Exercícios

1.Num torneio com 6 times, cada time joga com cada um dos outros uma única vez. Quantos são os jogos?

2. Dadas duas retas paralelas r e s. Sobre r tomam-se 5 pontos e sobre s tomam-se 4 pontos. Quantos triângulos podemos formar com vértices em 3 desses 9 pontos?

3. O número 2568 possui dígitos em ordem crescente. Os números 5667 e 3769 não possuem dígitos em ordem crescente. Quantos são os números naturais entre 1000 e 9999 que possuem seus dígitos em ordem crescente?

4. Quantos são os números naturais de 7 algarismos nos quais o algarismo 4 figura exatamente 3 vezes e o algarismo 8 exatamente 2 vezes?

5.De quantos modos podemos formar uma roda com 5 meninos e 5 meninas de modo que crianças de mesmo sexo não fiquem juntas?

6.Um campeonato é disputado por 12 clubes em rodadas de 6 jogos cada. De quantos modos é possível selecionar os jogos da primeira rodada?

Solução 1: $C_6^2 = \dfrac{6!}{4! \times 2!} = 15.$

Solução 2: Basta tomar dois pontos de uma reta e um da outra, ou seja, $4 \times C_5^2 + 5 \times C_4^2 = 4 \times 10 + 5 \times 6 = 70$ triângulos.

Solução 3: O primeiro fato é que o 0 não pode fazer parte do número pois, se fizesse, não poderia estar à esquerda e se estivesse na casa da unidade, dezena ou centena, seria menor que alguém à esquerda. O segundo fato é que todos os algarismos devem ser diferentes. Tomemos agora um destes que atende às característica do problema, por exemplo, 1234. É fácil perceber que, de todas as permutações com os algarismos 1, 2, 3 e 4, apenas em uma delas eles estão em ordem crescente, ou seja, basta escolher quatro algarismos de nove que teremos apenas uma sequência possível. Sendo assim, o total de números é $C_9^4 = 126$.

Solução 4: Vamos esquecer que a primeira casa do número não pode ser igual a zero. Isso fará com que contemos a mais e, depois, descontaremos o que foi contado indevidamente.

Há C_7^3 modos de escolher as casas que serão ocupadas pelo algarismo 4; depois disso, há C_4^2 modos de selecionar as casas que serão ocupadas pelo algarismo 8; finalmente, as duas casas restantes podem ser preenchidas de 8×8 modos (não podemos usar nessas casas os algarismos 4 e 8).

A resposta seria $C_7^3 \times C_4^2 \times 8 \times 8 = 35 \times 6 \times 64 = 13440$. Devemos subtrair os números começados por 0. Se o número começa por 0, há C_6^3 modos de escolher as casas que serão ocupadas pelo algarismo 4; depois disso, há C_3^2 modos de selecionar as casas que serão ocupadas pelo algarismo 8; finalmente, a casa restante pode ser preenchida de 8 modos (não podemos usar nessa casa os algarismos 4 e 8). Há $C_6^3 \times C_3^2 \times 8 = 20 \times 3 \times 8 = 480$ números começados por 0.

A resposta é $13440 - 480 = 12960$.

Solução 5. Há $PC_5 = 4!$ modos de formar uma roda com as meninas. Depois disso, os 5 meninos devem ser postos nos 5 lugares entre as meninas, o que pode ser feito de 5! modos. A resposta é $4! \times 5! = 24 \times 120 = 2880$.

Solução 6. Colocando os 12 times em fila automaticamente formamos os 6 jogos da rodada. No entanto, a mesma rodada é contada várias vezes; os adversários em cada jogo podem ser ordenados de 2 modos, enquanto os jogos podem ser ordenados de 6! modos. A resposta é, portanto, $\frac{12!}{2^6 \times 6!}$