AULA 08: **ARITMÉTICA** – ALGORITMO DO MDC DE EUCLIDES, RELAÇÃO DE BÉZOUT E APLICAÇÕES, EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES.

- Resoluções dos exercícios:

I. Usando o algoritmo de Euclides: $n^2 + 1 \div n + 1$ = n - 1 e o resto é 2.

Portanto mdc(n + 1, n² + 1) = mdc(2, n + 1).

Se n + 1 for par o mdc é 2 e se n + 1 for ímpar o mdc é 1.

II. $1218 \div 648$ = 1 e resto 570.

$648 \div 570$ = 1 e resto 78.

$570 \div 78$ = 7 e resto 24.

$78 \div 24$ = 3 e resto 6.

$24 \div 6$ = 4.

Portanto mdc(648, -1218) = 6.

mdc(648, -1218) = 648x + (-1218)y

6 = 648x - 1218y.

Para resolver essa equação temos que:

1218 = 1.648 + 570 e 1218 – 1.648 = 570;

648 = 1.570 + 78 e 648 – 1.570 = 78;

570 = 7.78 + 24 e 570 – 7.78 = 24;

78 = 3.24 + 6 e 78 – 3.24 = 6.

Usando a terceira equação na quarta:

$78 – 3.24 = 6$

$78 – 3.(570 – 7.78) = 6$

$22.78 – 3.570 = 6$. Usando agora a segunda equação:

$22.(648 – 1.570) – 3.570 = 6$

$22.648 – 25.570 = 6$. Usando agora a primeira equação:

$22.648 – 25.(1218 – 1.648) = 6$

$47.648 – 25.1218 = 6$.

Portanto $x = 47$ e $y = 25$

III. a) Seja $3k$ o múltiplo de 3 e q é o quociente da divisão de $3k$ por 15:

$15q + 8 = 3k$

$3k – 15q = 8$.

A equação só tem soluções se mdc(3, -15) dividir 8, mas 3 não divide 8, portanto não existem múltiplos de 3 que deixam resto 8 na divisão por 15.

b) Usando o mesmo raciocínio do item anterior:

$15q + 8 = 2k$

$2k – 15q = 8$.

Como mdc(2, -15) = 1 e divide 8, a equação tem solução.

Uma solução possível é $k = 4$ e $q = 0$.

As soluções são:

$k = 4 + 15n$ e $q = 0 + 2n$.

Portanto são números da forma $8 + 30n$ que vão deixar resto 8 na divisão por 15.

IV. Sejam A, B, C, D, E e F a quantidade de bolas em cada caixa:

A + B + C + D + E + F = 20. Como em cada caixa há pelo menos uma bola:

A + 1 + B + 1 + C + 1 + D + 1 + E + 1 + F + 1 = 20

A + B + C + D + E + F = 14.

Essa equação pode ser resolvida através da combinação completa, onde o número de soluções inteiras positivas é: $\frac{19!}{14!\cdot 5!} = \frac{19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{1395360}{120} = 11628.$

V. Repetindo o raciocínio do exercício anterior, substituindo 6 por m e 20 por n:

$A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_{m-1} + A_m = n$. Como em cada caixa há pelo menos uma bola:

$A_1 + 1 + A_2 + 1 + A_3 + 1 + ... + A_{m-1} + 1 + A_m + 1 = n$

$A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_{m-1} + A_m + m = n$

$A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_{m-1} + A_m = n - m$.

O número de soluções inteiras positivas é: $\frac{(n-m+m-1)!}{(n-m)!\cdot(m-1)!} = \frac{(n-1)!}{(n-m)!\cdot(m-1)!}$.

VI. a) $A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_{k-1} + A_k = n$.

O total de soluções naturais dessa equação é: $\frac{(n+k-1)!}{n!\cdot(k-1)!}$.

b) $A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_{k-1} + A_k = n$. Como nenhuma das parcelas pode ser zero:

$A_1 + 1 + A_2 + 1 + A_3 + 1 + ... + A_{k-1} + 1 + A_k + 1 = n$

$A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_{k-1} + A_k + k = n$

$A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_{k-1} + A_k = n - k$.

O número de soluções inteiras não negativas é: $\frac{(n-k+k-1)!}{(n-k)!\cdot(k-1)!} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!\cdot(k-1)!}$.