1)

CM1 — Ch1 → CM1 Ch1

CM1 — Ch2 → CM1 Ch2

CM2 — Ch1 → CM2 Ch1

CM2 — Ch2 → CM2 Ch2

CM3 — Ch1 → CM3 Ch1

CM3 — Ch2 → CM3 Ch2

6 maneiras diferentes.

$3 \cdot 2 = 6$

2) $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ sanduíches diferentes.
pão . carne . queijo

3) $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^3 \cdot 10^4$
$= 175760000$ formas.

4) $\underline{3} \cdot \underline{4} \cdot \underline{4} = 48$ números a)

b) $\underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} = 18$ números

5) $i = 1 \Rightarrow 1 \leq a_1 \leq 9 \Rightarrow a_1 \in \{1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$

$i = 2 \Rightarrow 2 \leq a_2 \leq 9 \Rightarrow a_2 \in \{2, 3, \ldots, 8, 9\}$

$\vdots$

$i = 7 \Rightarrow 7 \leq a_7 \leq 9 \Rightarrow a_7 \in \{7, 8, 9\}$

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^7 = 2187$

$a_7 \cdot a_6 \cdot a_5 \cdot a_4 \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1$

6) $A \rightarrow 3 \cdot 4 = 12$
$B \rightarrow 2 \cdot 2 = 4$
não há $\cap$
elementos em comum

$12 + 4 = 16$ maneiras diferentes.

7) $M(3) = \{3, 6, 9, 12, 15\}$
$M(7) = \{7, 14\}$
não há $\cap$
elementos
em comum

$5 + 2 = 7$ nºs inteiros.

8) $M(5) = \{5, 10, 15\}$ → há elementos em comum em $M(3)$ e $M(5)$

$M(3) \cup M(5) = \{3, 5, 6, 9, 10, 12, 15\}$
↳ 7 nºs inteiros.

$5 + 3 - \underbrace{1}_{} = 7$
subtrai a quantidade de elementos que se repete.

9) Vejamos quantas palavras de 5 letras não possuem duas letras consecutivas iguais:

$\underline{26} \cdot \underline{25} \cdot \underline{25} \cdot \underline{25} \cdot \underline{25} = 26 \cdot 25^4$

Total de palavras de 5 letras:

$\underline{26} \cdot \underline{26} \cdot \underline{26} \cdot \underline{26} \cdot \underline{26} = 26^5$

$26^5 - 26 \cdot 25^4 = 11881376 - 10156250 = 1725126$ //

(10) $\underset{A}{\underline{5}} \cdot \underset{C}{\underline{7}} = 35$

$\underset{A}{\underline{5}} \cdot \underset{G}{\underline{10}} = 50$

$\underset{C}{\underline{7}} \cdot \underset{G}{\underline{10}} = 70$

$35 + 50 + 70 = 155$ maneiras //

(11) $\underset{L}{\underline{10}} \cdot \underset{P}{\underline{9}} = 90$ //

$\underline{10} \cdot \underline{10} = 100$ //

L — P

1 → 2, 3, ⋮, 10 ] 9 possib.

2 → 1, 3, 4, ⋮, 10 ] 9 possib.

3

4

5 ⋮

6

7

8

9

10 → 1, 2, ⋮, 9 ] 9 possib.

$10 \cdot 9 = 90$ //

(12) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ (fila) a)

b) Podemos mover cada funcionário p/ a cadeira a sua esquerda 6 vezes até voltar às posições iniciais, já que são 6 funcionários. Então o nº de maneiras distintas de colocar os funcionários na mesa é $\frac{720}{6} = 120$.

c) $\underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} = 120$ maneiras.
pres. vice. sup.

13) a) $\underline{10} \cdot \underline{9} \cdot \underline{8} = 720$ maneiras

b) $\underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 6$ comissões

c) $720/6 = 120$ comissões

14)

13

### 11 *Comissões – Solução*

a) Para escolher o porta-voz, temos 10 possibilidades, já que são dez alunos. Escolhido o porta-voz, temos agora 9 possibilidades para escolher o aluno que será o diretor de artes. Finalmente, para escolher o assessor técnico, restam 8 possibilidades. Logo, temos

$$10 \times 9 \times 8 = 720$$

maneiras diferentes para escolher a comissão pedida.

b) Podemos listar todas as comissões que têm os três alunos Marcelo, Leandro e Renato. Estas são:

| Porta-voz | Diretor de Artes | Assessor Técnico |
|---|---|---|
| Marcelo | Renato | Leandro |
| Marcelo | Leandro | Renato |
| Renato | Leandro | Marcelo |
| Renato | Marcelo | Leandro |
| Leandro | Marcelo | Renato |
| Leandro | Renato | Marcelo |

Logo, temos seis comissões possíveis. Outra maneira de obter o mesmo resultado seria: para escolher o porta-voz, temos 3 possibilidades dentre Marcelo, Renato e Leandro. Escolhido o porta-voz, restam duas possibilidades para escolher o diretor de artes. E escolhidos os dois cargos anteriores, só resta uma possibilidade para escolher o último cargo. Logo, temos

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

maneiras diferentes para escolher uma comissão que tenha os alunos Marcelo, Leandro e Renato.

c) Agora não há mais cargos. Logo, as comissões listadas no item b) são todas iguais (representam a mesma comissão formada por Marcelo, Renato e Leandro). Para contar quantas são as comissões sem cargo, vamos agrupar as comissões com cargos (porta-voz, diretor de artes e assessor técnico) em grupos de seis comissões que tenham os mesmos três alunos. Como são 720 comissões com cargo, e são grupos de 6 com as mesmas pessoas, obtemos

$$\frac{720}{6} = 120$$

maneiras diferentes de compor uma comissão sem cargos.

## 3 *Formando frações com dominós*

Um jogo comum de dominó é composto por 28 peças. Cada peça é formada por dois números inteiros que variam de 0 a 6, inclusive. Todas as possibilidades de combinações possíveis $(a,b)$, com $a \leq b$, são listadas exatamente uma vez. Note que a peça $(4,2)$ é listada como a peça $(2,4)$, pois $2 \leq 4$. Excluindo a peça $(0,0)$, para cada uma das outras 27 peças $(a,b)$, com $a \leq b$, escrevemos num quadro a fração $\frac{a}{b}$.

a) Quantos valores distintos estão escritos nas formas de frações no quadro? (Veja que as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ têm o mesmo valor e devem ser contadas apenas uma vez.)

b) Qual a soma dos valores distintos encontrados no item anterior?

Tu

## 3 *Formando frações com dominós – Solução*

a) Basta começar contando pelos maiores denominadores e não repetir quando aparecerem os menores.

i) Para $b = 6$, temos
$$\left(\frac{0}{6},\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{3}{6},\frac{4}{6},\frac{5}{6},\frac{6}{6}\right) = \left(0,\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{6},1\right).$$

ii) Para $b = 5$, não devemos repetir $0 = 0/5$ e nem $1 = 5/5$, pois já foram contados, temos
$$\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right).$$

iii) Para $b = 4$, só podemos adicionar frações irredutíveis de denominador 4, pois já contamos as de denominador 1 e 2 quando $b = 6$, temos então
$$\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right).$$

iv) Quando $b$ for 1, 2 ou 3, teremos frações que já foram contadas no caso $b = 6$. Verifique!

Logo, o número de valores distintos é $7 + 4 + 2 = 13$.

b) Um bom jeito de somarmos as 13 frações é considerarmos suas formas redutíveis vistas no item anterior, ou seja,
$$\begin{aligned}
\frac{0}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}+\frac{6}{6} &= \frac{21}{6}\\
&= \frac{7}{2};\\
\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5} &= \frac{10}{5}\\
&= 2;\\
\frac{1}{4}+\frac{3}{4} &= 1.
\end{aligned}$$

Então a soma total é $\frac{7}{2} + 2 + 1 = \frac{13}{2}$.

15

___ ___ ___ ___ → tem que ser par (0, 2, 4 e 6)

dígitos com restrições

não pode ser zero
(1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7)

escolhendo o resto dígito temos 7 possibilidades p/ o 1º; escolhendo um nº ≠ de 0 neste, temos 6 possibilidades p/ o 1º

Vamos então dividir em 2 casos: último dígito 0
último dígito ≠ 0

$\_\_\_ \; \_\_\_ \; \_\_\_ \; \underline{0}$

$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 1 = 210$ nºs pares terminados em 0.

$\_\_\_ \; \_\_\_ \; \_\_\_ \; \underline{2,4 \text{ ou } 6}$

$6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 = 36 \times 15 = 540$ nºs pares terminados em 2, 4 ou 6

não pode ser zero — pode ser zero

Total: $210 + 540 = 750$

ou

16

$\_\_\_ \; \_\_\_ \; \_\_\_ \; \_\_\_ \; \_\_\_$

$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 4 \cdot 3^4 =$
$= 4 \cdot 81 = 324$

17

$\_\_\_ \; \_\_\_ \; \_\_\_$

$8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ sócios podem se inscrever!

18 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

1 → Arnaldo 2 → Bernaldo

Cada um dos outros 8 brinquedos pode ficar com A, B ou com o Papai Noel, então temos 3 possibilidades p/ cada brinquedo.

$$\underbrace{3}_{A,\,B\text{ ou }PN} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^8$$

Nesse caso incluímos as possibilidades em que A e B não deixam brinquedo p/ o papai noel. Se contarmos somente esses casos e subtrairmos quantos são de $3^8$ temos o total de casos em que eles dividem os brinquedos deixando ao menos um para o PN.

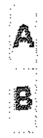
São eles:

$$\underbrace{2}_{A\text{ ou }B} \cdot 2 \cdot \quad \cdot 2 = 2^8$$

Então temos $3^8 - 2^8$ modos para eles dividirem os 8 brinquedos deixando ao menos um para o PN.

$$3^8 - 2^8 = 6561 - 256 = 6305$$

**N3Q3 – Solução**




a) O algarismo 1 é composto por dois polígonos, indicados na figura por A e B. Para pintar o polígono A, há 3 opções: branco, cinza e preto. Já para pintar o polígono B, há 2 opções, uma vez que sua cor não pode coincidir com aquela já usada para pintar A. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, o algarismo 1 pode ser pintado de $3 \times 2 = 6$ maneiras distintas.


b) Iniciamos observando que há 3 opções para pintar o polígono A. Uma vez que A foi pintado, há duas opções para pintar o polígono B e, como o polígono C é vizinho de A e B, só há uma cor possível para C.

A cor do polígono D não deve coincidir com a cor de B, logo para cada cor escolhida para B, há 2 opções para a cor de D. Analogamente, há 2 opções para a cor de E.

Assim, pelo Princípio Multiplicativo, há $3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2 = 24$ maneiras distintas para pintar o algarismo 3.

A B C D E


c) Vamos distinguir dois casos.

- *As cores de A e B coincidem*: neste caso há 3 opções de cores para A e B, e restam 2 opções de cores para C e 2 para D. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o algarismo 0 pode ser pintado de $3 \times 2 \times 2 = 12$ maneiras distintas.
- *As cores de A e B são diferentes*: neste caso, há 3 opções de cores para pintar A e, para cada uma dessas, há 2 opções para pintar B, restando apenas 1 opção para C e também para D. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o algarismo 0 pode ser pintado de $3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$ maneiras distintas.

Segue do Princípio Aditivo que o algarismo 0 pode ser pintado de $12 + 6 = 18$ maneiras distintas.

d) Basta pintar os algarismos 2, 0, 1 e 3; o 2 pode ser pintado de $3 \times 2 \times 2 = 12$ maneiras diferentes e o número de maneiras de pintar os outros algarismos já foi calculado nos itens anteriores. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, há $12 \times 6 \times 24 \times 18 = 31104$ maneiras distintas de pintar o número 2013.

2 1 3 0