obter 14 pontos em uma única rodada.

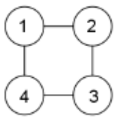
Item c)

Como 8 x 15 = 120 < 134, sabemos que houve, pelos menos, 9 rodadas neste treino. Vamos supor que seja possível obter 134 pontos em 9 rodadas, e seja n o número de rodadas nas quais a pontuação obtida foi de 15 pontos. Como 9 x 13 = 127 < 134, segue que $n \geq 1$ e, por outro lado, como 9 x 15 = 135 > 134, segue que $n \leq 8$.Assim, a pontuação máxima obtida nesta rodada é de $15n+13(9-n)=2n+127$, ou seja, $134 \leq 2n+127$. Portanto, $17 \leq 2n$, o que contradiz o fato de que $n \leq 8$. Logo, concluímos que não é possível obter 134 pontos em 9 rodadas, ou seja, houve, pelo menos, 10 rodadas. Como 134 = 8 x 15 +14 e é possível obter 14 pontos em duas rodadas, concluímos que Michel pode obter os 134 pontos em 10 rodadas.

QUESTÃO 3

a) Ana pode pintar a bolinha 1 com qualquer uma das três cores. A bolinha 2 deve então ser pintada de uma cor diferente da primeira, restando a Ana duas cores para pintá-la. A bolinha 3 deve ser pintada com a cor que sobrar. Portanto, a figura 1 pode ser pintada de $3\times2\times1=6$ maneiras diferentes.





b) Vamos dividir as maneiras de pintar a figura 2 em dois casos.

1º caso: as bolinhas 1 e 3 são pintadas da mesma cor. Essa cor pode ser escolhida de três maneiras diferentes; após esta escolha, a cor da bolinha 2 pode ser escolhida de duas maneiras diferentes, bem como a da bolinha 4. O número de maneiras de pintar a figura 2 nesse caso é $3\times2\times2=12$.

2º caso: as bolinhas 1 e 3 são pintadas de cores diferentes. Nesse caso, a cor da bolinha 1 pode ser escolhida de três maneiras diferentes e após isso, restam duas possibilidades para a cor da bolinha 3. Para as bolinhas 2 e 4 há apenas uma possibilidade, que é a cor que não foi usada nas bolinhas 1 e 3. Logo o número de maneiras de pintar a figura 2 nesse caso é $3\times2\times1=6$.

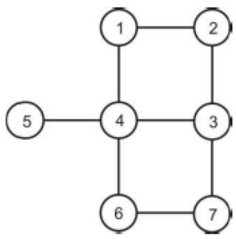
No total, a figura 2 pode ser pintada de $12+6=18$ maneiras diferentes.

c) As bolinhas de 1 a 4 formam a figura do item anterior e portanto, para pintá-las, Ana tem 18 possibilidades. Para pintar a bolinha 5, ele tem duas cores disponíveis, pois a bolinha 4 já está pintada. Logo temos $18\times2=36$ possibilidades para pintar as bolinhas de 1 a 5. Dividimos agora nossa contagem em dois casos:

1º caso: as bolinhas 3 e 6 são pintadas da mesma cor. Nesse caso, temos uma escolha para a cor da bolinha 6 (pois a bolinha 3 já foi pintada) e duas para a bolinha 7, ou seja, temos $1\times2=2$ possibilidades.

2º caso: as bolinhas 3 e 6 são pintadas de cores diferentes. Nesse caso também temos uma única escolha para a cor da bolinha 6 (diferente das cores das bolinhas 3 e 4) e sobra apenas uma cor para a bolinha 7. Aqui temos apenas uma possibilidade.

No total, há $36\times2+36\times1=108$ maneiras diferentes de pintar a figura 3.



QUESTÃO 4

A) Botões brancos quadrados distinguem-se pelo tamanho. Como só há um botão de cada tipo, segue que na caixinha de Lilavati há exatamente 3 botões brancos quadrados: um pequeno, um médio e um grande.

B) Como são 3 possibilidades para tamanho, 2 possibilidades para a forma e 3 possibilidades para cor, segue que o número de possíveis tipos de botões é $3\times2\times3=18$. Por outro lado, como não há botões pequenos redondos (seriam 3, um para cada cor) nem botões grandes pretos (seriam 2, um para cada forma) e só há um botão de cada tipo, o total de botões na caixinha de Lilavati é $18-(3+2)=13$. Outra solução equivalente (mais longa e trabalhosa) é fazer uma tabela listando todos os tipos possíveis de botões e depois excluir os pequenos redondos e os grandes pretos.

QUESTÃO 5

A) Cada canteiro triangular é um triângulo retângulo de catetos x e $10-x$; quando $x=2$, estes catetos valem 2 e 8. Logo a área de cada canteiro é $\frac{2\times8}{2}=8\,\text{m}^2$. Como a área total da praça é 100 m^2 segue que a área do canteiro central é $100-4\times8=68$ m^2.

B) Cada canteiro triangular é um triângulo retângulo de catetos x e $10-x$, tendo assim área de $\frac{1}{2}x(10-x)$ m^2. Como a área total da praça é 100 m^2, segue que a área do canteiro central é

$$100-4\cdot\frac{1}{2}x(10-x)=2x^2-20x+100 \text{ m}^2$$

Pode-se também notar que o lado L do canteiro de grama é a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos x e $10-x$. A área deste canteiro é L^2. Pelo teorema de Pitágoras, temos

$$L^2=x^2+(10-x)^2=x^2+100-20x+x^2=2x^2-20x+100$$

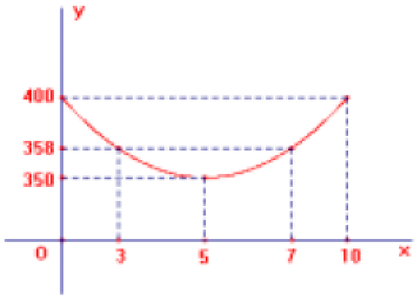
como antes.

C) O custo total dos canteiros é igual a

custo do canteiro de grama + 4 $\times$ *(custo de um canteiro de pedra)*

O custo do canteiro de grama é $4(2x^2-20x+100)$ reais e o de um canteiro de pedra é $3\cdot\frac{1}{2}x(10-x)$ reais. Designando por $c(x)$ o custo total dos canteiros em função de x, temos

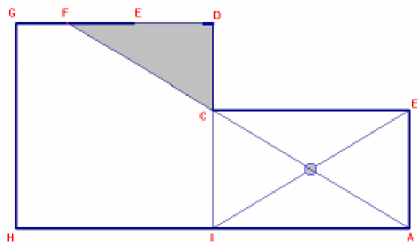
$c(x)=4\cdot(2x^2-20x+100)+4\cdot\left[3\cdot\frac{1}{2}x(10-x)\right]=2x^2$ -



O gráfico da função c é a parábola representada ao lado (*atenção*: este é apenas um esboço do gráfico, sem respeitar a escala ao longo do eixo dos y). O valor mínimo de c é assumido quando $x=\frac{20}{2\times 2}=5$; o custo mínimo é então

$c(5)=2\times 5^2-20\times 5+400=350$ reais.

D) Se o prefeito construir uma praça cujo canteiro de grama tem área de a m^2, então o custo total da praça é $4a+3(100-a)=300+a$ reais. Vemos assim que o custo cresce quando a cresce, e deste modo a área máxima do canteiro de grama corresponde ao máximo que o prefeito pode gastar, que é R\$358,00. Neste caso temos a equação $300+a=58$, donde o maior canteiro de grama que o prefeito pode construir tem área de 58 m^2.



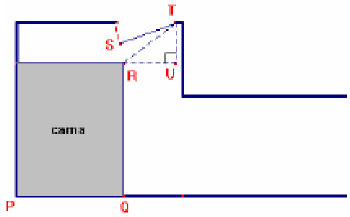
QUESTÃO 6 (a) Consideremos a figura do enunciado com os vértices rotulados como ao lado. Uma vez que a luz se propaga em linha reta, o triângulo *CDF* (sombreado na figura) corresponde à área do chão que não será iluminada pela lâmpada. O triângulo *CDF* é semelhante ao triângulo *ABC* e a razão de semelhança é $\frac{CD}{AB}=\frac{GH-AB}{AB}=\frac{1{,}1}{1{,}5}=\frac{11}{15}$. Como a razão entre as áreas de triângulos semelhantes é o quadrado da razão de semelhança, segue que

$$\text{área}(CDF)=\left(\frac{11}{15}\right)^2\text{área}(ABC)=\left(\frac{11}{15}\right)^2\frac{AB\times BC}{2}=\left(\frac{11}{15}\right)^2\frac{1{,}5\times 2{,}5}{2}=\frac{121}{120}\text{ m}^2$$

Alternativamente, podemos calcular os lados do triângulo *CDF* usando a semelhança dos triângulos *CDF* e *ABC*. Temos $\frac{DF}{CD}=\frac{BC}{AB}$; logo $DF=\frac{BC\times CD}{AB}=\frac{2{,}5\times 1{,}1}{1{,}5}=\frac{11}{6}$ e então

$\text{área}(CDF)=\frac{CD\times DF}{2}=\frac{1{,}1\times\frac{11}{6}}{2}=\frac{121}{120}$ m^2, como antes.

(b) *1ª solução*: Consideramos a figura do enunciado, com os vértices rotulados como na figura ao lado. Temos $PQ=1{,}6$ e $QR=2{,}0$ (a figura do enunciado deixa claro que o menor lado da cama está na horizontal). Para decidir se a porta vai ou não tocar na cama, basta comparar os segmentos *RT* e *ST*. Para calcular *RT*, usamos o triângulo retângulo *RUT* representado na figura; temos $RU = 0{,}8$ e $UT = 0{,}6$, donde $RT = \sqrt{0{,}8^2 + 0{,}6^2} = 1$. Como $ST = 0{,}9$, vemos que a porta vai passar a 10 cm da cama.



2ª solução: Podemos calcular a distância entre os pontos *R* e *T* da figura anterior colocando um sistema de coordenadas na figura anterior com origem em *P*, o eixo *x* em *PQ* e o eixo *y* na parede vertical esquerda. Nesse caso, *R* tem coordenadas (1,6; 2,0) e *T* tem coordenadas (2,4; 2,6). Logo

$$RT = \sqrt{(2{,}4 - 1{,}6)^2 + (2{,}0 - 2{,}6)^2} = \sqrt{0{,}64 + 0{,}36} = 1$$

O argumento final é o mesmo da solução anterior.

Notamos que as duas soluções são conceitualmente idênticas, pois a fórmula da distância de dois pontos no plano é uma conseqüência imediata do teorema de Pitágoras.