Ciclo 3 – Encontro 1

NÚMEROS PRIMOS, FATORAÇÃO ÚNICA EM PRIMOS, MDC E MMC VIA FATORAÇÃO EM PRIMOS

Nível 3
PO: Márcio Reis
11° Programa de Iniciação Científica Jr.

Números primos, fatoração única em primos, mdc e mmc via fatoração em primos

- Apostila 1: INICIAÇÃO À ARITMÉTICA, de Abramo Hefez.

  Seções 2.4 a 2.6:

  - Números primos;
  - Crivo de Eratóstenes;
  - Teorema Fundamental da Aritmética.

Números primos, fatoração única em primos, mdc e mmc via fatoração em primos

- Apostila: ENCONTROS DE ARITMÉTICA, de F. Dutenhefner e L. Cadar.

  Seções 2.5 e 3.1 a 3.5:

  Fatoração;

  Máximo Divisor Comum;

  Mínimo Múltiplo Comum;

  Cálculo de mdc e mmc, dada a fatoração;

  Cálculo de mdc e mmc, fatorando simultaneamente;

  Problemas de aplicação.

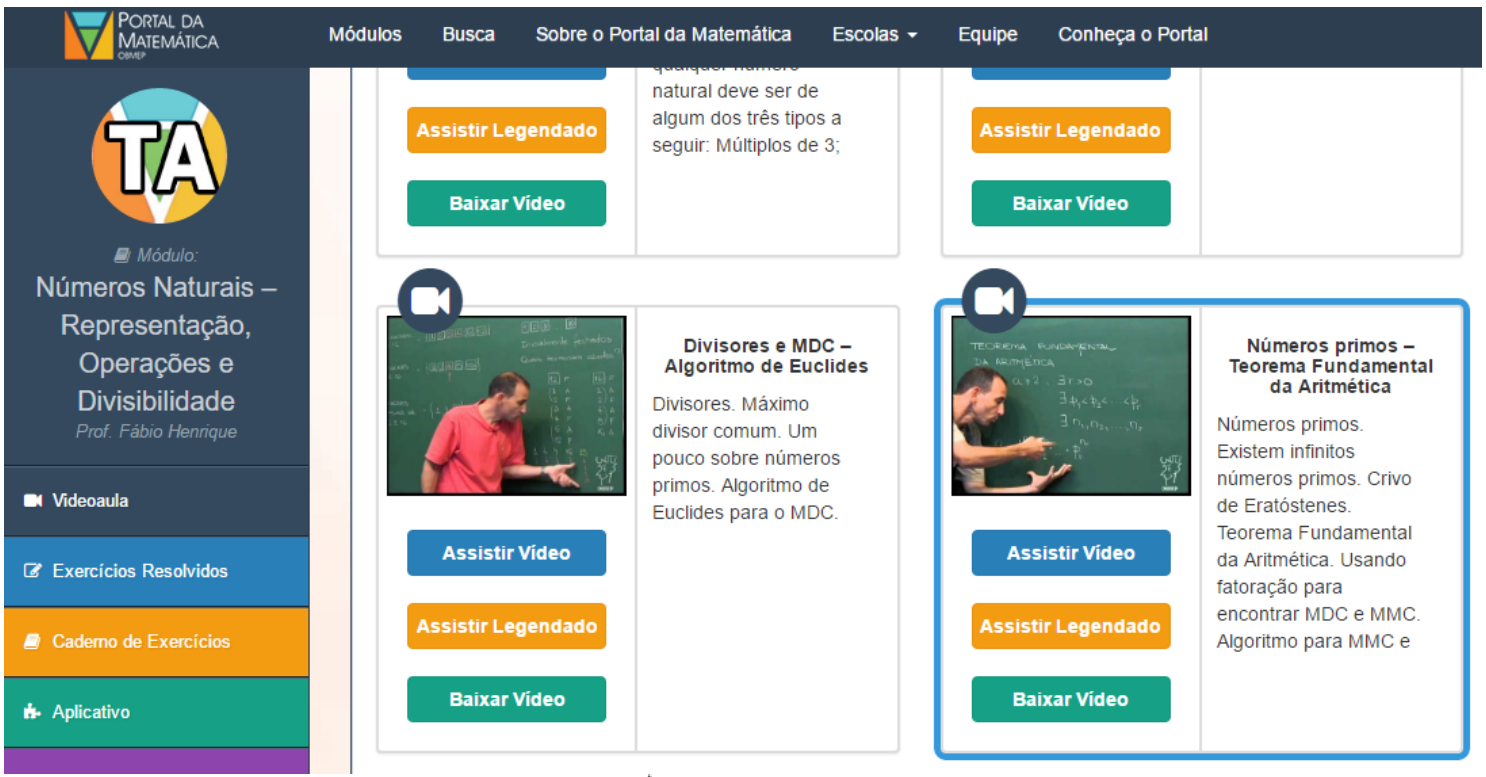
Números primos

Um número natural diferente de 0 e de 1 e que é apenas múltiplo de 1 e de si próprio é chamado de número primo. Um número diferente de 0 e de 1 que não é primo é chamado de número composto.

- Por exemplo, 2, 3, 5 e 7 são números primos, enquanto 4, 6 e 8 são números compostos, por serem múltiplos de 2.

Crivo de Eratóstenes

http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=52#v580



Teorema Fundamental da Aritmética

Dado um número natural $a \geq 2$*, existem um número* $r > 0$*, números primos* $p_1 < \cdots < p_r$ *e números naturais não nulos* $n_1, \ldots, n_r$ *tais que*

$$a = p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r} ;$$

além disso, esta escrita é única.

Teorema Fundamental da Aritmética

- **Exemplo:** Decomponha em produtos de primos os seguintes números: 4, 6, 8, 28, 36, 84.
  - $4 = 2 \times 2 = 2^2$
  - $6 = 2 \times 3$
  - $28 = 2 \times 2 \times 7 = 2^2 \times 7$
  - $36 = 2^2 \times 3^2$
  - $84 = 2 \times 41$

Fatoração

Pela própria definição de número composto, vemos que um número composto é um produto de dois números diferentes de 1. Por exemplo, vimos que 12 é composto, pois 2 é um divisor de 12 e isto significa que 12 = 2 x 6. Repetindo o mesmo raciocínio para cada uma das parcelas deste produto, observamos que 2 é primo e que ele não pode ser escrito como um produto de fatores diferentes de 1. Já o número 6 é composto e pode ser escrito como 6 = 2 x 3. Substituindo esta igualdade em 12 = 2 x 6, podemos escrever 12 = 2 x 2 x 3. Agora, neste produto cada uma das parcelas é um número primo que não pode ser escrito como um produto de números menores. Quando chegamos nesse ponto dizemos que 12 = 2 x 2 x 3 está fatorado como um produto de números primos, ou que 2 x 2 x 3 é uma fatoração do número 12 em números primos.

Fatoração

- **Exemplo:** Escreva o número 1820 como um produto de números primos.

Fatoração

Solução. Podemos fazer isto escrevendo o número 1820 ao lado de uma barra vertical. Do lado direito desta barra vamos escrevendo os divisores primos de 1820 e do lado esquerdo vamos escrevendo os resultados das divisões sucessivas por estes fatores primos, como está indicado a seguir:

$$\begin{array}{r|r} 1820 & 2 \\ 910 & 2 \\ 455 & 5 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Multiplicando os números do lado direito da barra vertical obtemos a fatoração de 1820 como um produto de números primos: $1820 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$.

Fatoração

Um número primo *p* divide um certo número natural *a* somente quando *p* é um dos fatores primos que aparece na fatoração de *a*.

Máximo Divisor Comum

Definição: mdc(a, b) é o maior divisor comum de a e de b.

- Para calcular cada um desses números, mdc(a, b), listamos os divisores de a, listamos os divisores de b, selecionamos os divisores comuns de a e de b, e identificamos mdc(a, b) como o maior divisor comum.

Exemplo: mdc(4,12) = 4

D(4)={1, 2, 4} e D(12)={1, 2, 3, 4, 6, 12}

Mínimo Múltiplo Comum

Definição: mmc(a, b) é o menor múltiplo comum de a e de b.

- Para calcular cada um desses números, mmc(a, b), listamos os múltiplos de a, listamos os múltiplos de b, e identificamos o mmc(a, b) como o menor múltiplo comum

Exemplo: mmc(4,12) = 12

M(4)={4, 8, 12, 16, ...} e M(12)={12, 24, 36, ...}

Cálculo de mdc e mmc, dada a fatoração

Dois números naturais *a* e *b* são relativamente primos, ou primos entre si, se não existir um número primo que divide simultaneamente *a* e *b*. De modo equivalente, isto significa que $mdc(a, b) = 1$. Por exemplo, $28 = 2^2 \times 7$ e $45 = 3^2 \times 5$ são relativamente primos, ou primos entre si, pois não existe um fator primo em comum entre *a* e *b*. De modo equivalente isto também poderia ser concluído do fato de $mdc(28, 45) = 1$.

Cálculo de mdc e mmc, dada a fatoração

Se $a = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2$ identifique quais dos seguintes números são múltiplos de a.

(a) $2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3$

(b) $2 \cdot 5 \cdot 7^4 \cdot 13^2$

(c) $2^5 \cdot 5^2 \cdot 7$

(d) $2^3 \cdot 5 \cdot 7^6 \cdot 13 \cdot 19^2$

(e) $2^7 \cdot 5^3 \cdot 7^4 \cdot 60$

Cálculo de mdc e mmc, dada a fatoração

Solução. Se m é um múltiplo de a, então existe um número n tal que $m = na = n \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2$. Isto implica que na fatoração de m devem aparecer pelo menos os elementos 2^3, 5 e 7^2 e, portanto, que m deve ter a forma $m = 2^x \cdot 5^y \cdot 7^z \cdot n$, em que $x \geq 3$, $y \geq 1$, $z \geq 2$ e n é qualquer número natural. Daí segue que, entre os números dados, somente em (a), (d) e (e) encontramos múltiplos de a.

Cálculo de mdc e mmc, fatorando simultaneamente

Calcule mdc(100, 140).

D(100)={1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100}

D(140)={1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 70, 140}

Cálculo de mdc e mmc, fatorando simultaneamente

Calcule mdc(100, 140).

$$\begin{array}{rcr|l} 100 & , & 140 & 2 \\ 50 & , & 70 & 2 \\ 25 & , & 35 & 5 \\ 5 & , & 7 & \end{array}$$

Como 5 e 7 são primos entre si (eles não possuem divisor primo em comum), paramos o processo e vemos que mdc(100, 140) = 2^2 x 5 = 20, pois do modo como esse número foi construído, ele ´e um divisor comum de 100 e 140 e ele é o maior possível, pois testamos todas as possibilidades de divisores comuns.

Exercício 1

Múltiplo de 7 – Mostre que se o produto $N = (n+6m)(2n+5m)(3n+4m)$ é múltiplo de 7, com m e n números naturais, então N é múltiplo de $7^3 = 343$.

Exercício 1 - Solução

Múltiplo de 7 – Inicialmente, observemos que:

$$
\begin{aligned}
N &= (n+6m)(2n+5m)(3n+4m)\\
&= (n+7m-m)(2n+7m-2m)(3n+7m-3m)\\
&= (n-m+7m)[2(n-m)+7m][3(n-m)+7m]\\
&= (k+7m)(2k+7m)(3k+7m),
\end{aligned}
$$

onde $k = n - m$.

Exercício 1 - Solução

(i) Se $k+7m$ é múltiplo de 7, então $\dfrac{k+7m}{7} = \dfrac{k}{7} + m$ é inteiro, logo k é múltiplo de 7. Segue que $2k$ e $3k$ também são múltiplos de 7 e portanto os três fatores $k+7m$, $2k+7m$ e $3k+7m$ são múltiplos de 7. Concluímos que N é múltiplo de 7^3.

(ii) Se $2k+7m$ é múltiplo de 7, então $\dfrac{2k+7m}{7} = \dfrac{2k}{7} + m$ é inteiro, logo $2k$ é múltiplo de 7. Como 2 e 7 são primos entre si, segue que k é múltiplo de 7, o que leva ao caso anterior.

(iii) Se $3k+7m$ é múltiplo de 7, analogamente concluímos que k é múltiplo de 7.

Exercício 2

Encontre o número – Qual é o menor número inteiro positivo N tal que $N/3, N/4$, $N/5, N/6$ e $N/7$ sejam todos números inteiros?

(a) 420 (b) 350 (c) 210 (d) 300 (e) 280

Exercício 2 - Solução

Encontre o número – A opção correta é (a).

Para que $\frac{N}{3}, \frac{N}{4}, \frac{N}{5}, \frac{N}{6}$ e $\frac{N}{7}$ sejam números inteiros, N deve ser um múltiplo comum de 3, 4, 5, 6 e 7. Como queremos o menor N possível, ele deve ser o mínimo múltiplo comum (MMC) de 3, 4, 5, 6 e 7, ou seja,

$$N = 3 \times 4 \times 5 \times 7 = 420.$$

Exercício 3

Em uma lousa são escritos os 2014 inteiros positivos de 1 até 2014. A operação permitida é escolher dois números a e b, apagá-los e escrever em seus lugares os números $mdc(a,b)$(Máximo Divisor Comum) e $mmc(a,b)$(Mínimo Múltiplo Comum). Essa operação pode ser feita com quaisquer dois números que estão na lousa, incluindo os números que resultaram de operações anteriores. Determine qual a maior quantidade de números 1 que podemos deixar na lousa.

Exercício 3 - Solução

A maior quantidade de números 1 que podemos deixar é 1007. Primeiro vamos mostrar como obtê-los. Para isso, basta tomar os pares de números consecutivos, $(1,2)$, $(3,4)$, $(5,6)$, $\ldots$, $(2013,2014)$ e realizar a operação em cada par. Sabendo que números consecutivos não têm fator comum, cada um dos máximos divisores comuns será 1.

Não é possível obter mais do que isso pois a quantidade de números pares não se altera no decorrer das operações. Isso ocorre pois, se operarmos com dois números pares, teremos como resultado dois números pares, se operarmos com dois números ímpares teremos como resultado dois números ímpares e se operarmos com um número par e um número ímpar obteremos também um número par e um número ímpar. Começamos com 1007 números pares e sempre teremos 1007 números pares.

Exercício 4

Três atletas correm numa pista circular e gastam, respectivamente, $2,4\ min$, $2,0\ min$ e $1,6\ min$ para completar uma volta na pista. Eles partem do mesmo local e no mesmo instante. Após algum tempo, os três atletas se encontram, pela primeira vez, no local de largada. Neste momento, o atleta mais veloz estará completando quantas voltas?

Exercício 4 - Solução

Solução. Para utilizar apenas números inteiros, em vez de considerar minutos como unidade de tempo, vamos utilizar segundos. Como um minuto possui 60 segundos, multiplicando os tempos em minutos por 60, vemos que os atletas percorrem uma volta na pista em 144 *seg*, 120 *seg* e 96 *seg*. Como cada atleta percorre voltas na pista em tempos que são múltiplos do tempo que ele gasta para percorrer uma volta, vemos que eles se encontrarão novamente, pela primeira vez, no local da largada após um tempo igual ao $mmc(144, 120, 96) = 1440$ segundos. Neste instante os atletas estarão completando $1440 \div 144 = 10$ voltas, $1440 \div 120 = 12$ voltas e $1440 \div 96 = 15$ voltas. Portanto, neste instante, o atleta mais veloz (aquele que gasta menos tempo para percorrer uma volta) estará completando 15 voltas.

Exercício 5

Determine o menor número inteiro positivo de três algarismos que é divisível, ao mesmo tempo, por 4, 8 e 12.

Exercício 5 - solução

Solução. Dizer que um número é divisível por 4, 8 e 12 é o mesmo que dizer que este número é um múltiplo, ao mesmo tempo, de 4, 8 e 12. Como sabemos, todos os múltiplos de 4, 8 e 12 são múltiplos do $mmc(4, 8, 12) = 24$. Como $2 \times 24 = 48$, $3 \times 24 = 72$, $4 \times 24 = 96$ e $5 \times 24 = 120$, concluímos que o menor número inteiro positivo de três algarismos que é divisível, ao mesmo tempo, por 4, 8 e 12 é o número 120.

Exercício 6

Em um cesto haviam ovos. Eram mais de 50 e menos de 60. Contando de 3 em 3, sobravam 2. Contando de 5 em 5, sobravam 4 ovos. Qual é a quantidade de ovos no cesto?

Exercício 6 - Solução

$50 < x < 60$

51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59

M(3) = {..., 51, 54, 57, ...}

M(5) = {..., 55, ...}

52, 53, 56, 58, 59

Contando de 3 em 3, sobravam 2. Contando de 5 em 5, sobravam 4 ovos.

$52 – 2 = 48$ e $52 – 4 = 48$

$53 – 2 = 51$ e $53 – 4 = 49$

$56 – 2 = 54$ e $56 – 4 = 52$

$58 – 2 = 56$ e $58 – 4 = 54$

$59 – 2 = 57$ e $59 – 4 = 55$

Eram 59 ovos.

Exercício 7

Liste todos os divisores positivos de $a = 2^3 \cdot 5^2$.

Exercício 7 - Solução

Solução. Se d é um divisor de a, então os únicos fatores primos de d são 2 e 5. Deste modo $d = 2^x \cdot 5^y$. Mais ainda, como a é um múltiplo de d, podemos escrever $a = dn$, e isto implica que as potências x e y dos números 2 e 5 na fatoração de d devem ser menores do que ou iguais as potências dos números 2 e 5 na fatoração de a. Logo $x \leq 3$ e $y \leq 2$. Portanto, $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $y \in \{0, 1, 2\}$. Fazendo todas as possibilidades, listamos todos os divisores de a, que são:

Exercício 7 - Solução

$$x = 0 \text{ e } y = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 2^0\, 5^0 = 1.$$
$$x = 0 \text{ e } y = 1 \quad \Rightarrow \quad d = 2^0\, 5^1 = 5.$$
$$x = 0 \text{ e } y = 2 \quad \Rightarrow \quad d = 2^0\, 5^2 = 25.$$
$$x = 1 \text{ e } y = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 2^1\, 5^0 = 2.$$
$$x = 1 \text{ e } y = 1 \quad \Rightarrow \quad d = 2^1\, 5^1 = 10.$$
$$x = 1 \text{ e } y = 2 \quad \Rightarrow \quad d = 2^1\, 5^2 = 50.$$
$$x = 2 \text{ e } y = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 2^2\, 5^0 = 4.$$
$$x = 2 \text{ e } y = 1 \quad \Rightarrow \quad d = 2^2\, 5^1 = 20.$$
$$x = 2 \text{ e } y = 2 \quad \Rightarrow \quad d = 2^2\, 5^2 = 100.$$
$$x = 3 \text{ e } y = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 2^3\, 5^0 = 8.$$
$$x = 3 \text{ e } y = 1 \quad \Rightarrow \quad d = 2^3\, 5^1 = 40.$$
$$x = 3 \text{ e } y = 2 \quad \Rightarrow \quad d = 2^3\, 5^2 = 200.$$

Estudar para o próximo encontro!

Próximo encontro: 03/09, sábado, às 08h30

Assistir às vídeo aulas do Módulo **Introdução à Probabilidade**:
http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=46

- Probabilidade - Introdução - Parte 01
- Probabilidade - Introdução - Parte 02
- Probabilidade - Introdução - Parte 03
- Probabilidade - Probabilidade em espaço amostral finito e equiprovável