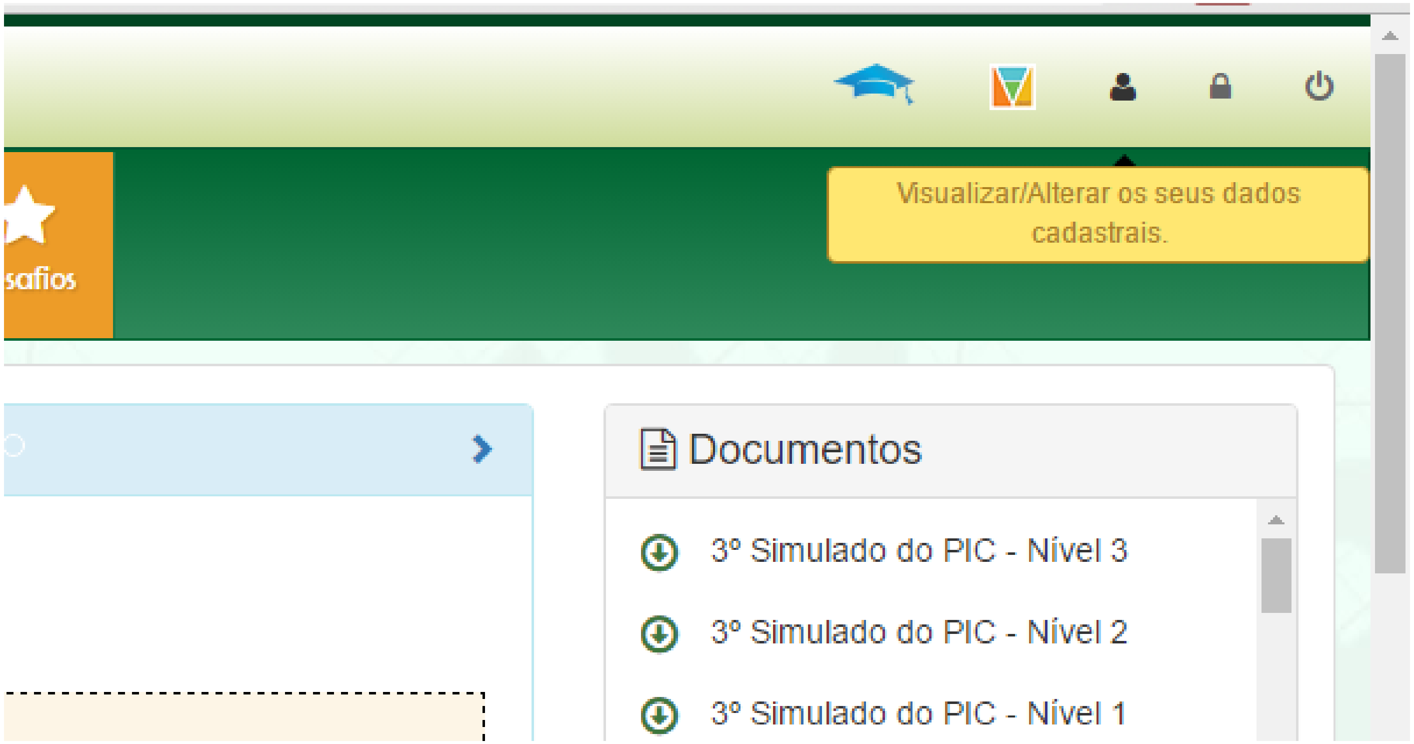
Ciclo 2 – Encontro 2

PERMUTAÇÕES E COMBINAÇÕES

Nível 3
PO: Márcio Reis
11º Programa de Iniciação Científica Jr.

ATUALIZAR O ENDEREÇO RESIDENCIAL ATÉ 07/08!



ATUALIZAR O ENDEREÇO RESIDENCIAL ATÉ 07/08!

Meus dados

Dados pessoais | Trocar senha

Endereço Residencial
Rua Tomaz Falbo

Número

Complemento

Bairro
Santa Mônica

CEP

Estado
MG - Minas Gerais

Cidade
UBERLANDIA

11º PIC Programa de Iniciação Científica da OBMEP

Permutações e combinações

- Texto: O fatorial de um número e as permutações simples, Prof. Fabrício Siqueira Benevides;
- Texto: Arranjos e Combinações Simples, Prof. Fabrício Siqueira Benevides.

O fatorial de um número natural

- Relembrando:

Princípio fundamental da Contagem

"Se desejamos executar uma sequência de n ações, onde a primeira ação pode ser executada de m1 maneiras, a segunda de m2 maneiras e assim sucessivamente, até que a n-ésima ação pode ser executada de mn maneiras, então o número total de maneiras de executar essa sequência de ações é igual ao produto m1m2 . . . mn."

O fatorial de um número natural

- Quatro pessoas, Ana, Bruno, Carlos e Davi chegaram ao mesmo tempo em uma agência bancária que possui apenas um atendente. De quantas maneiras podemos formar uma fila entre eles, determinando assim a ordem em que eles serão atendidos?

$$\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_ = \mathbf{4} \times \mathbf{3} \times \mathbf{2} \times \mathbf{1} = \mathbf{24}$$

O fatorial de um número natural

- Suponha que agora sejam ***n*** pessoas nessa mesma situação.

$$\_\_\ \_\_\ \_\_\ \ldots\ \_\_\ \_\_ = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{(n-1)} \times \boldsymbol{(n-2)} \times \ldots \times \boldsymbol{2} \times \boldsymbol{1}$$

Não é difícil perceber que o total de maneiras de formar uma fila entre as ***n*** pessoas pode ser calculado de modo semelhante, escolhendo um a um quem ocupará cada posição da fila, e que, pelo PFC, obtém-se o resultado acima, ou seja, o ***produto*** entre todos os números naturais de ***1*** até ***n***.

O fatorial de um número natural

- Produtos como o anterior aparecem com bastante frequência em problemas de contagem, uma vez que, em vários desses problemas, o passo inicial em suas resoluções consiste em escolher uma ordem para um dado grupo de objetos. Além disso, esse tipo de produto também aparece em fórmulas utilizadas em outros conceitos básicos, como os de arranjo e combinação. Por isso, é conveniente dar um nome para tais produtos.

O fatorial de um número natural

Dado um número natural ***n****, o* ***produto de todos os naturais de 1 até n*** *é chamado de* ***fatorial de n*** *e é representado, em símbolos, por* ***n!*** *(onde se lê* ***n-fatorial****).*

Assim, temos: $\boldsymbol{n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$.

Além disso, por convenção, definimos $\boldsymbol{0! = 1}$.

O fatorial de um número natural

Fatoriais de números pequenos:

- $0! = 1$
- $1! = 1$
- $2! = 2 \cdot 1 = 2$
- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
- $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

O fatorial de um número natural

Simplificando expressões algébricas que envolvem fatorial:

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

- $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \rightarrow 7! = 7 \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \rightarrow 7! = 7 \cdot 6! \rightarrow 7! = 7 \cdot 720 \rightarrow 7! = 5040$

- $9! = 9 \cdot 8! \rightarrow 9! = 9 \cdot 8 \cdot 7! \rightarrow 9! = 9 \cdot 8 \cdot 5040 \rightarrow 9! = 362880$

O fatorial de um número natural

Simplificando expressões algébricas que envolvem fatorial:

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

$$\frac{20!}{18!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times \ldots \times 2 \times 1}{18 \times 17 \times \ldots \times 2 \times 1} = 20 \times 19 = 380$$

$$\frac{20!}{18!} = \frac{20 \times 19 \times 18!}{18!} = 20 \times 19 = 380$$

O fatorial de um número natural

Simplificando expressões algébricas que envolvem fatorial:

$$n! = n \cdot (n - 1)!$$

$$\frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} =$$

$$\frac{6!}{5! \times 4!} =$$

O fatorial de um número natural

Simplificando expressões algébricas que envolvem fatorial:

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

$$\frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} = \frac{6-1}{6!} = \frac{5}{6!} = \frac{5}{6 \times 5 \times 4!} = \frac{1}{6 \times 4!} = \frac{1}{6 \times 24} = \frac{1}{144}$$

$$\frac{6!}{4! \times 5!} = \frac{6 \times 5!}{4! \times 5!} = \frac{6}{4!} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

Permutações

- A noção de permutação está ligada ao ato de permutar, ou seja, **reordenar um grupo de objetos**. Dado um conjunto finito A, uma permutação dos elementos de A é uma lista ordenada, ou seja, uma sequência, na qual cada elemento de A aparece exatamente uma vez. Por exemplo, quando A = {v, w, x, y, z}, temos que a lista ordenada (x, v, w, z, y) é uma permutação dos elementos de A, na qual o primeiro elemento é x, o segundo é v, e assim por diante.

Permutações

- Considere o conjunto N = {1, 2, 3}. Note que existem 6 permutações dos elementos de N, a saber:

  (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), e (3, 2, 1).

- Na literatura matemática, a quantidade de permutações de um conjunto com ***n*** elementos é frequentemente representada por P_n. Por exemplo, temos que $P_3 = 6$, como observamos acima. Claramente, a quantidade de permutações dos elementos de um conjunto finito é igual ao número de maneiras de dispor tais elementos em uma fila. Assim, pelo PFC, concluímos que $P_n = n!$.

Uma observação importante é que, para que isso seja válido, os n elementos que estamos permutando precisam ser distintos.

Permutações

- ***Exemplo 1:*** Um professor deseja elaborar um teste com 6 questões. Os enunciados das questões já foram elaborados, mas ele ainda precisa escolher a ordem em que essas questões irão figurar no teste. De quantas maneiras ele pode fazer isso?

Permutações

- ***Exemplo 1:*** Um professor deseja elaborar um teste com 6 questões. Os enunciados das questões já foram elaborados, mas ele ainda precisa escolher a ordem em que essas questões irão figurar no teste. De quantas maneiras ele pode fazer isso?

- ***Solução:*** O número de maneiras é precisamente o número de permutações do conjunto formado pelas 6 questões. Portanto, o número de maneiras em que ele pode compor o teste é igual a $\mathbf{P_6 = 6! = 720}$.

Permutações

- ***Exemplo 2:*** Quantos são os números de 5 algarismos distintos, formados apenas pelos dígitos 1, 2, 3, 4, 5? Quantos deles são maiores do que 30.000?

Permutações

- ***Exemplo 2:*** Quantos são os números de 5 algarismos distintos, formados apenas pelos dígitos 1, 2, 3, 4, 5? Quantos deles são maiores do que 30.000?
- ***Solução:*** Veja que todo número de 5 algarismos distintos, formado pelos dígitos 1, 2, 3, 4, 5, corresponde a uma permutação desses elementos. Sendo assim, existem $\mathbf{P_5 = 5! = 120}$ números com a propriedade desejada.

Como o número deve ser maior do que 30.000, esse primeiro dígito deve ser igual a 3, 4 ou 5; portanto, existem apenas 3 possibilidades para o seu valor. Sobram 4 algarismos para compor o restante do número.

$$\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_ = 3 \cdot \_\_ \cdot \_\_ \cdot \_\_ \cdot \_\_ = 3 \cdot P_4 = 3 \cdot 24 = 72$$

Permutações

- O número de anagramas da palavra **FORÇA** é igual a **5! = 120**. De fato, como cada anagrama corresponde a uma permutação dos elementos de **{F, O, R, Ç, A}**, temos que o número de anagramas é igual a $\mathbf{P_5}$, que é igual a **5!**. Em geral, quando **n** é um número natural e temos uma palavra formada por **n** letras distintas, podemos concluir analogamente que o número de anagramas dessa palavra é igual a **n!**.

Permutações

- ***Ordem Lexicográfica***
- Quando os elementos do conjunto são números, como no conjunto {1, 2, 3, 4}, podemos considerar a permutação onde os elementos são escritos do menor para o maior: (1, 2, 3, 4). Quando os elementos são letras, podemos considerar aquela ordem onde as letras aparecem na mesma ordem em que são listadas no alfabeto latino. Uma vez fixada uma ordem como essa, podemos também ordenar o conjunto de todas as permutações.

Permutações

- ***Ordem Lexicográfica***
- Dadas duas permutações, digamos (a1, a2, . . . , an) e (b1, b2, . . . , bn), dos elementos do conjunto {1, 2, . . . , n}, dizemos que (a1, a2, . . . , an) é lexicograficamente menor do que (b1, b2, . . . , bn) quando existe um inteiro **i** tal que os **i − 1** primeiros valores das sequencias (a1, a2, . . . , an) e (b1, b2, . . . , bn) são iguais, mas temos que **ai < bi** . Veja que esse é o mesmo motivo pelo qual a palavra CASTO aparece antes da palavra CORRA num dicionário de Português.

Permutações com repetição

http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=15

11º PIC Programa de Iniciação Científica da OBMEP

Arranjos

- $0 \leq r \leq n$
- Um ***arranjo (simples)*** de ***n*** elementos (distintos), ***tomados r a r***, é qualquer maneira de listar ordenadamente ***r*** elementos, tomados dentre os ***n*** elementos dados. Escreveremos $A_{n,r}$ para indicar a quantidade de arranjos simples de ***n*** elementos, ***tomados r a r***.
- No caso em que $r = 0$, adotaremos a convenção de que $A_{n,0} = 1$, pois isso será coerente com a fórmula geral que iremos encontrar logo mais para $A_{n,r}$, quando $1 \leq r \leq n$.

Arranjos

- ***Exemplo 1:*** Quantos número de 3 dígitos distintos podemos formar nos quais seus dígitos são tomados do conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}?
- ***Solução:*** Temos 7 possíveis valores para escolher para o primeiro dígito (centenas) e, após esse ser escolhido, restam 6 possíveis valores para o segundo dígito (dezenas); por fim, descontados os valores escolhidos para os dois primeiros dígitos, teremos 5 possíveis valores para a escolha do terceiro dígito.

$$A_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

Arranjos

- Usando o mesmo raciocínio do exemplo anterior para montar um **arranjo de n elementos escolhidos r a r**, temos: n possíveis escolhas para o 1º elemento, n − 1 possíveis escolhas para o 2º elemento, e assim por diante, até $(n - (r - 1)) = n - r + 1$ possíveis escolhas para o r-ésimo elemento, pois, no momento da escolha do r-ésimo elemento, já foram escolhidos outros r − 1 elementos. Pelo PFC, segue que $\mathbf{A_{n,r} = n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot (n - r + 1)}$, ou seja, $A_{n,r}$, é o produto dos r maiores números inteiros que são menores ou iguais a n.

Arranjos

- ***Exemplo 2:*** Calcule o valor de $A_{12,4}$.
- ***Solução:*** De acordo com a discussão anterior, o valor de $A_{12,4}$ é obtido como o produto de 4 números, onde começamos com o número 12 e diminuímos uma unidade a cada fator.

Assim $A_{12,4} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11.880$.

Arranjos

Usando o que aprendemos sobre o fatorial de inteiros não negativos, podemos expressar $A_{n,r}$ do seguinte modo alternativo:

$$\begin{aligned} A_{n,r} &= n(n-1)\dots(n-r+1) \\ &= \frac{n(n-1)\dots\cdot(n-r+1)\cdot(n-r)!}{(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!}. \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever de modo mais compacto:

$$\boxed{A_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}.}$$

Arranjos

- ***Exemplo 3:*** Calcule o valor de $A_{12,4}$ utilizando a equação encontrada anteriormente.
- ***Solução:***

$$A_{12,4} = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 11.880.$$

Arranjos

- ***Exemplo 4:*** Uma pessoa tem uma caixa com 10 livros guardados e possui uma prateleira onde cabem apenas 4 deles. De quantos modos ela pode escolher 4 dos 10 livros e colocá-los em uma pilha sobre a prateleira?
- ***Solução:*** O número de maneiras de fazer isso é precisamente $A_{10,4}$, já que devemos escolher 4 elementos dentre 10 e a ordem em que esses elementos forem escolhidos é relevante, uma vez que ela determinará a ordem em que os livros serão empilhados. Assim, a resposta é: $\mathbf{A_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040}$.

Arranjos

- Observe que o exemplo anterior poderia ter sido resolvido, tão facilmente quanto, usando diretamente o PFC, sem a necessidade de lembrarmos a fórmula para $A_{n,r}$. Por isso mesmo, o tema "arranjos" acaba não recebendo um enfoque muito grande dentro no estudo de problemas de contagem. Contudo, é importante conhecê-lo, especialmente para entender sua relação com o importante conceito de combinação, o qual enunciamos a seguir:

Combinações

- Uma **combinação (simples) de n elementos (distintos), tomados r a r**, é qualquer escolha de r elementos dentre os n elementos dados. Em uma combinação, **apenas o conjunto dos elementos escolhidos é relevante, de modo que a ordem em que eles forem tomados não importa**. Escrevemos $\mathbf{C_{n,r}}$ para indicar a quantidade de combinações de n elementos, tomados r a r.

No caso em que r = 0, definimos $C_{n,0} = 1$, de forma semelhantes ao que havíamos feito com arranjos. Observamos também que, no lugar de escrevemos "combinação de n elementos escolhidos r a r" ´e comum escrevermos apenas "combinação de n escolhe r" (ainda que o Português de tal frase careça de correção) ou, ainda, falarmos diretamente de uma "escolha de r elementos dentre n".

Combinações

- Dentre um grupo de 7 pessoas, de quantas formas podemos montar uma equipe de 3 pessoas para realizar uma tarefa?

Vamos supor, por um momento, que a equipe seja montada através de um sorteio, da seguinte forma: os nomes das pessoas são escritos em papeizinhos e colocados em uma urna; iniciamos sorteando um nome qualquer dessa urna (removendo um papelzinho da mesma); em seguida, sorteamos um segundo nome dentre os 6 restantes e, por fim, sorteamos um terceiro nome, dentre os 5 restantes. Veja que estamos realizando três escolhas e que, pelo princípio fundamental da contagem, o total de possíveis resultados para essa sequencia de três sorteios ´e igual a $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$. De outra forma, podemos notar também que esse número é igual a $\mathbf{A_{7,3}}$, já que estamos montando uma lista ordenada com os 3 nomes.

Combinações

- Dentre um grupo de 7 pessoas, de quantas formas podemos montar uma equipe de 3 pessoas para realizar uma tarefa?

Temos um problema! Os membros de uma mesma equipe podem ser sorteados de várias maneiras diferentes, o que indica que **o número de possíveis equipes não é igual ao número de resultados para os sorteios**. A equipe composta pelas pessoas ***A, B, C*** é a mesma equipe ***B, A, C***, ou qualquer outra permutação de ***{A, B, C}***. Na verdade, para qualquer equipe (com 3 pessoas), os nomes de seus membros podem ter sido sorteados de exatamente $3! = 6$ maneiras diferentes, que é o número de maneiras de permutar os 3 nomes. Dessa forma, temos que dividir a quantidade de sorteios por 6 para obter o número de possíveis equipes. Assim, o número de equipes é igual a $210/6 = 35$, de sorte que $C_{7,3} = 35$.

Combinações

- Relembrando: Ciclo 1, Encontro 2, Exercício 4

__ __ __ __ __ __ =

60 x 59 x 58 x 57 x 56 x 55 =

36.045.979.200

05-10-16-21-39-58 = 10-16-05-58-39-21

__ __ __ __ __ __ = 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 720

36.045.979.200 ÷ 6! = 50.063.860

1 em 50.063.860

Combinações

- Queremos contar quantos são os conjuntos de r elementos, escolhidos dentre n elementos distintos dados. Podemos montar um tal conjunto de r elementos escolhendo (ou, se você preferir, sorteando) seus elementos um a um. Assim, primeiro montamos uma lista ordenada com r elementos, o que pode ser feito de An,r maneiras. Acontece que cada conjunto de r elementos será obtido a partir de exatamente r! dessas listas, uma vez que r! ´e, como sabemos, o número de maneiras de montar uma lista com os r elementos do conjunto. Dessa forma, a quantidade de conjuntos com r elementos, escolhidos dentre os n elementos dados, é igual a An,r/r!. Concluímos, então, que:

$$C_{n,r} = \frac{A_{n,r}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Combinações

Observamos que autores de diferentes livros costumam usar diferentes notações para $A_{n,r}$ e para $C_{n,r}$. Por exemplo, C_n^r, ou ainda ${}_nC_r$, ou até mesmo mesmo C_r^n, entre outras, às vezes são usadas no lugar de $C_{n,r}$. Assim, você deve ficar atento ao contexto, caso leia sobre isso em outros textos. Por outro lado, uma notação extremamente importante e que não possui ambiguidades é a de número binomial.

Dados inteiros não negativos n e r, com $0 \leq r \leq n$, o número binomial n escolhe r, representado por $\binom{n}{r}$, tem o mesmo valor de $C_{n,r}$, ou seja,

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Combinações

- **Exemplo 1:** Em um campeonato de futebol com 6 times, cada time jogou exatamente uma vez contra cada um dos outros. Quantos jogos aconteceram?
- **Solução:** Claramente, a quantidade de jogos que aconteceram é igual ao número de maneiras de escolhermos 2 times dentre os 6. Esse número é igual a:

$$C_{6,2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$$

Combinações

- **Exemplo 2:** Um professor elaborou uma lista de exercícios com 10 questões e pediu que um aluno escolhesse 7 delas para resolver. De quantas formas o aluno pode escolher o conjuntos de questões que vai resolver?
- **Solução:**

$$C_{10,7} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120.$$

Exercício 1

Calcule quantos são os anagramas da palavra MARTELO no quais vale que:

(a) Todas as vogais aparecem antes de todas as consoantes.

(b) Todas as vogais aparecem juntas.

(c) Nem todas as vogais aparecem juntas.

Exercício 1 - Solução

(a) Nesse caso, onde todas as vogais devem aparecer antes de todas as consoantes, é necessário e suficiente que os três primeiros espaços sejam preenchidos com um anagrama de AEO e os quatro últimos sejam preenchidos com um anagrama de MRTL. Existem $P3 = 3! = 6$ maneiras de se escolher o anagrama de AEO e $P4 = 4! = 24$ maneiras de se escolher o anagrama de MRTL. Como para cada anagrama de AEO podemos escolher qualquer um dos anagramas de MRTL temos que, pelo PFC, o total de maneiras de preencher os espaços é $6 \cdot 24 = 144$.

Exercício 1 - Solução

(b) Primeiramente iremos escolher quais dos 7 espaços serão ocupados pelas vogais. Como as vogais devem ocupar espaços consecutivos, basta escolhermos qual será o primeiro espaço ocupado por uma vogal. Mas, como temos 3 vogais, a primeira vogal deverá ocupar um dos primeiros 5 espaços. Logos existem 5 possibilidades para a escolha das posições que serão ocupadas pelas vogais. (VVVCCCC, CVVVCCC, CCVVVCC, CCCVVVC, CCCCVVV) Tendo escolhido as posições das vogais, podemos proceder como no item anterior: para terminar, basta escolher um anagrama de AEI para ocupar as posições reservadas para as vogais e um anagrama de MRTL, que será usado para determinar a ordem em que as consoantes serão distribuídas nos espaços para elas reservados. Pelo PFC, o número de maneiras de realizar essas três escolhas é igual a $5 \cdot 6 \cdot 24 = 720$.

Exercício 1 - Solução

(b') Uma outra maneira de resolver o item (b) é a seguinte: chamaremos um anagrama de MARTELO de válido se, nele, as vogais aparecerem juntas. Em cada anagrama válido, vamos trocar o bloco com as três vogais consecutivas pela letra X (que é uma letra que não aparece em MARTELO). Veja que, ao fazermos isso, o resultado ´e que o anagrama original é convertido em algum anagrama da palavra XMRTL (o qual é unicamente determinado pelo anagrama original da palavra MARTELO). Note que, existem $P5 = 5! = 120$ anagramas de XMRTL. Agora, para obter de volta um anagrama válido, devemos substituir a letra X por qualquer anagrama de AEO. Isso pode ser feito de $P3 = 3! = 6$ maneiras. Sendo assim, o número de anagramas válidos é igual a $P5 \cdot P3 = 120 \cdot 6 = 720$.

Exercício 1 - Solução

(c) Aqui, usaremos a técnica de contagem pelo complementar. O número total de anagramas de MARTELO é igual a $P7 = 7! = 5040$. Para contar em quantos deles existem vogais que estão separadas, basta subtrair, desse total, a quantidade de anagramas em que todas as vogais aparecem juntas (e que calculamos no item anterior). Logo, existem $5040 - 720 = 4320$ anagramas nos quais nem todas as vogais aparecem juntas.

Exercício 2

Um batalhão possui 50 soldados, incluindo os soldados Ryan e Chuck Norris. Determine de quantas formas podemos montar um time com 4 soldados para uma missão, de modo que:

(a) o soldado Ryan participe dessa missão.

(b) nem o soldado Ryan nem o soldado Chuck Norris participem da missão.

(c) Ryan e Chuck Norris não sejam escolhidos simultaneamente para a missão.

Exercício 2 - Solução

(a) Como Ryan deve ser escolhido, precisamos apenas escolher os demais 3 soldados, dentre os 49 restantes, para a missão. Assim, o número de maneiras de fazer isso é: $\binom{49}{3} = 18.424$.

Exercício 2 - Solução

(b) Nesse caso, ainda precisamos escolher 4 soldados para a missão, mas estes devem ser escolhidos dentre os demais 48 soldados. Assim, o número de maneiras é igual a $\binom{48}{4} = 194.580$.

Exercício 2 - Solução

(c) A maneira mais fácil de fazer a contagem, nesse caso, é usando o método do complementar: vamos contar o total de times de 4 soldados (sem qualquer restrição) e subtrair a quantidade de times que são ruins, ou seja, aqueles em que ambos Ryan e Chuck Norris estão presentes. O resultado dessa conta é igual a:

$$\binom{50}{4} - \binom{48}{2} = 230.300 - 1.128 = 229.172.$$

Exercício 3

Uma pessoa possui 8 discos com diâmetros distintos e deseja guardá-los em duas caixas, uma verde e a outra azul. Cada caixa comporta uma pilha de quatro discos. Dentro de cada caixa, ela deseja empilhá-los de forma os discos estejas dispostos do maior para o menor, ou seja, um disco só pode ter acima de si mesmo outros discos de diâmetro menor. De quantas formas ela pode fazer essa distribuição?

Exercício 3 - Solução

Solução. Observe que o fato dos discos precisarem ser guardados de forma ordenada (do maior para o menor), na verdade, nos tira a liberdade de escolher/atribuir uma ordem qualquer para eles. Na verdade, tudo que precisamos fazer para resolver o problema é escolher quais dos 8 discos serão guardados na caixa verde. Uma vez feito isso, os demais discos deverão ser guardados na caixa azul, e a ordem em que os quatro discos de cada caixa serão guardados já está predeterminada. Sendo assim, o número de maneiras de guardar os discos é igual ao número de maneiras de escolher 4 deles, dentre os 8 discos dados, que é igual a:

$$\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 70.$$

Exercício 3

Considerando um grupo de 20 pessoas que participam de um conselho consultor de uma empresa, calcule:

(a) O número de maneiras de escolher um presidente, um vice-presidente e um diretor para o conselho.

(b) O número de maneiras de montar uma equipe de 4 pessoas do conselho para realizar uma tarefa.

Exercício 3 - Solução

(a) Devemos escolher 3 pessoas dentre as 20, mas veja que o papel dessas 3 pessoas não é simétrico, posto que elas irão desempenhar funções diferentes. Logo, a ordem em que elas serão escolhidas é relevante, de forma que o número de maneiras de realizar as escolhas é igual a:

$$A_{20,3} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6.840.$$

(b) Nessa caso, basta escolhermos 4 dentre as 20 pessoas, pois a ordem das escolhas não é relevante para determinar a equipe escolhida. Assim, o número de maneiras é igual a:

$$C_{20,4} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 4.845.$$

Exercício 4

De quantas maneiras podemos escolher três números do conjunto $A = \{1, 2, . . . , 30\}$, de modo que sua soma seja ímpar?

Exercício 4 - Solução

Solução. Para que a soma de três números inteiros seja ímpar, é necessário que ou todos os três números sejam ímpares ou que um deles seja ímpar e os outros dois sejam pares. Assim, vamos precisar dividir o problema em dois casos.

Caso 1 No primeiro caso, para que todos os números sejam ímpares, devemos escolher 3 números do total dos 15 números ímpares do conjunto A. A quantidade de maneiras em que podemos fazer isso é

$$\binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2} = 455.$$

Exercício 4 - Solução

Caso 2 No segundo caso, temos 15 possíveis escolhas para o número ímpar, e $\binom{15}{2} = \frac{15\cdot 14}{2} = 105$ maneiras de escolher os dois números pares. Sendo assim, pelo PFC,

o total de maneiras de escolher os números, nesse caso, é

$$15 \cdot 105 = 1.575.$$

Como exatamente um dos dois casos acima deve ocorrer e eles estão ligados pelo conectivo 'ou', temos que o total de maneiras de escolher os três números é

$$455 + 1575 = 2.030.$$

Estudar para o próximo encontro!

- Seção 8.2 da Apostila do PIC da OBMEP "Encontros de Geometria – Parte 1", F. Dutenhefner, L. Cadar (http://www.obmep.org.br/docs/Geometria.pdf
- Seções 1.1 a 1.5 da Apostila Apostila 3 do PIC da OBMEP, "Teorema de Pitágoras e Áreas", E. Wagner http://www.obmep.org.br/docs/apostila3.pdf