

Material Teórico - Módulo de FRAÇÕES COMO PORCENTAGEM E PROBABILIDADE

Fração como porcentagem

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto



PORTAL DA
MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

No módulo passado, aprendemos que uma mesma fração pode ser representada, como uma razão entre numerador e denominador, de várias maneiras distintas. Por exemplo, $\frac{1}{2}$ é igual a $\frac{3}{6}$ e a $\frac{5}{10}$. Em um caso como esse, dizemos que $\frac{3}{6}$ e $\frac{5}{10}$ são frações **equivalentes** a $\frac{1}{2}$. A equivalência $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ é especialmente importante, pois seu denominador é uma potência de 10. Na próxima seção, veremos em detalhes o porquê da importância das frações que possuem uma representação desse tipo.

2 Representação decimal

Consideremos o número 3785 (três mil setecentos e oitenta e cinco). Essa é sua *representação na base decimal*, em que cada algarismo corresponde à quantidade de potências de dez de ordem igual à posição do algarismo (da direita para a esquerda). De outra forma, podemos escrever

$$3785 = 3 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 5 \times 10^0.$$

De maneira análoga, todos os números naturais são escritos utilizando suas representações decimais. Mas, e quanto às frações que não são naturais, como, por exemplo, $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{7}$? Eles também possuem algum tipo de *representação decimal*?

A resposta à pergunta do parágrafo anterior é *sim*. Mais precisamente, para obter uma representação decimal para frações, fazemos uso do seguinte raciocínio: tomemos como exemplo o número 3785. As potências de 10 que utilizamos para representar esse número foram $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$ e $10^3 = 1000$. O algarismo mais à direita (o algarismo 5) conta a quantidade de potências de 10 de ordem zero. O próximo algarismo (o 8), conta a quantidade de potências de 10 de ordem um, que é uma ordem de grandeza a mais do que a da potência anterior, que era de ordem zero. O terceiro algarismo (o 7), conta a quantidade de potências de 10 de ordem dois, que, novamente, é uma ordem de grandeza a mais do que a da potência anterior, de ordem um. Finalmente, o quarto e último algarismo (o algarismo 3) conta a quantidade de potências de 10 de ordem três, que é uma ordem de grandeza a mais do que a da potência anterior, que era de ordem dois.

$$3785 = 3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

Observe que, dada uma potência de 10, para obtermos a potência de 10 de ordem imediatamente superior, devemos multiplicá-la por 10. Analogamente, para obtermos a potência de 10 de ordem imediatamente inferior, devemos dividir a potência original por 10.

Quando acrescentamos 60000, isto é, seis potências de 10 de ordem quatro, ao número 3785, isso se reflete na representação decimal pelo acréscimo de um novo algarismo (no caso, o algarismo 6) à *esquerda* do algarismo 3, de forma que escrevemos 63785 para representar o novo número. Em símbolos, temos

$$6 \times 10^4 + 3785 = 63785.$$

Conforme observamos no parágrafo anterior, veja que 10^4 é dez vezes maior do que 10^3 , que é a maior potência utilizada no número 3785.

Por outro lado, se somarmos $\frac{4}{10}$ ao número 3785, de forma que passemos a ter o número

$$3785 + \frac{4}{10} = 3785 + 4 \times \frac{1}{10}, \quad (1)$$

e quisermos representar esse novo número por algum tipo de *representação decimal*, então, graças ao raciocínio descrito até aqui, somos naturalmente levados a representá-lo colocando um algarismo 4, à *direita* de 3785. Mas, para não confundir a representação decimal do número em (1) com a do número 37854, colocamos uma *vírgula* separando os algarismos 5 e 4. Em símbolos, representamos $3785 + \frac{4}{10}$ escrevendo

$$3785,4.$$

Veja, então, que a vírgula tem o efeito de nos fazer recordar que $\frac{1}{10}$ é dez vezes menor do que $10^0 = 1$, que é a menor potência de 10 utilizada na representação decimal do número 3785. Observe também que, como

$$3785 + \frac{4}{10} = 3785,4,$$

somos naturalmente levados a escrever

$$\frac{4}{10} = 0,4.$$

De outra forma, a vírgula faz o papel de marcador, informando onde está o algarismo que representa a quantidades de potências de dez de ordem zero. Assim, argumentando por analogia em relação à situação descrita acima, temos

$$0,68 = 6 \times \frac{1}{10} + 8 \times \frac{1}{10^2} = \frac{68}{100}$$

e

$$0,349 = 3 \times \frac{1}{10} + 4 \times \frac{1}{10^2} + 9 \times \frac{1}{10^3} = \frac{349}{1000}.$$

Podemos, também, fazer o caminho inverso, isto é, começar com uma fração que possua uma fração equivalente com denominador igual a uma potência de 10 e, a partir de tal fração equivalente, obter uma representação decimal para a fração original. Vejamos dois exemplos nesse sentido:

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0,5,$$

ou seja, 0,5 é a representação decimal da fração $\frac{1}{2}$; da mesma forma,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} &= \frac{25}{100} = \frac{20+5}{100} = \frac{20}{100} + \frac{5}{100} \\ &= 2 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{1}{100} = 0,25.\end{aligned}$$

NÚMEROS DECIMAIS E MULTIPLICAÇÃO POR 10

Nos primeiros anos da escola aprendemos que, ao multiplicar um número natural por 10, o resultado é obtido acrescentando-se um zero à direita do número original. Por exemplo,

$$7298 \times 10 = 72980.$$

De forma análoga, quando multiplicamos um número decimal por 10, o resultado é obtido descolando-se a vírgula *uma casa* para a direita. Por exemplo,

$$895,32 \times 10 = 8953,2$$

$$104,014 \times 10 = 1040,14$$

Também, quando dividimos um número decimal por 10, o resultado é obtido descolando-se a vírgula *uma casa* para a esquerda. Por exemplo,

$$159,23 \div 10 = 15,923$$

$$43,41 \div 10 = 4,341.$$

A justificativa para a validade de tais regras se dá pela representação decimal dos números envolvidos. Por exemplo, temos

$$\begin{aligned}895,32 &= 8 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 5 \times 10^0 \\ &\quad + 3 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{10^2},\end{aligned}$$

de forma que

$$\begin{aligned}895,32 \times 10 &= 10 \left(8 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + \right. \\ &\quad \left. + 3 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{10^2} \right)\end{aligned}$$

Então, utilizando a propriedade distributiva da multiplicação, obtemos

$$\begin{aligned}895,32 \times 10 &= 8 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + \\ &\quad + 3 \times 10^0 + 2 \times \frac{1}{10} \\ &= 8953,2\end{aligned}$$

Um argumento análogo ao acima pode ser feito para justificar os outros três exemplos acima.

Agora faremos alguns exercícios para fixar as ideias apresentadas até aqui.

Exercício 1. Ache as representações decimais das frações $\frac{7}{2}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{9}{25}$, utilizando frações equivalentes a elas e cujos denominadores sejam potências de 10.

Solução. Inicialmente, observe que qualquer potência de 10 é formada por uma igual quantidade de potências de 2 e 5, isto é,

$$10^n = 2^n \times 5^n,$$

para todo n natural.

Para achar uma fração equivalente a $\frac{7}{2}$ cujo denominador seja uma potência de 10, é suficiente multiplicar seus termos por 5. Portanto,

$$\frac{7}{2} = \frac{7 \times 5}{2 \times 5} = \frac{35}{10} = 3,5.$$

Em relação à fração $\frac{3}{4}$, como seu denominador $4 = 2^2$ tem dois fatores 2, devemos multiplicá-lo por $25 = 5^2$ para obter uma potência de 10 (no caso, 100). Assim,

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100} = 0,75.$$

Da mesma forma,

$$\frac{9}{25} = \frac{9 \times 4}{25 \times 4} = \frac{36}{100} = 0,36.$$

□

Exercício 2 (OBM). Qual é o primeiro algarismo não nulo, após a vírgula, na representação decimal do número $\frac{1}{5^{12}}$?

Solução. Utilizando o mesmo raciocínio desenvolvido para resolver o exercício anterior, vamos multiplicar o numerador e o denominador da fração dada por $2^{12} = 4096$. Assim fazendo, obtemos

$$\frac{1}{5^{12}} = \frac{2^{12}}{5^{12} \times 2^{12}} = \frac{4096}{10^{12}} = 0,000000004096.$$

Portanto, o primeiro algarismo não nulo após a vírgula é igual a 4. □

ALGORITMO DA DIVISÃO E REPRESENTAÇÃO DECIMAL

Outra forma de descobrir a forma decimal de uma fração é através do algoritmo da divisão. Por exemplo,

$$\frac{23}{25} = 4,92$$

pois, conforme veremos a seguir, 0,92 é o *quociente da divisão decimal* de 23 por 25. Para efetuarmos essa divisão, executamos os passos descritos a seguir:

1. Começamos efetuando a divisão inteira de 23 por 25, cujo quociente é 0 e cujo resto é o próprio 23.

- Em seguida, acrescentamos um 0 à direita do resto (que é 23) e, ao mesmo tempo, uma vírgula após o quociente 0.
- Continuamos, efetuando a divisão inteira de 230 por 25, obtendo quociente 9 (que é escrito logo após a vírgula colocada no item anterior) e resto 5.
- Novamente, como não podemos efetuar imediatamente uma divisão inteira de 5 por 25, acrescentamos um 0 à direita do resto 5.
- Executamos a divisão inteira de 50 por 25, obtendo quociente 2 (que é escrito logo após o 9 obtido como quociente anterior) e resto 0.
- Como chegamos a um resto igual a 0, o processo para, e obtivemos o *quociente decimal* 0,92.

Esquemáticamente, temos o seguinte diagrama que resume os passos acima:

$$\begin{array}{r|l} 2300 & 25 \\ -225 & 0,92 \\ \hline 50 & \\ -50 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Considere mais um exemplo, onde obtemos o quociente decimal correspondente à fração $\frac{7}{8}$. Como exercício, liste os passos correspondentes à síntese da divisão decimal, conforme descrita no diagrama a seguir.

$$\begin{array}{r|l} 7000 & 8 \\ -64 & 0,875 \\ \hline 60 & \\ -56 & \\ \hline 40 & \\ -40 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Assim, nesse caso, temos

$$\frac{7}{8} = 0,875.$$

3 Porcentagens

Na seção anterior, vimos que frações com potências de dez no denominador admitem representações decimais que generalizam as representações dos números naturais. Agora, vamos nos concentrar em frações de um tipo ainda mais particular, qual seja, aquelas com **denominador igual a 100**. Também, faremos uso de um símbolo especial para denotar tais frações, qual seja, o símbolo de **porcentagem** (%), que pode ser pensado como representando a fração $\frac{1}{100}$. Assim, por exemplo,

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{50}{100} = 50\%.$$

As porcentagens têm uso difundido em diversos tipos de situações do cotidiano. À título de ilustração, é comum percebermos, no dia-a-dia, frases dos tipos abaixo:

- A loja *Tudo Barato* está realizando uma promoção em que todos os seus produtos estão sendo vendidos com **um desconto de 30%**.
- Mais de **40%** das pessoas entrevistadas disseram que lêem mais de um livro por mês.
- Joaquim fez um teste e obteve **80%** de acertos.

Perceba que, em todos esses casos, estamos trabalhando com frações. Especificamente, vejamos a seguir o que significam cada uma das frases acima:

A') Na situação descrita pela frase A), o *desconto* de 30% no preço de uma mercadoria de preço 50 reais, por exemplo, significa que, ao comprá-la durante a promoção, o consumidor pagará

$$30\% \times 50 = \frac{30}{100} \times 50 = 15$$

reais a menos que o preço original. Assim, ele pagará $50 - 15 = 35$ reais pela mercadoria.

B') A situação descrita na frase B) pode ser interpretada da seguinte maneira: se, por exemplo, 260 pessoas foram entrevistadas, então pelo menos

$$40\% \times 240 = \frac{40}{100} \times 260 = 104$$

delas afirmaram que lêem mais de um livro por mês.

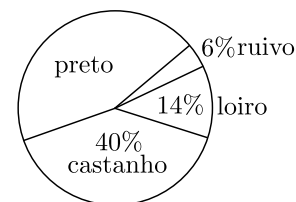
C') Por fim, suponha, novamente a título de ilustração, que o teste que Joaquim fez tinha 35 questões. Então, ele acertou

$$80\% \times 35 = \frac{80}{100} \times 35 = 28$$

das 35 questões.

A seguir resolvemos mais alguns exercícios sobre este assunto, aproveitando-os para introduzir outros tantos conceitos importantes.

Exercício 3. *Uma pesquisa levantou as cores de cabelo de 1200 pessoas. Os resultados obtidos são mostrados no diagrama a seguir: Pergunta-se: quantas pessoas entrevista-*



das possuem cabelo preto?

Solução. Para resolver este exercício, observe que 100% representa a fração $\frac{100}{100} = 1$ em que o número 1 representa a **totalidade** de pessoas entrevistadas, i.e., 1200 pessoas. Daí, veja que

$$6\% + 14\% + 40\% = \frac{6}{100} + \frac{14}{100} + \frac{40}{100} = \frac{60}{100} = 60\%.$$

Portanto, o percentual de pessoas com cabelo preto é

$$100\% - 60\% = 1 - \frac{60}{100} = \frac{40}{100} = 40\%,$$

ou seja, 40% de uma totalidade de 1200 pessoas. Consequentemente,

$$\frac{40}{100} \times 1200 = 480$$

das pessoas entrevistadas possuem cabelo preto. \square

Um diagrama circular como o do exercício anterior, no qual várias porcentagens estão representadas por *setores circulares* de *aberturas* proporcionais às mesmas, é conhecido como um **gráfico de pizza** ou, ainda, um **gráfico de setores**. Uma grande vantagem de gráficos pizza reside no fato de que eles transmitem rapidamente uma ideia das porcentagens envolvidas.

Exercício 4 (OBM). *Diamantino colocou em um recipiente três litros de água e um litro de suco, o qual era composto de 20% de polpa de fruta e 80% de água. Depois de misturar tudo, que porcentagem do volume final é de polpa?*

Solução. Se em $1l = 1000ml$ de suco temos $20\% = \frac{1}{5}$ de polpa, temos $\frac{1}{5} \times 1000ml = 200ml$ de polpa. Como a mistura terá volume total de $4l = 4000ml$, concluímos que a fração que representa a quantidade de polpa nessa mistura é

$$\frac{200}{4000} = \frac{2}{40} = \frac{1}{20} = \frac{5}{100}.$$

Então, 5% do volume final corresponde a polpa de fruta. \square

Exercício 5. *Após o Natal, a dona de uma loja de roupas resolveu fazer uma liquidação e vender todas as suas peças com 20% de desconto. Maria cuida de um orfanato e, por isso, foi à loja comprar uma grande quantidade de roupas. Sabendo da causa social, a dona da loja lhe ofereceu um desconto extra de 10%. Em relação ao preço original, qual a porcentagem do desconto recebido por Maria?*

Solução. Seja p o preço inicial de uma peça de roupa. Após o primeiro desconto, o valor da roupa passou a ser de $80\%p = \frac{80}{100}p$. Como o segundo desconto (de 10%) é sobre o preço após o reajuste, concluímos que o valor final da roupa será

$$\frac{90}{100} \times \frac{80}{100}p = \frac{72}{100}p = 72\%p.$$

Portanto, em relação ao preço original, Maria receberá um desconto total de $100\% - 72\% = 28\%$. \square

Exercício 6 (OBM - adaptado). *Películas protetoras para vidros são utilizadas em janelas de edifícios e vidros de veículos para reduzir a radiação solar. As películas são classificadas de acordo com seu grau de transparência, ou seja, com o percentual da radiação solar que ela deixa passar. Se colocarmos uma película de 70% de transparência sobre um vidro com 90% de transparência, calcule a redução de radiação solar para quem se encontra no interior do ambiente.*

Solução. Argumentando de maneira análoga à solução do exemplo anterior, concluímos que o vidro deixa passar um total de radiação solar de

$$\frac{70}{100} \times \frac{90}{100} = \frac{63}{100} = 63\%$$

do valor percebido ao ar livre. Portanto, quem se encontra no interior do ambiente recebe a radiação solar com uma redução de $100\% - 63\% = 37\%$. \square

Observe que descontos ou acréscimos sempre devem ser considerados como operações de multiplicação para se evitar erros. Outro ponto a ser frisado é que é comum pensarmos que descontos sucessivos devam ser somados. Mas este raciocínio não está correto, conforme atestam as soluções dos exemplos 5 e 6. Nesses tipos de situação, porcentagens representam *medidas relativas*, ou seja, aplicadas sucessivamente, representam frações de totalidades distintas.

4 Sugestões ao professor

A representação em base decimal faz parte do cotidiano de quase toda a população global. Por isso, pode-se ter a falsa impressão de que se trata de um assunto fácil e natural. Nesse sentido, cabe lembrá-lo de que foram necessários milhares de anos para que tal representação fosse desenvolvida. É, pois, recomendável que os assuntos desta aula sejam divididos em dois encontros: o primeiro para ensinar a representação decimal e o segundo para porcentagens. Nesse caso, é aconselhável que você, professor, faça uso de mais exemplos para explicar os principais conceitos abordados em cada encontro.

Você também pode mencionar outras representações numéricas, como por exemplo a representação binária, utilizada por computadores, e o sistema de numeração romano, que, devido à sua pouca praticidade para a resolução de operações aritméticas simples, perdeu espaço, ao longo do tempo, para a representação decimal.

Dois projetos podem ser implementados com base no que foi aprendido até aqui. No primeiro, os alunos podem fazer uma pesquisa sobre qualquer assunto e em seguida, como exemplificado no texto, registrar o resultado dessa pesquisa em formato de gráfico de pizza, ilustrando as respectivas porcentagens. Caso sua escola possua computadores, esse é um excelente momento para apresentar os alunos a *softwares* de planilha, como o Excel. No segundo projeto, os

alunos podem realizar algumas operações aritméticas com números romanos, para perceber na prática o quão mais fácil é utilizar a representação decimal.

Portal da OBMEP