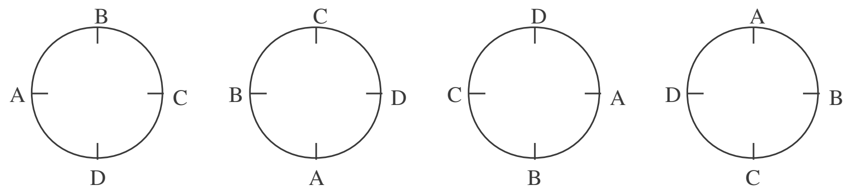
Capítulo 4

Mais Permutações e Combinações (grupo 2)

Como vimos anteriormente, é possível resolver um grande número de problemas interessantes de contagem sem utilizar fórmulas, apenas empregando apropriadamente as quatro operações. Há, no entanto, certos problemas que ocorrem com frequência e que não são imediatos, como o problema das combinações simples, para os quais é interessante conhecer a fórmula que expressa sua solução, para empregá-la em outros problemas. Neste material adicional, veremos alguns problemas que utilizam permutações e combinações em sua solução e travaremos contato com algumas outras fórmulas combinatórias que podem ser úteis.

Exemplo 1. De quantos modos 4 crianças podem formar uma roda?

Solução: À primeira vista, pode parecer que para formar uma roda com as 4 crianças basta escolher uma ordem para elas, o que pode ser feito de $4! = 24$ modos. Entretanto, as rodas ABCD, BCDA, CDAB e DABC mostradas na figura abaixo são iguais, já que cada uma resulta da anterior por uma "virada" de 1/4 de volta.



Para calcular o número de maneiras possíveis de formar uma roda, podemos raciocinar de dois modos diferentes. Um deles consiste em partir do resultado anterior ($4! = 24$) e perceber que cada roda está sendo contada 4 vezes. Logo, o número correto de rodas que podem ser formadas é $\frac{24}{4} = 6$. Alternativamente, podemos começar por fixar a criança A na posição à esquerda (já que em qualquer roda A pode ficar nesta posição). Agora, temos 3 lugares para as 3 crianças que restaram, para um total de $3! = 6$ possibilidades.

De modo geral, o número de modos de colocar n objetos em círculo, considerando-se iguais disposições que coincidam por rotação (ou seja, o número de *permutações circulares* de n objetos) é $PC_n = (n-1)!$.

Exemplo 2. Considere um grupo formado por 7 homens (entre os quais José) e 5 mulheres (entre as quais Maria), do qual se quer extrair uma comissão constituída por 4 pessoas. Quantas são as comissões:

(a) Possíveis?

Solução: Devemos escolher 4 das 12 pessoas, o que pode ser feito de C_{12}^4 modos, que é igual a $\frac{12\times11\times10\times9}{1\times2\times3\times4} = 495$ comissões.

(b) Formadas por 2 homens e 2 mulheres?

Solução: Para formar uma comissão, devemos escolher os 2 homens, o que pode ser feito de C_7^2 modos, e, a seguir, as 2 mulheres, o que pode ser feito de C_5^2 maneiras. O número total de possibilidades de escolha, pelo princípio multiplicativo, é $C_7^2 \times C_5^2 = 21 \times 10 = 210$ comissões.

(c) Em que haja pelo menos 2 mulheres?

Solução: Há 3 tipos de comissão possíveis: com 2 homens e 2 mulheres, com 1 homem e 2 mulheres e com 4 mulheres. Para obter o número total de comissões, contamos separadamente as comissões de cada tipo e somamos os resultados, obtendo

$$C_7^2 \times C_5^2 + C_7^1 \times C_5^3 + C_5^4 = 210 + 70 + 5 = 285 \quad \text{comissões.}$$

Uma tentativa de contagem que leva a um erro muito comum é a seguinte: como a comissão deve ter pelo menos 2 mulheres, inicialmente escolhemos 2 mulheres, o que podemos fazer de $C_5^2 = 10$ modos. A seguir, basta escolher 2 pessoas quaisquer entre as 10 que sobraram, o que pode ser feito de $C_{10}^2 = 45$ modos. Logo, por este raciocínio, teríamos $10 \times 45 = 450$, que difere do resultado (correto) encontrado acima. Essa solução, portanto, está **errada**. Você sabe explicar onde está o erro no raciocínio?

(d) Em que José participe, mas Maria não?

Solução: Como José deve participar da comissão, resta escolher apenas 3 outras pessoas, entre as 10 restantes (já que José já foi escolhido e Maria não pode ser escolhida). Logo, o número de possibilidades é igual a $C_{10}^3 = 120$.

(e) Formadas por 2 homens, entre os quais José, e 2 mulheres, mas sem incluir Maria?

Solução: Temos que escolher 1 homem entre 6 (José já está escolhido) e 2 mulheres entre 4 (Maria não pode ser escolhida). O número de comissões é $6 \times C_4^2 = 6 \times 6 = 36$.

Exemplo 3. Quantos anagramas podemos formar com a palavra

MATEMATICA?

Solução: Um anagrama é uma palavra (não necessariamente fazendo sentido) formada com as mesmas letras, mas em uma ordem qualquer. Quando as n letras de uma palavra são todas distintas, o número de anagramas é igual ao número de permutações de n, que, como vimos, é igual a $n!$. Mas a palavra MATEMATICA tem letras repetidas: há 3 A, 2 M e 2 T, além de E, I e C, que aparecem uma vez cada.

Uma solução (consistente com o princípio de atacar o mais complicado antes) é, antes de mais nada, decidir o que fazemos com as letras repetidas. Para colocar os A, temos que escolher 3 dentre os 10 lugares possíveis, o que pode ser feito de C_{10}^3 modos. Para colocar os M, restam agora 7 lugares, dos quais devemos escolher 2, o que pode ser feito de C_7^2 maneiras. Agora só restam 5 lugares, dos quais devemos escolher 2 para colocar os T; temos C_5^2 possibilidades. Agora, só restam 3 lugares, nos quais devem ser colocadas as 3 letras restantes, o que pode ser feito de $3 \times 2 \times 1$ modos. Logo, o número total de anagramas é $C_{10}^3 C_7^2 C_5^2 \times 6 = 151\,200$.

Mas há um outro modo de pensar, partindo do número de permutações de 10 letras distintas (igual a 10!). Esta contagem não está correta, porque consideramos letras iguais como se fossem distintas. Ou seja, é como se considerássemos as permutações de $A_1, A_2, A_3, M_1, M_2, T_1, T_2, E, I$ e C. Para corrigir a contagem, basta contar quantas vezes cada anagrama foi contado. Por exemplo, o anagrama $AAAMMTTEIC$ foi contado várias vezes: um como $A_1A_2A_3M_1M_2T_1T_2EIC$, outro como $A_2A_1A_3M_1M_2T_1T_2EIC$ etc. Na verdade, ele foi contado tantas vezes como os modos de ordenar os 3 A, os 2 M e os 2 T, que é igual a $3! \times 2! \times 2!$. O número de anagramas é, então, $\frac{10!}{3!2!2!} = 151\,200$, como encontrado anteriormente.

O segundo raciocínio pode ser facilmente estendido para uma situação geral. O número de permutações de n objetos nem todos distintos, em que um deles aparece n_1 vezes, outro n_2 vezes, e assim por diante, é $P_n^{n_1, n_2, \ldots} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots}$.

Exemplo 4. De quantos modos 6 pessoas (João, Maria, Pedro, Janete, Paulo e Alice) podem ser divididas em 3 duplas?

Solução: O problema é mais sutil do que parece a princípio. À primeira vista, pode parecer que a situação é a mesma do problema anterior. Uma maneira de dividir as 6 pessoas em duplas é colocar as pessoas em fila e formar uma permutação de AABBCC. Como visto no exemplo anterior, isto pode ser feito de $\frac{6!}{2!2!2!} = 90$ modos. Mas isto não está correto, pois atribuiu nomes específicos (A, B e C) às duplas formadas. Note que colocar João e Maria na dupla A e Pedro e Janete na dupla B é equivalente a colocar João e Maria na dupla B e Pedro e Janete na dupla A. Portanto, uma mesma distribuição em duplas está sendo contada várias vezes. Mais precisamente, cada distribuição em duplas está sendo contada tantas vezes quanto o número de modos de ordenar A, B e C, ou seja, $3! = 6$ vezes. Logo, o número de possíveis distribuições em duplas é $\frac{90}{6} = 15$.

Exemplo 5. Uma professora tem 3 bolas de gude para distribuir para 5 meninos (digamos, Alfredo, Bernardo, Carlos, Diogo e Eduardo). De quantos modos ela pode fazer essa distribuição:

(a) Supondo que ela dê as bolas para 3 alunos distintos?

Solução: Neste caso, ela deve escolher 3 dentre os 5 meninos para receber as bolas, o que pode ser feito de $C_5^3 = 10$ modos.

(b) Supondo que os contemplados possam ganhar mais de uma bola? (Por exemplo, Carlos pode receber todas as bolas.)

Solução: Listamos abaixo algumas possíveis escolhas dos contemplados:

Alfredo, Bernardo, Eduardo
Alfredo, Alfredo, Diogo
Alfredo, Diogo, Diogo
Carlos, Carlos, Carlos

Esses grupamentos são chamados de *combinações completas* (ou *com repetição*) dos 5 meninos tomados 3 a 3. Note que o que distingue as diferentes distribuições é o número de bolas que cada aluno recebe. Portanto, o número de possibilidades é igual ao número de listas $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de números inteiros não negativos (representando o número de objetos dados a Alfredo, Bernardo, Carlos, Diogo e Eduardo, respectivamente) que satisfazem a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$.

Neste caso simples, podemos resolver o problema separando a contagem em casos. A primeira possibilidade é a de que haja três premiados, cada um ganhando uma bola. Como vimos acima, isto pode ser feito de $C_5^3 = 10$ modos. A segunda possibilidade é de que haja dois premiados, um ganhando 1 bola e outro 2 bolas. O primeiro menino pode ser escolhido de 5 modos, e o segundo, de 4; logo, há $4 \times 5 = 20$ maneiras de distribuir as bolas para dois dos meninos. Finalmente, as bolas podem ir todas para um só menino, que pode ser escolhido de 5 modos. Portanto, o número total de possibilidades é $10+20+5 = 35$.

No entanto, dividir a contagem em casos, como fizemos acima, não vai ser prático caso o número de bolas e meninos seja maior. Para contar de modo eficiente o número de distribuições, vamos recorrer a um truque, que nos permite transformar este problema em outro mais simples. Para formar as diferentes distribuições, colocamos as bolas em fila e as separamos em cinco lotes (correspondentes a cada um dos meninos), através de traços verticais. É claro que, neste caso, alguns desses lotes estarão vazios.

Vejamos alguns exemplos:

- 0||0|0| corresponde a dar 1 bola para Alfredo, para Carlos e para Diogo, enquanto Bernardo e Eduardo não ganham bolas.
- ||00||0 corresponde a dar 2 bolas para Carlos e 1 para Eduardo, enquanto Alfredo, Bernardo e Carlos não ganham bolas.

Note que há uma correspondência perfeita entre as possíveis distribuições e as listas formadas por 3 bolas e 4 traços. Mas estas últimas nós já sabemos contar! Basta escolher 3 das 7 posições para colocar as bolas, o que pode ser feito de $C_7^3 = 35$ maneiras, como encontramos acima.

Naturalmente, podemos aplicar esta solução para o problema geral de contar o número de maneiras de distribuir p objetos para n pessoas (ou seja, de calcular o número de soluções inteiras e não negativas de $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = p$, ou ainda, de calcular o número CR_n^p de combinações completas de n elementos tomados p a p). Temos p bolas, que devem ser separadas por $n - 1$ tracinhos. Ou seja, precisamos escolher p das $n + p - 1$ posições para as bolas. A resposta, portanto, é $CR_n^p = C_{n+p-1}^p$.

Exercícios

1) De quantos modos podemos formar uma roda com 5 meninos e 5 meninas de modo que crianças de mesmo sexo não fiquem juntas?

2) De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 6 crianças, de modo que duas delas, Vera e Isadora, não fiquem juntas?

3) De quantos modos é possível dividir 15 atletas em três times de 5 atletas, denominados Esporte, Tupi e Minas?

4) De quantos modos é possível dividir 15 atletas em três times de 5 atletas?

5) De quantos modos é possível dividir 20 objetos em 4 grupos de 3 e 2 grupos de 4?

6) Um campeonato é disputado por 12 clubes em rodadas de 6 jogos cada. De quantos modos é possível selecionar os jogos da primeira rodada?

7) Quantos são os anagramas da palavra ESTRELADA?

8) Quantos são os números naturais de 7 algarismos nos quais o algarismo 4 figura exatamente 3 vezes e o algarismo 8 exatamente 2 vezes?

9) Quantos são os subconjuntos de $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, com p elementos, nos quais:

   (a) a_1 figura?

   (b) a_1 não figura?

   (c) a_1 e a_2 figuram?

   (d) pelo menos um dos elementos a_1, a_2 figura?

   (e) exatamente um dos elementos a_1, a_2 figura?

10) Considere um conjunto C de 20 pontos do espaço que tem um subconjunto C_1 formado por 8 pontos coplanares. Sabe-se que toda vez que 4 pontos de C são coplanares, então, eles são pontos de C_1. Quantos são os planos que contêm pelo menos três pontos de C?

11) Quantos são os anagramas da palavra PARAGUAIO que não possuem consoantes juntas?

12) De quantos modos podemos selecionar p elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ sem selecionar dois números consecutivos?

13) Depois de ter dado um curso, um professor resolve se despedir de seus 7 alunos oferecendo, durante 7 dias consecutivos, 7 jantares para 3 alunos cada, de modo que o mesmo par de alunos não compareça a mais de um jantar.

   (a) Prove que cada aluno deve comparecer a exatamente 3 jantares.

   (b) De quantos modos o professor pode fazer os convites para os jantares?

14) Em uma escola, um certo número de professores se distribuem em 8 bancas examinadoras de modo que cada professor participa de exatamente duas bancas e cada duas bancas têm exatamente um professor em comum.

    (a) Quantos são os professores?
    (b) Quantos professores há em cada banca?

15) Quantas são as soluções inteiras e positivas de $x + y + z = 7$?

16) Quantas são as soluções inteiras e não negativas da desigualdade $x + y + z \leq 6$?

17) Uma indústria fabrica 5 tipos de balas, que são vendidas em caixas de 20 balas, de um só tipo ou sortidas. Quantos tipos diferentes de caixa podem ser fabricados?